

ЛІНЕАРИЗОВАНА ЗАДАЧА ПРО РУЙНУВАННЯ НАПІВСКІНЧЕНОГО ПРУЖНОГО МАТЕРІАЛУ З ПОТЕНЦІАЛОМ ГАРМОНІЧНОГО ТИПУ

У рамках тривимірної лінеаризованої механіки деформівного твердого тіла здійснено аналіз двох неklasичних механізмів руйнування – руйнування матеріалу при стисненні вздовж тріщини та руйнування тіла з початковими напруженнями – для випадку приповерхневої кругової тріщини в напівскінченному тілі. Для матеріалу з пружним потенціалом гармонічного типу отримано критичні параметри стиску, що відповідають локальній втраті стійкості матеріалу в околі тріщини, а також вирази коефіцієнтів інтенсивності напружень для випадку тріщини радіального зсуву (Mode II) та досліджено їх залежність від початкових напружень.

1. Вступ. Як відомо, методами лінійної механіки руйнування не можна адекватно описати вплив на параметри руйнування складових навантаження, спрямованих уздовж площин тріщин. Це пов'язано з тим, що з розв'язку відповідних задач лінійної теорії пружності випливає, що зазначені складові навантаження не входять у вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень і величини розкриття тріщин, а тому не враховуються у класичних критеріях руйнування типу Гріффітса – Ірвіна чи критичного розкриття тріщин.

Для дослідження задач про стиснення матеріалів зусиллями, що діють уздовж тріщин, і для вивчення закономірностей впливу початкових (або залишкових) напружень на напружено-деформований стан матеріалів із тріщинами в роботах [2, 3, 6] запропоновано підходи в рамках тривимірної лінеаризованої механіки деформівного твердого тіла. Із використанням зазначених підходів отримано розв'язки окремих класів статичних і динамічних задач, переважно для ізольованих тріщин у нескінченних тілах (стислий огляд зазначених робіт наведено в [2–7]).

У пропонованій роботі для випадку приповерхневої кругової тріщини в напівскінченному стисливому пружному тілі здійснено розгляд двох неklasичних механізмів руйнування: руйнування матеріалу при стисненні вздовж тріщини та руйнування тіла з початковими напруженнями (слід зазначити, що детальне обґрунтування доцільності такого об'єднаного підходу наведено в [1]). Отримано критичні параметри стиску, що відповідають локальній втраті стійкості матеріалу в околі тріщини, а також вирази коефіцієнтів інтенсивності напружень для випадку тріщини радіального зсуву (Mode II) та досліджено їх залежність від початкових напружень. Числові результати наведено для матеріалу з пружним потенціалом гармонічного типу, який широко використовується у дослідженнях при моделюванні пружних стисливих матеріалів.

2. Постановка задачі. Будемо використовувати лагранжеві координати x_j , $j = 1, 2, 3$, які в недеформованому стані збігаються з декартовими. Всі величини, що відносяться до початкового стану, будемо позначати індексом «0». Окрім того, будемо використовувати такі позначення: S_{jj} – компоненти симетричного тензора напружень, що віднесені до одиниці площі тіла в недеформованому стані; u_j^0 – компоненти вектора переміщень, що відповідають початковим напруженням S_{ij}^0 ; t_{ij} – компоненти несиметричного тензора напружень Кірхгофа.

Тріщина радіуса a розміщена у верхньому півпросторі $x_3 \geq -h$ у площині $x_3 = 0$ з центром на осі Ox_3 . Початкові (залишкові) напруження, що

діють у площині Ox_1x_2 , реалізують однорідний початковий стан вигляду

$$\begin{aligned} S_{33}^0 &= 0, & S_{11}^0 &= S_{22}^0 = \text{const}, \\ u_m^0 &= \delta_{jm}(\lambda_j - 1)x_j, & \lambda_j &= \text{const}, & \lambda_1 &= \lambda_2, \end{aligned} \quad (1)$$

де λ_j – коефіцієнти подовження (скорочення) вздовж осей x_j .

