

**ДИСИПАТИВНИЙ РОЗІГРІВ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ЦИЛІНДРА ТА ШАРУ, ЗУМОВЛЕНИЙ УСТАЛЕНИМ РУХОМ ДОВІЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ПО ЇХНІХ ПОВЕРХНЯХ**

*Розглянуто плоску квазістатичну задачу про стаціонарні коливання і дисипативний розігрів в'язкопружних циліндра та шару при полігармонічному деформуванні, зумовленому усталеним рухом довільного навантаження по їхніх поверхнях. Отримано аналітичний розв'язок задачі в рамках лінійної теорії, коли властивості матеріалу не залежать від температури, а коефіцієнт Пуассона прийнято сталою дійсною величиною. На основі числових результатів досліджено вплив головних факторів (геометричних характеристик, умов навантаження, теплових граничних умов) на термомеханічний стан досліджуваних тіл. Проведено порівняння числових результатів, отриманих у задачі для циліндра, з аналогічними результатами для шару.*

**Вступ.** Рухомі поверхневі навантаження часто зустрічаються у різних галузях сучасної техніки. Одним з найважливіших навантажень цього типу є навантаження, викликане коченням циліндра по жорсткій основі. При врахуванні в'язкопружності матеріалу циліндра у зв'язку з циклічністю деформування виникає явище саморозігріву: температура в циліндрі суттєво підвищується завдяки гістерезисним втратам в матеріалі. У роботах [1, 2] одержано аналітичні розв'язки спряженої задачі про стаціонарні коливання і дисипативний розігрів суцільного та порожнистого циліндрів, коли по їх поверхнях рухалось самоврівноважене нормальне навантаження. Аналогічну задачу про визначення температури дисипативного розігріву в'язкопружного циліндра, зумовленого його коченням по жорсткій основі, розглянуто в роботі [7] у спрощеній постановці, коли в області контакту враховувалися тільки нормальні напруження, розподілені за законом Герца. Вплив початкових напружень на розподіл контактних напружень при коченні циліндра по півплощині та смузі досліджено в [4–6].

У пропонованій роботі розглянуто більш складну задачу, коли рухоме поверхнєве навантаження може бути довільним за умови, що його можна розвинути в ряд Фур'є за кутовою змінною. Крім того, розв'язано аналогічну задачу для шару, коли одна з границь шару жорстко закріплена, а по іншій рухається деяке періодичне навантаження. З міркувань фізичного характеру зрозуміло, що задача для шару є граничним випадком деякої відповідної задачі для циліндра, коли його товщина зменшується до нуля при сталому радіусі або радіус збільшується до нескінченності при сталій товщині. У роботі досліджено вплив основних параметрів (геометричних розмірів, умов навантаження, теплових граничних умов) на термомеханічний стан циліндра та шару.

**Постановка стаціонарної квазістатичної задачі про полігармонічне деформування і дисипативний розігрів в'язкопружних циліндра та шару.** У циліндричній системі координат  $(r, \bar{\varphi}, z)$  розглянемо нескінченно довгий в'язкопружний нестисливий порожнистий циліндр  $(r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \bar{\varphi} < 2\pi, -\infty < z < +\infty)$ . Внутрішня границя циліндра  $r = r_1$  жорстко з'єднана з абсолютно жорсткою віссю, а на зовнішній,  $r = r_2$ , діє рухоме навантаження. Вважаючи, що навантаження залежить тільки від координати  $\bar{\varphi}$  (і не залежить від  $z$ ), будемо мати плоску задачу. Тому в полярній системі координат  $(r, \bar{\varphi})$  розглянемо кільце  $r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \bar{\varphi} < 2\pi$ .

Розглянемо відповідну до сформульованої задачі задачу про шар товщини  $h$ , необмежений у двох напрямках  $(-\infty < x < +\infty, 0 \leq y \leq h, -\infty < z < +\infty)$ . У припущенні незалежності від координати  $z$  ця задача

зводиться до плоскої задачі для смуги  $-\infty < x < +\infty$ ,  $0 \leq y \leq h$ . Границя  $y = 0$  шару жорстко закріплена, а границя  $y = h$  зазнає дії рухомого навантаження. Вказані плоскі задачі про циліндр і про шар будемо вважати відповідними одна одній, коли: **1)** у цих задачах між змінними існує відповідність  $\varphi = x/r_2$ ; **2)** при такій відповідності між змінними співпадають навантаження у цих задачах; **3)** товщини циліндра та шару є однаковими,  $h = r_2 - r_1$ . Тому вважаємо, що у задачі про шар рухоме навантаження має вигляд періодичної з періодом  $L = 2\pi r_2$  системи навантажень, яка рухається по поверхні шару  $y = h$  у напрямку осі  $x$  зі сталою швидкістю  $V$ . Із відповідною кутовою швидкістю  $\omega = V/r_2$  таке ж навантаження рухається по поверхні циліндра. Тому рухома система координат  $(r, \bar{\varphi})$  пов'язана з нерухомою  $(r, \varphi)$  співвідношенням  $\bar{\varphi} = \varphi + \omega t$ . У задачі про шар будемо позначати  $R = r_2$ . Враховуючи наведені рівності для відповідних задач, розвинення у ряд Фур'є рухомого навантаження має вигляд

$$P = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{P}'_n \cos n\bar{\varphi} + \bar{P}''_n \sin n\bar{\varphi}) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_n \exp(-in\bar{\varphi}), \quad (1)$$