Лінеаризовані рівняння рівноваги в збуреннях для стисливих тіл мають вигляд [6, 7]

$$\omega_{im\alpha\beta} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_i \partial x_\beta} = 0. \quad (2)$$

Вираз для збурень несиметричного тензора напружень Кірхгофа є таким:

$$\begin{aligned} t_{ij} &= \omega_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}, \\ \omega_{ij\alpha\beta} &= \lambda_\alpha \lambda_j [\delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} a_{i\beta} + (1 - \delta_{ij})(\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}) \mu_{ij}] + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha} S_{\beta\beta}^0, \end{aligned} \quad (3)$$

де величини a_{ij} , μ_{ij} залежать від параметрів навантаження і від визначальних рівнянь матеріалу [6].

Граничні умови на берегах тріщини мають вигляд

– для задачі про матеріал з початковими напруженнями:

$$t_{33} = 0, \quad t_{3r} = -\tau(r), \quad x_3 = \pm 0, \quad 0 \leq r < a; \quad (4)$$

– для задачі про стиснення матеріалу вздовж тріщини:

$$t_{33} = 0, \quad t_{3r} = 0, \quad x_3 = \pm 0, \quad 0 \leq r < a, \quad (5)$$

де r, θ, x_3 – кругові циліндричні координати, які отримуються з декартових.

Границя півпростору вільна від напружень:

$$t_{33} = 0, \quad t_{3r} = 0, \quad x_3 = -h, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (6)$$

2.1. Потенціальні функції. У роботах [2, 3] побудовано загальні розв'язки диференціальних рівнянь із частинними похідними (2) через потенціальні функції, вигляд яких залежить від коренів n_1 і n_2 відповідного характеристичного рівняння. Для осесиметричної задачі переміщення і напруження для випадку рівних коренів характеристичного рівняння ($n_1 = n_2$) мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} - z_1 \frac{\partial F}{\partial r}, \\ u_3 &= n_1^{-1/2} (m_1 - m_2 - 1)F - m_1 n_1^{-1/2} \Phi - m_1 n_1^{-1/2} z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1}, \\ t_{33} &= C_{44} \left[(d_1 l_1 - d_2 l_2) \frac{\partial F}{\partial z_1} - d_1 l_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - d_1 l_1 z_1 \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} \right], \\ t_{3r} &= C_{44} n_1^{-1/2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ [(d_1 - d_2)F - d_1 \Phi] - d_1 z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

де $z_i \equiv n_i^{-1/2} x_3$, $i = 1, 2$.

У рівностях (7) потенціальні функції $\varphi(r, z_1)$, $\Phi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}$, $F(r, z_1)$ є гармонічними функціями своїх аргументів. Величини C_{44} , m_i , l_i , n_i , d_i , $i = 1, 2$,

залежать від початкових напружень і моделі матеріалу; для пружного потенціалу гармонічного типу їхні значення наведено в п. 5.

2.2. Умови неперервності. Розділимо умовно тіло на дві області: «1» – півпростір $x_3 \geq 0$ та «2» – шар $-h \leq x \leq 0$. На границі цих областей поза тріщиною переміщення і напруження мають бути неперервними, тобто

$$\begin{aligned} u_3^{(1)} &= u_3^{(2)}, & u_2^{(1)} &= u_2^{(2)}, & x_3 &= 0, & r &> a, \\ t_{33}^{(1)} &= t_{33}^{(2)}, & t_{3r}^{(1)} &= t_{3r}^{(2)}, & x_3 &= 0, & r &> a. \end{aligned} \quad (8)$$

Тоді з граничних умов (4)–(6) та умов неперервності (8) отримуємо формулювання задачі у вигляді (для задачі про матеріал з початковими напруженнями):

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, \quad x_3 = 0, \quad r > a, \quad (9)$$

$$t_{33}^{(1)} = t_{33}^{(2)}, \quad t_{3r}^{(1)} = t_{3r}^{(2)}, \quad x_3 = 0, \quad 0 \leq r \leq \infty, \quad (10)$$

$$t_{33}^{(2)} = 0, \quad t_{3r}^{(2)} = 0, \quad x_3 = -h, \quad 0 \leq r < \infty, \quad (11)$$

$$t_{33}^{(2)} = 0, \quad t_{3r}^{(2)} = -\tau(r), \quad x_3 = 0, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (12)$$