де

$$\bar{P}_n = \bar{P}'_n + i \cdot \bar{P}''_n.$$

Враховуючи, що  $\bar{\varphi} = \varphi + \omega t$ , відповідно до (1) запишемо

$$P = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_n \exp(-in\varphi) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \exp(-in\omega t),$$

де

$$\tilde{P}_n = \bar{P}_n \cdot \exp(-in\omega t), \quad P_n = \bar{P}_n \cdot \exp(-in\varphi).$$

Відмітимо, що  $|P_n| = |\bar{P}_n| = |\tilde{P}_n| \left( (P'_n)^2 + (P''_n)^2 = (\bar{P}'_n)^2 + (\bar{P}''_n)^2 = (\tilde{P}'_n)^2 + (\tilde{P}''_n)^2 \right)$ , причому цей вираз не залежить ні від  $\varphi$ , ні від  $t$ . Цей факт необхідно враховувати при обчисленні дисипативної функції.

З урахуванням вищенаведеного напруження  $\sigma$  і деформації  $\varepsilon$  подамо у вигляді

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \cdot \exp(-in\omega t), \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \cdot \exp(-in\omega t). \quad (2)$$

Тоді постановка плоскої квазістатичної стаціонарної задачі про полігармонічне деформування і дисипативний розігрів циліндра та шару в рамках лінійної в'язкопружності зводиться до розв'язування таких рівнянь:

– *рівнянь рівноваги*

$$\sigma_{r,r} + [\sigma_{r\varphi,\varphi} + \sigma_r - \sigma_\varphi] \frac{1}{r} = 0, \\ \sigma_{r\varphi,r} + [\sigma_{\varphi,\varphi} + 2\sigma_{r\varphi}] \frac{1}{r} = 0, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (3)$$

$$\sigma_{x,x} + \sigma_{xy,y} = 0,$$

$$\sigma_{y,y} + \sigma_{xy,x} = 0, \quad 0 < y < h, \quad -\infty < x < +\infty; \quad (3')$$

– *осереднених за цикл рівнянь теплопровідності*

$$\lambda_q \left( T_{,rr} + \frac{1}{r} T_{,r} \right) + D(r) = 0, \quad r_1 < r < r_2, \quad (4)$$

$$\lambda_q T_{,yy} + D(y) = 0, \quad 0 < y < h, \quad (4')$$

де дисипативна функція

$$D = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (n\omega) J''(n\omega) \left[ |\sigma_1^n|^2 + |\sigma_2^n|^2 + 2|\sigma_{12}^n|^2 - \nu |\sigma_1^n + \sigma_2^n|^2 \right], \quad (5)$$

тут для циліндра індекси (1, 2)  $\rightarrow$  (r,  $\varphi$ ), для шару (1, 2)  $\rightarrow$  (y, x);  
– кінематичних співвідношень

$$\varepsilon_r = u_{r,r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_{\varphi,\varphi} + u_r}{r}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left[ \frac{u_{r,\varphi} - u_\varphi}{r} + u_{\varphi,r} \right], \quad (6)$$

$$\varepsilon_x = u_{x,x}, \quad \varepsilon_y = u_{y,y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (u_{x,y} + u_{y,x}); \quad (6')$$

– рівнянь стану (для ізотропного тіла):

$$\sigma_{rr} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu\varepsilon_{r\varphi}, \quad (7)$$

$$\sigma_{xx} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{yy} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{yy}, \quad \sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}, \quad (7')$$

де всі величини комплексні, так що  $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ ,  $\mu = \mu' + i\mu''$ ;

– механічних граничних умов

$$u_r = u_\varphi = 0, \quad r = r_1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (8)$$

$$\sigma_r = p(r_2\varphi), \quad \sigma_{r\varphi} = q(r_2\varphi), \quad r = r_2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (9)$$

$$u_x = u_y = 0, \quad y = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (8')$$

$$\sigma_x = p(x), \quad \sigma_{xy} = q(x), \quad y = h, \quad -\infty < x < +\infty; \quad (9')$$

– теплових граничних умов (умов конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем)

$$-\lambda_q T_{,r} + \alpha_1 (T - T_0) = 0, \quad r = r_1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\lambda_q T_{,r} + \alpha_2 (T - T_0) = 0, \quad r = r_2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (10)$$

$$-\lambda_q T_{,y} + \alpha_1 (T - T_0) = 0, \quad y = 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$\lambda_q T_{,y} + \alpha_2 (T - T_0) = 0, \quad y = h, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (10')$$

Тут і далі  $T_0$  – температура зовнішнього середовища,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  – коефіцієнти теплообміну.

Сформульовану спряжену задачу термов'язкопружності будемо розв'язувати у припущенні, що властивості в'язкопружного матеріалу циліндра та шару не залежать від температури. Тоді вона розпадається на дві окремі лінійні задачі: задачу механіки про напружено-деформований стан циліндра та шару та задачу теплопровідності з відомим джерелом тепла, яке задається дисипативною функцією. Кожна з цих двох задач розв'язується аналітично. Коефіцієнт Пуассона будемо вважати сталою дійсною величиною. З огляду на вираз для дисипативної функції (5) при обчисленні комплексних напружень множник  $\exp(-in\varphi)$  будемо опускати.

**Розв'язування задачі механіки.** Розв'язуючи методом Фур'є наведену вище систему рівнянь, одержимо вирази для напружень:

$$\sigma = \sigma_0 + \sum \left( \sigma' \cos n\varphi + \sigma'' \sin n\varphi \right),$$

де компоненти тензора напружень мають вигляд

для цилиндра:

$$\begin{aligned}
\sigma_r^n &= f_n' \rho^n \left[ n - 2 - \frac{s}{\rho^2} \left( n - 1 + \alpha \left( \frac{s}{\rho^2} \right)^n \right) \right] + \\
&\quad + \varphi_n' \rho^{-n} \left[ n + 2 - \frac{s}{\rho^2} \left( n + 1 - \alpha \left( \frac{s}{\rho^2} \right)^{-n} \right) \right], \\
\sigma_\varphi^n &= f_n' \rho^n \left[ -n - 2 + \frac{s}{\rho^2} \left( n - 1 + \alpha \left( \frac{s}{\rho^2} \right)^n \right) \right] - \\
&\quad - \varphi_n' \rho^{-n} \left[ n - 2 - \frac{s}{\rho^2} \left( n + 1 - \alpha \left( \frac{s}{\rho^2} \right)^{-n} \right) \right], \\
&\quad (\cdot)' \leftrightarrow (\cdot)'', \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\
(-1)^{2,1} \sigma_{r\varphi}^{n'} &= -f_n'' \rho^n \left[ n + \frac{s}{\rho^2} \left( -n + 1 + \alpha \left( \frac{s}{\rho^2} \right)^n \right) \right] + \\
&\quad + \varphi_n'' \rho^{-n} \left[ n - \frac{s}{\rho^2} \left( n + 1 + \alpha \left( \frac{s}{\rho^2} \right)^{-n} \right) \right], \quad \alpha = 3 - 4\nu; \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_n'' &= \frac{(-1)^{1,2} q_n'' d_n + p_n'' b_n}{\Delta_n}, \\
\varphi_n'' &= \frac{p_n'' a_n + (-1)^{1,2} q_n'' c_n}{\Delta_n}, \quad \rho = \frac{r}{r_2}, \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= n + s(\alpha s^n - n + 1), & b_n &= n - s(\alpha s^{-n} + n + 1), \\
c_n &= 2 - n + s(\alpha s^n + n - 1), & d_n &= 2 + n + s(\alpha s^{-n} - n - 1), \\
\Delta_n &= a_n d_n - b_n c_n, & s &= \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (13)
\end{aligned}$$

для шару:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mu} \sigma_x^n &= \frac{1}{4} A_n' [(3 + 2n\eta)e^{n\eta} - \alpha e^{-n\eta}] + \frac{1}{4} B_n' [(3 - 2n\eta)e^{-n\eta} - \alpha e^{n\eta}], \\
\frac{1}{2\mu} \sigma_y^n &= \frac{1}{4} A_n' [(1 - 2n\eta)e^{n\eta} + \alpha e^{-n\eta}] + \frac{1}{4} B_n' [(1 + 2n\eta)e^{-n\eta} + \alpha e^{n\eta}], \\
\frac{1}{2\mu} \sigma_{xy}^n &= -\frac{1}{4} A_n'' [(1 + 2n\eta)e^{n\eta} + \alpha e^{-n\eta}] + \frac{1}{4} B_n'' [(1 - 2n\eta)e^{-n\eta} + \alpha e^{n\eta}], \\
\frac{1}{2\mu} \sigma_x^n &= \frac{1}{4} A_n'' [(3 + 2n\eta)e^{n\eta} - \alpha e^{-n\eta}] + \frac{1}{4} B_n'' [(3 - 2n\eta)e^{-n\eta} - \alpha e^{n\eta}], \\
\frac{1}{2\mu} \sigma_y^n &= \frac{1}{4} A_n'' [(1 - 2n\eta)e^{n\eta} + \alpha e^{-n\eta}] + \frac{1}{4} B_n'' [(1 + 2n\eta)e^{-n\eta} + \alpha e^{n\eta}], \\
\frac{1}{2\mu} \sigma_{xy}^n &= \frac{1}{4} A_n' [(1 + 2n\eta)e^{n\eta} + \alpha e^{-n\eta}] - \frac{1}{4} B_n' [(1 - 2n\eta)e^{-n\eta} + \alpha e^{n\eta}], \quad (11')
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
A_n'''' &= \frac{2}{\mu} \frac{(-1)^{2,1} q_n'''' d_n - p_n'''' b_n}{\Delta_n}, \\
B_n'''' &= \frac{2}{\mu} \frac{p_n'''' a_n - (-1)^{2,1} q_n'''' c_n}{\Delta_n}, \quad \eta = \frac{y}{R}, \\
a_n &= \alpha e^{-n\zeta} + (1 + 2n\zeta)e^{n\zeta}, \quad b_n = -\alpha e^{n\zeta} - (1 - 2n\zeta)e^{-n\zeta}, \\
c_n &= (1 - 2n\zeta)e^{n\zeta} + \alpha e^{-n\zeta}, \quad d_n = (1 + 2n\zeta)e^{-n\zeta} + \alpha e^{n\zeta}, \quad \zeta = \frac{h}{R}, \\
\Delta_n &= a_n d_n - b_n c_n = 2e^{-2n\zeta} [(e^{2n\zeta} + \alpha)(\alpha e^{2n\zeta} + 1) + (2n\zeta)^2 e^{2n\zeta}], \quad (13')
\end{aligned}$$

а  $p_n''''$ ,  $q_n''''$  – коефіцієнти розвинень контактних нормальних  $p(x)$  і дотичних  $q(x)$  навантажень у ряди Фур'є за  $\varphi = x/R$ .