Для задачі про стиск матеріалу вздовж тріщини замість (12) маємо умову

$$t_{33}^{(2)} = 0, \quad t_{3r}^{(2)} = 0, \quad x_3 = 0, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (13)$$

3. Отримання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Далі зведемо задачу до системи парних інтегральних рівнянь, а потім – до системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Детальні викладки будемо виконувати для задачі про руйнування матеріалу з початковими напруженнями, що відповідають тріщині радіального зсуву; для переходу до відповідних співвідношень для задачі про стиснення тіла вздовж тріщини достатньо буде покласти $\tau(r) \equiv 0$.

Виразимо гармонічні функції, що фігурують у зображеннях загальних розв'язків (7), у кожній із областей «1» та «2» у вигляді інтегральних розкладів Ганкеля нульового порядку за координатою r :

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(r, z_1) &= - \int_0^\infty B(\lambda) e^{-\lambda z_1} J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ F^{(1)}(r, z_1) &= \int_0^\infty A(\lambda) e^{-\lambda z_1} J_0(\lambda r) d\lambda, \\ \Phi^{(1)}(r, z_1) &= \int_0^\infty B(\lambda) e^{-\lambda z_1} J_0(\lambda r) d\lambda, \\ \varphi^{(2)}(r, z_1) &= \int_0^\infty [D_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(z_1 + h_1) + D_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(z_1 + h_1)] J_0(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_1}, \\ F^{(2)}(r, z_1) &= \int_0^\infty [C_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(z_1 + h_1) + C_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(z_1 + h_1)] J_0(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\operatorname{sh} \lambda h_1}, \\ \Phi^{(2)}(r, z_1) &= \int_0^\infty [D_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(z_1 + h_1) + D_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(z_1 + h_1)] J_0(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\operatorname{sh} \lambda h_1}, \end{aligned} \quad (14)$$

де $h_i = h n_i^{-1/2}$, $i = 1, 2$.

Умови (10), (11), задані на всій області $x_3 = \text{const}$, дозволяють виразити невідомі $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $D_j(\lambda)$ через функції $C_j(\lambda)$, $j = 1, 2$. Із умов (9), (12)

отримуємо систему парних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [(k - \mu_1 \operatorname{cth} \mu_1) C_1(\lambda) - \mu_1 C_2(\lambda)] J_0(\lambda r) \lambda d\lambda &= 0, \quad r < a, \\ \int_0^{\infty} [\mu_1 C_1(\lambda) + (k + \operatorname{cth} \mu_1) C_2(\lambda)] J_1(\lambda r) \lambda d\lambda &= -\frac{\tau(r)}{C_{44} n_1^{-1/2} d_1}, \quad r < a, \\ \int_0^{\infty} X_1 J_0(\lambda r) d\lambda &= 0, \quad r > a, \quad \int_0^{\infty} X_2 J_1(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > a, \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv \left[\left(1 - \frac{\mu_1}{k} \right) C_1(\lambda) - \frac{\mu_1}{k} C_2(\lambda) \right] (1 + \operatorname{cth} \mu_1), \\ X_2 &\equiv \left[\frac{\mu_1}{k} C_1(\lambda) + \left(1 + \frac{\mu_1}{k} \right) C_2(\lambda) \right] (1 + \operatorname{cth} \mu_1), \\ \mu_1 &= \lambda h_1, \quad k = \frac{d_2(l_1 - l_2)}{d_1 l_1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Виберемо розв'язок парних інтегральних рівнянь (15) у формі

$$X_1 = \int_0^a \varphi(t) \sin \lambda t dt, \quad X_2 = \sqrt{\frac{\pi \lambda}{2}} \int_0^a \sqrt{t} \psi(t) J_{3/2}(\lambda t) dt, \quad (17)$$