**Розв'язування задачі теплопровідності.** Для дослідження температурного поля дисипативного розігріву використаємо наведену в першому розділі постановку осередненої плоскої задачі теплопровідності (4), (4'), (5), (10), (10'). Введемо безрозмірні величини:  $\eta = y/R$ ,  $\rho = r/R$ ,  $\theta = (T - T_0)/T_0$ . Тоді рівняння теплопровідності (4), (4') набудуть вигляду

$$(\rho\theta_{,\rho})_{,\rho} + \frac{R^2}{\lambda T_0} \rho \bar{D}(\rho) = 0, \quad (14)$$

$$\theta_{,\eta\eta} + \frac{R^2}{\lambda T_0} \bar{D}(\eta) = 0, \quad (14')$$

де на підставі (5)

$$\bar{D}(\eta, \rho) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (n\omega) J''(n\omega) S_n(\eta, \rho), \quad (15)$$

$$S_n(\eta, \rho) = \left[ \left| \sigma_1^n \right|^2 + \left| \sigma_2^n \right|^2 + 2 \left| \sigma_{12}^n \right|^2 - \nu \left| \sigma_1^n + \sigma_2^n \right|^2 \right], \quad |a|^2 = (a')^2 + (a'')^2. \quad (16)$$

Тут і надалі вважатимемо в'язкопружний матеріал циліндра та шару нестисливим,  $\nu = 0.5$ . Як і раніше, індексам 1 і 2 для циліндра відповідають  $r$  та  $\varphi$ , а для шару – відповідно  $y$  та  $x$ .

Теплові граничні умови (10), (10') у безрозмірних змінних можна записати в однаковій формі ( $\rho = 1 - \zeta + \eta$ ):

$$\begin{aligned}
-\theta_{,\eta} + \gamma_1 \theta &= 0, \quad \eta = 0, \\
\theta_{,\eta} + \gamma_2 \theta &= 0, \quad \eta = \zeta,
\end{aligned} \quad (17)$$

де  $\gamma_1 = \alpha_1 R/\lambda$ ,  $\gamma_2 = \alpha_2 R/\lambda$ .

На основі розв'язку задачі механіки побудуємо дисипативну функцію за формулами (15), (16). Для цього, враховуючи вказану відповідність індексів, подамо дійсні та уявні складові тензора напружень для  $n$ -ї гармоніки у вигляді

$$\begin{aligned}
\sigma_1^n &= f_n' \alpha_{1n} + \varphi_n' \beta_{1n}, \quad \sigma_2^n = f_n' \alpha_{2n} + \varphi_n' \beta_{2n}, \quad \sigma_{12}^n = f_n' \alpha_{12n} + \varphi_n' \beta_{12n}, \\
\sigma_1'' &= f_n'' \alpha_{1n} + \varphi_n'' \beta_{1n}, \quad \sigma_2'' = f_n'' \alpha_{2n} + \varphi_n'' \beta_{2n}, \quad \sigma_{12}'' = -(f_n'' \alpha_{12n} + \varphi_n'' \beta_{12n}), \quad (18)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} f'_n &= \frac{p'_n b_n - q''_n d_n}{\Delta_n}, & f''_n &= \frac{p''_n b_n + q'_n d_n}{\Delta_n}, \\ \varphi'_n &= \frac{p'_n a_n - q''_n c_n}{\Delta_n}, & \varphi''_n &= \frac{p''_n a_n + q'_n c_n}{\Delta_n}. \end{aligned} \quad (19)$$

Крім того, для циліндра

$$\begin{aligned} \alpha_{1n} &= \rho^n \left[ n - 2 - \frac{s}{\rho^2} \left( n - 1 + \left( \frac{s}{\rho^2} \right)^n \right) \right], \\ \alpha_{2n} &= \rho^n \left[ -n - 2 + \frac{s}{\rho^2} \left( n - 1 + \left( \frac{s}{\rho^2} \right)^n \right) \right], \\ \alpha_{12n} &= -\rho^n \left[ n + \frac{s}{\rho^2} \left( -n + 1 + \left( \frac{s}{\rho^2} \right)^n \right) \right], \\ \beta_{1n} &= \rho^{-n} \left[ n + 2 - \frac{s}{\rho^2} \left( n + 1 - \left( \frac{s}{\rho^2} \right)^{-n} \right) \right], \\ \beta_{2n} &= -\rho^{-n} \left[ n - 2 - \frac{s}{\rho^2} \left( n + 1 - \left( \frac{s}{\rho^2} \right)^{-n} \right) \right], \\ \beta_{12n} &= \rho^{-n} \left[ n - \frac{s}{\rho^2} \left( n + 1 + \left( \frac{s}{\rho^2} \right)^{-n} \right) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

а для шару

$$\begin{aligned} \alpha_{1n} &= -(1 - 2n\eta)e^{n\eta} - e^{-n\eta}, & \beta_{1n} &= (1 + 2n\eta)e^{-n\eta} + e^{n\eta}, \\ \alpha_{2n} &= -(3 + 2n\eta)e^{n\eta} + e^{-n\eta}, & \beta_{2n} &= (3 - 2n\eta)e^{-n\eta} - e^{n\eta}, \\ \alpha_{12n} &= -(1 + 2n\eta)e^{n\eta} - e^{-n\eta}, & \beta_{12n} &= (-1 + 2n\eta)e^{-n\eta} - e^{n\eta}. \end{aligned} \quad (20')$$

Зі співвідношень (18), (19) отримаємо

$$\left| \sigma_1 \right|^2 = \frac{1}{(\Delta_n)^2} [(\alpha_{1n})^2 A_n + (\beta_{1n})^2 B_n + 2\alpha_{1n} \beta_{1n} C_n],$$

де

$$\begin{aligned} A_n &= |p_n|^2 (b_n)^2 + |q_n|^2 (d_n)^2 + 2b_n d_n (p''_n q'_n - p'_n q''_n), \\ B_n &= |p_n|^2 (a_n)^2 + |q_n|^2 (c_n)^2 + 2a_n c_n (p''_n q'_n - p'_n q''_n), \\ C_n &= |p_n|^2 a_n b_n + |q_n|^2 c_n d_n + 2(b_n c_n + a_n d_n)(p''_n q'_n - p'_n q''_n). \end{aligned} \quad (21)$$

Підставляючи у (16) отриманий вираз для  $\left| \sigma_1 \right|^2$  й аналогічні вирази для  $\left| \sigma_2 \right|^2$ ,  $\left| \sigma_{12} \right|^2$ ,  $\left| \sigma_1 + \sigma_2 \right|^2$ , матимемо

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{(\Delta_n)^2} \left\{ \frac{1}{2} [(\alpha_{1n} - \alpha_{2n})^2 + 4(\alpha_{12n})^2] A_n + \frac{1}{2} [(\beta_{1n} - \beta_{2n})^2 + 4(\beta_{12n})^2] B_n + \right. \\ &\quad \left. + [(\alpha_{1n} - \alpha_{2n})(\beta_{1n} - \beta_{2n}) + 4\alpha_{12n}\beta_{12n}] C_n \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Зазначимо, що величини  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  не залежать від змінної  $\rho$  ( $\eta$ ) і визначаються за формулами (21).

Загальний розв'язок задачі теплопровідності (14), (14'), (15), (20), (20'), (21), (22) отримаємо почленним інтегруванням відповідного ряду. З урахуванням граничних умов (17) температурне поле дисипативного розігріву для циліндра матиме вигляд

$$\begin{aligned} \theta(\rho) = T(\rho) - T(1) + & \left\{ [T(1) - T(\sqrt{s})] \gamma_1 \sqrt{s} (\gamma_2 \ln(\rho) - 1) + \right. \\ & + [T_{,\eta}(1 - \sqrt{s}) - \sqrt{s} T_{,\rho}(\sqrt{s})] + \gamma_1 \sqrt{s} T_{,\rho}(1 - \sqrt{s}) \ln \left| \frac{\rho}{\sqrt{s}} \right| + \\ & \left. + \gamma_2 \sqrt{s} T_{,\rho}(\sqrt{s}) \ln(\rho) \right\} \cdot [-\gamma_2 - \gamma_1 \sqrt{s} + \gamma_1 \gamma_2 \sqrt{s} \ln(\sqrt{s})]^{-1}, \end{aligned} \quad (23)$$

де

$$\begin{aligned} T(\rho) = -\frac{\omega R^2}{4\lambda T_0} \frac{J''(\omega)}{(\Delta_1)^2} & \left[ \left( \frac{1}{4} \rho^4 + \frac{1}{4} s^4 \rho^{-4} \right) A_1 + \right. \\ & + [s^2 \rho^{-4} + 4(\ln(\rho))^2 - 4s \rho^{-2}] B_1 + 2 \left( \rho^2 - s^2 \rho^{-2} + \frac{1}{2} s^3 \rho^{-4} \right) C_1 \left. \right] - \\ & - \frac{\omega R^2}{4\lambda T_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n J''(n\omega)}{(\Delta_n)^2} \left\{ \left[ \frac{n^2}{(n+1)^2} \rho^{2n+2} + 2s \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \rho^{2n} + s^2 \rho^{2n-2} + \right. \right. \\ & + s^{2n+2} \rho^{-2n-2} \frac{1}{(n+1)^2} \left. \right] A_n + \left[ \rho^{-2n+2} \frac{n^2}{(n-1)^2} - 2s \left( \frac{1}{n} + 1 \right) \rho^{-2n} + \right. \\ & + s^2 \rho^{-2n-2} + s^{-2n+2} \rho^{2n-2} \frac{1}{(n-1)^2} \left. \right] B_n + 2 \left[ \frac{1}{n} s^{1-n} \rho^{2n} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{1-n} s^{2-n} \rho^{2n-2} - \frac{1}{n} s^{n+1} \rho^{-2n} + \frac{1}{n+1} s^{n+2} \rho^{-2n-2} \right] C_n \left. \right\}. \end{aligned}$$

Для шару цей розв'язок має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \theta(\eta) = \tilde{T}(\eta) + \tilde{T}(0) - & \left\{ [\tilde{T}(0) - \tilde{T}(\zeta)] \gamma_2 (\gamma_1 \eta + 1) + [\tilde{T}_{,\eta}(0) - \tilde{T}_{,\eta}(\zeta)] + \right. \\ & \left. + \gamma_2 (\zeta - \eta) \tilde{T}_{,\eta}(0) - \gamma_1 \eta \tilde{T}_{,\eta}(\zeta) \right\} \cdot (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2 \zeta)^{-1}, \end{aligned} \quad (23')$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\eta) = \frac{R^2 \omega}{4\lambda T_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J''(n\omega)}{n(\Delta_n)^2} & \left\{ [e^{-2n\eta} + e^{2n\eta} (2 + (1 - 2n\eta)^2)] A_n + \right. \\ & + [e^{2n\eta} + e^{-2n\eta} (2 + (1 + 2n\eta)^2)] B_n + \\ & \left. + 2[e^{-2n\eta} (1 + 2n\eta) + e^{2n\eta} (1 - 2n\eta)] C_n \right\}. \end{aligned}$$

**Аналіз результатів обчислень.** На основі формул для температури дисипативного розігріву циліндра та шару, одержаних у попередньому розділі, проведемо аналіз розрахунків. При цьому за модель в'язкопружного тіла приймемо таку, для якої комплексна податливість має вигляд [3]

$$\tilde{J}(\omega) = (k' - ik'') \bar{\omega}^{-\delta} \Phi(\theta) \quad (24)$$

(типовий термореологічно простий в'язкопружний матеріал), де

$$\Phi(\theta) = \exp \left\{ \delta \left[ \frac{(\theta + 1) T_0 - T_1}{T_p} - 1 \right] / p \right\},$$

$$\bar{\omega} = \omega / \omega_0, \quad \omega_0 = 1 \text{ с}^{-1}, \quad k' = 1.537 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{Н}, \quad k'' = 0.5411 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{Н},$$

$$T_1 = -87.2^\circ\text{С}, \quad T_p = 109^\circ\text{С}, \quad p = 0.067, \quad \delta = 0.21.$$

Відповідні задачі про дисипативний розігрів циліндра та шару розгляда- тимемо за таких умов: 1) товщини циліндра та шару є однаковими,  $h = r_2 - r_1$ ; 2) навантаження (періодичне) на просторовому періоді  $L = 2\pi R$  однакове в обох задачах з урахуванням відповідності між змінними у цих задачах –  $\varphi = x/r_2$ . Рухоме поверхнєве навантаження приймаємо у простому вигляді: для циліндра воно складається з двох однакових частин, одна з яких рівномірно розподілена по дузі  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  (у радіанах), а друга розмі- щена симетрично до першої відносно осі циліндра. Це навантаження для циліндра має вигляд

$$\bar{\sigma}_r = \begin{cases} P/(2\varepsilon r_2), & |\varphi| \leq \varepsilon, & |\varphi \pm \pi| \leq \varepsilon, \\ 0, & \varepsilon < |\varphi| < \pi - \varepsilon, & \varphi \in [-\pi, \pi], \end{cases} \quad (25)$$

( $P$  – сумарна сила на  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ ), а для шару це є періодична система наван- тажень

$$\bar{\sigma}_y = \begin{cases} P/(2\varepsilon r_2), & |x| \leq \varepsilon R, & |x \pm \pi R| \leq \varepsilon R, \\ 0, & \varepsilon R < |x| < \pi R - \varepsilon R, & x \in [-\pi R, \pi R], \end{cases} \quad (25')$$

з періодом  $L = 2\pi R$  ( $R = r_2$ ).

Коефіцієнти Фур'є навантажень (25) та (25') є такими:

$$p'_{2n} = 2 \frac{P}{\pi r_2} \frac{\sin 2n\varepsilon}{2n\varepsilon}, \quad p'_{2n-1} = p''_n = q'_n = q''_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Розрахунок задач механіки про напружено-деформований стан цилінд- ра та шару та відповідних їм задач теплопровідності про знаходження тем- ператури дисипативного розігріву проведено при таких даних:

$$V = 8 \text{ м/с}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°C}), \quad \lambda = 0.15 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{°C}), \quad T_0 = 20 \text{°C}.$$

На рис. 1 для вказаних циліндрів наведено залежності  $\theta(\rho)$ , обчислені за формулами (23) при  $r_2 = 0.4 \text{ м}$ ,  $P = 4000 \text{ Н/м}$ ,  $\gamma = 1214 \text{ кг/м}^3$ ,  $\varepsilon = 0.05, 0.2, 0.5, 1 \text{ рад}$  (криві 1-4 відповідають значенням зовнішнього радіуса ци- ліндра  $r_1 = 0, 0.1, 0.2, 0.3 \text{ м}$ ).

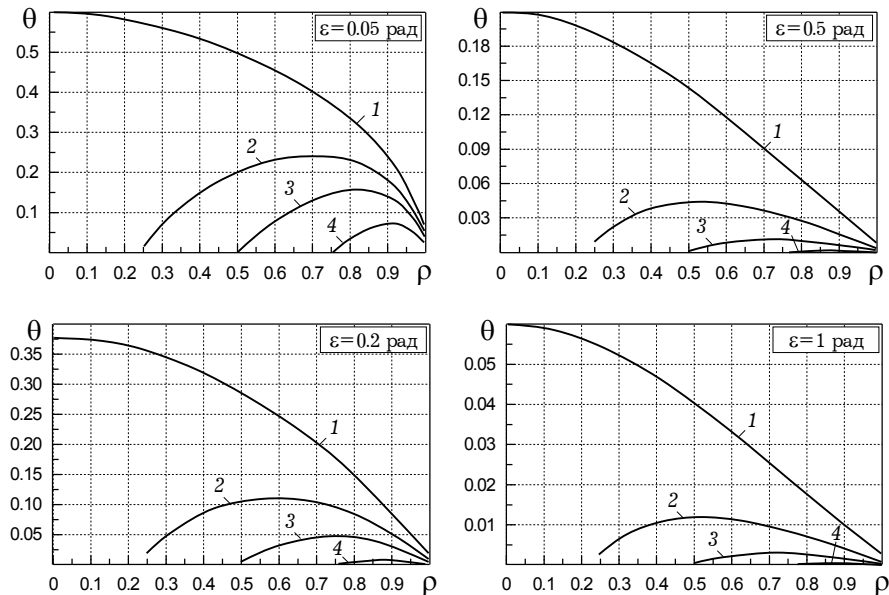


Рис. 1



Аналізуючи ці залежності, можна зробити наступні висновки. Товщина циліндра має суттєвий вплив на температуру: при збільшенні відносної товщини  $((r_2 - r_1)/r_2)$  зростає як середнє, так і максимальне значення температури; положення максимуму для суцільного циліндра розміщене у центрі циліндра і зі зменшенням товщини циліндра, а також ширини ділянки навантаження  $\varepsilon$  воно зміщується у напрямку до зовнішньої його границі. Характер зростання максимального та середнього значень температури залежить від ширини ділянки навантаження  $\varepsilon$ . На рис. 2 зображено залежність максимального значення температури циліндра від його відносної товщини  $r_1/r_2$  для  $\varepsilon = 0.02, 0.2$  рад. Бачимо, що  $\varepsilon$  впливає як кількісно (зменшення  $\varepsilon$  призводить до збільшення температури), так і якісно (змінюється напрямок опуклості кривої). Цей вплив найбільш відчутний для відносно тонких циліндрів (коли  $r_1/r_2$  близьке до одиниці). Аналогічні залежності для шару від його товщини  $h/r_2$  зображено на рис. 3.

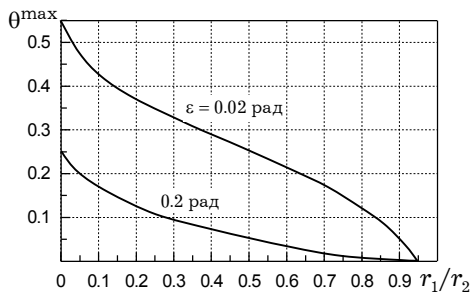


Рис. 2

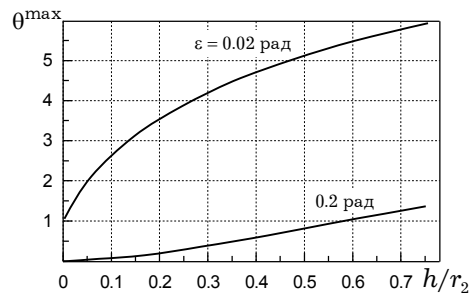


Рис. 3

Покажемо, що розв'язки відповідних задач для циліндра та шару прямують один до одного при зменшенні товщини до нуля. З цією метою було розраховано залежності температури від  $\eta$  ( $\rho = 1 - \zeta + \eta$ ) за формулами (23), (23') при тих самих даних, що й у попередньому випадку, за винятком того, що у цьому випадку приймали  $P = 20000$  Н/м,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $r_1/r_2 = 1/2, 7/8$ . Результати обчислень наведено на рис. 4 (криві 1 відповідають циліндру, криві 2 - шару).

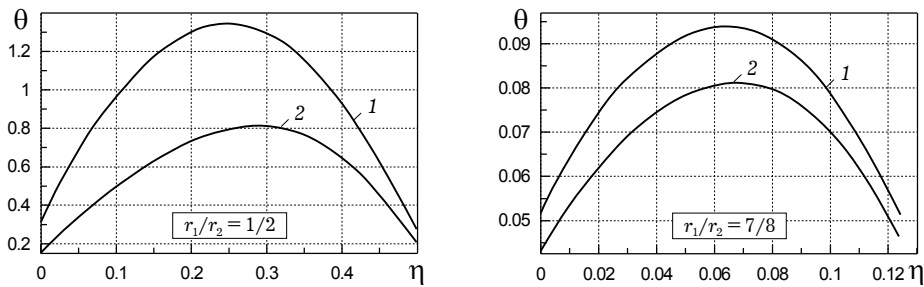


Рис. 4

З аналізу кривих, що відповідають циліндру та шару при різних значеннях величини  $r_1/r_2$ , можна зробити такі висновки. У відповідних задачах температура дисипативного розігріву циліндра є більшою, ніж температура шару. Для відносно тонких циліндра та шару відповідні криві є близькими як за формою (положення максимуму), так і в кількісному відношенні. Для малих  $r_1/r_2$  (шар і циліндр мають значну товщину) криві більш відрізняються і якісно, і кількісно.

Дослідимо вплив теплових граничних умов на температурне поле циліндра. З цією метою побудовано криві температурних полів циліндра для різних значень коефіцієнта теплообміну на внутрішній границі циліндра ( $\alpha_1$ ). На рис. 5 зображено ці криві для  $r_1/r_2 = 1/4$  та різних  $\alpha_1$  (криві 1–4 відповідають значенням  $\alpha_1 = 0, 5, 10, 100 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$ ).

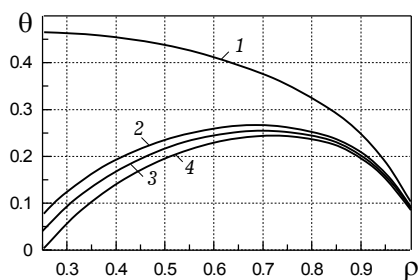


Рис. 5

Зазначимо, що температурне поле дисипативного розігріву як циліндра, так і шару пропорційне квадрату сумарної сили  $P$ . Ця обставина дозволяє легко отримати графік температурного поля циліндра або шару при будь-якому значенні  $P$ , знаючи температурне поле при якомусь іншому значенні  $P$ , але при однакових інших параметрах.

Із наведеного аналізу результатів можна зробити такі висновки. Достовірність отриманих результатів для циліндра та для шару підтверджується тим, що розв'язки відповідних задач для циліндра та шару прямують один до одного при зменшенні їх відносної товщини до нуля. З цього можна зробити такий висновок: усі твердження про термомеханічну поведінку циліндра та шару співпадають, коли їх відносна товщина є малою ( $(r_2 - r_1)/r_2 < 0.25$ ). Показано, що при збільшенні відносної товщини  $(r_2 - r_1)/r_2$  максимальне значення температури в циліндрі та шарі зростає. Характер зростання залежить від величини області навантаження  $[-\varepsilon, \varepsilon] \cup [\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon]$ . При цьому положення максимуму температури в циліндрі зміщується до його центра, що особливо помітно при розгляді досить товстих циліндрів ( $(r_2 - r_1)/r_2 > 0.75$ ). Для суцільного циліндра положення максимуму розташоване у його центрі. Що стосується шару, то положення максимуму по товщині шару не залежить від його товщини. На максимальне значення температурного поля і на положення максимуму впливає також і ширина області навантаження: при збільшенні цієї ширини максимальне значення температури спадає і положення максимуму зміщується до центра. При збільшенні  $\varepsilon$  поступово зменшується вплив цього параметра на положення максимуму і при значеннях  $\varepsilon$  порядку одиниці і більше цього впливу майже немає.

1. Карнаухов В. Г., Ревенко Ю. В. Диссипативный разогрев полого вязкоупругого цилиндра при установившемся движении по его поверхности нормальной нагрузки // Проблемы прочности. – 1999. – № 2. – С. 67–71.
2. Карнаухов В. Г., Ревенко Ю. В. Диссипативный разогрев сплошного вязкоупругого цилиндра при установившемся движении по его поверхности нормальной нагрузки // Прикл. механика. – 1998. – 34, № 6. – С. 39–44.
3. Карнаухов В. Г., Сенченков И. К., Гуменюк Б. П. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. – Киев: Наук. думка, 1985. – 288 с.
4. Матняк С. В. Качение жесткого цилиндра по полуплоскости с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 2002. – 38, № 4. – С. 77–86.
5. Матняк С. В. О качении жесткого цилиндра по полуплоскости с начальными напряжениями (потенциалы гармонического типа и Бартенева – Хазановича) // Прикл. механика. – 2003. – 39, № 3. – С. 81–87.
6. Матняк С. В. О распределении контактных напряжений в полосе с начальными напряжениями при качении жесткого цилиндра // Прикл. механика. – 2003. – 39, № 7. – С. 106–113.
7. Ревенко Ю. В. Диссипативный разогрев вязкоупругого цилиндра при его свободном качении по жесткому основанию // Тез. докл. Междунар. конф. «Dynamical systems modelling and stability investigation. Mechanical Systems» (Киев, 25–29 мая 1999 г.). – Киев, 1999. – С. 64.

## **ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ВЯЗКОУПРУГИХ ЦИЛИНДРА И СЛОЯ, ВЫЗВАННЫЙ УСТАНОВИВШИМСЯ ДВИЖЕНИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКИ ПО ИХ ПОВЕРХНОСТЯМ**

*Рассмотрена плоская квазистатическая задача о стационарных колебаниях и диссипативном разогреве вязкоупругих цилиндра и слоя при полигармоническом деформировании, вызванном установившимся движением произвольной нагрузки по их поверхностям. Получено аналитическое решение задачи в рамках линейной теории, когда свойства материала не зависят от температуры, а коэффициент Пуассона принят постоянной действительной величиной. На основании числовых результатов исследовано влияние основных факторов (геометрических характеристик, условий нагружения, тепловых граничных условий) на термомеханическое состояние указанных тел. Проведено сравнение числовых результатов, полученных в задаче для цилиндра, с аналогичными результатами для слоя.*

## **DISSIPATIVE HEATING OF VISCOELASTIC CYLINDER AND LAYER, CAUSED BY STEADY-STATE MOTION OF ARBITRARY SURFACE LOADINGS**

*The plane quasi-static problem about stationary oscillations and dissipative heating of viscoelastic cylinder and layer under polyharmonic deformation, caused by steady-state motion of arbitrary surface loadings, has been considered. Analytic solution of the problem has been obtained under the assumption that the material is linearly viscoelastic, its characteristics don't depend on temperature, and Poisson's ratio is real. Basing on the numerical results, influence of the main factors, such as body sizes, width of loading area, heat boundary conditions on thermomechanical behavior of the bodies has been investigated. Numerical results for the cylinder and layer have been compared.*

Ин-т механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України, Київ

Одержано  
22.03.04