де $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – невідомі функції, неперервні разом з їхніми похідними на інтервалі $[0, a]$. При цьому третє і четверте з рівнянь (15) тотожно задовольняються, а з першого та другого після деяких перетворень (детальніше див. у [9]) отримуємо два інтегральні рівняння Фредгольма другого роду, які після введення безрозмірних змінних і функцій мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} f(\xi) + \frac{4}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) \mathcal{K}_{11}(\xi, \eta) d\eta - \frac{4}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) \mathcal{K}_{12}(\xi, \eta) d\eta &= 0, \\ g(\xi) + \frac{4}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) \mathcal{K}_{21}(\xi, \eta) d\eta - \frac{4}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) \mathcal{K}_{22}(\xi, \eta) d\eta &= -\frac{4}{\pi k} \xi \int_0^{\pi/2} q'(\xi \sin \theta) d\theta, \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$f(\xi) \equiv a^{-1} \varphi(a\xi), \quad g(\xi) \equiv a^{-1} \frac{d}{d\xi} [\xi \psi(a\xi)], \quad q(\xi) \equiv \frac{\xi p(\xi)}{C_{44} n_1^{-1/2} d_1}, \quad p(\xi) \equiv \tau(a\xi).$$

Ядра інтегральних рівнянь (18) мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{11}(\xi, \eta) &= - \left[\frac{k}{2} I_1(2\beta_1, \eta) + \beta_1 I_2(2\beta_1, \eta) + \frac{\beta_1^2}{k} I_3(2\beta_1, \eta) \right], \\ \mathcal{K}_{12}(\xi, \eta) &= \frac{\beta_1^2}{k} [\eta^{-1} I_2(2\beta_1, \eta) - I_2(2\beta_1, 1)], \quad \mathcal{K}_{21}(\xi, \eta) = -\frac{\beta_1^2}{k} \xi I_4(2\beta_1, \eta), \\ \mathcal{K}_{22}(\xi, \eta) &= \xi \left\{ \frac{k}{2} [\eta^{-1} I_1(2\beta_1, \eta) - I_1(2\beta_1, 1)] - \beta_1 [\eta^{-1} I_2(2\beta_1, \eta) - I_2(2\beta_1, 1)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_1^2}{k} [\eta^{-1} I_3(2\beta_1, \eta) - I_3(2\beta_1, 1)] \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

У виразах для ядер (19) введено такі позначення:

$$I_1(\beta, \eta) = \frac{\beta}{2\xi\eta(\xi^2 - 1)}, \quad I_2(\beta, \eta) = I_1(\beta, \eta) \left[4\xi I_1(\beta, \eta) - \frac{1}{\beta} \right],$$

$$I_3(\beta, \eta) = 4I_1^2(\beta, \eta) \left[2(3\zeta^2 + 1)I_1(\beta, \eta) - \frac{3\zeta}{\beta} \right],$$

$$I_4(\beta, \eta) = 12I_1^2(\beta, \eta) \left[16\zeta(\zeta^2 + 1)I_1^2(\beta, \eta) - \frac{4}{\beta}(3\zeta^2 + 1)I_1(\beta, \eta) + \frac{\zeta}{\beta^2} \right],$$

де $\zeta = \frac{\beta^2 + \xi^2 + \eta^2}{2\xi\eta}$, $\beta = ha^{-1}$, $\beta_1 = \beta n_1^{-1/2}$.

У випадку задачі про стиснення матеріалу вздовж тріщини розв'язувальна система інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду має вигляд

$$f(\xi) + \frac{4}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) \mathcal{K}_{11}(\xi, \eta) d\eta - \frac{4}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) \mathcal{K}_{12}(\xi, \eta) d\eta = 0,$$

$$g(\xi) + \frac{4}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) \mathcal{K}_{21}(\xi, \eta) d\eta - \frac{4}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) \mathcal{K}_{22}(\xi, \eta) d\eta = 0, \quad (20)$$

де ядра визначаються за формулами (19).

Таким чином, початкова лінеаризована задача про стиснення напівскінченного тіла вздовж кругової тріщини зводиться до задачі на власні значення відносно параметра початкового скорочення $\lambda_1 < 1$ для системи однорідних інтегральних рівнянь (20) (при цьому параметр λ_1 складним нелінійним чином входить у ядра інтегральних рівнянь). Ця задача на власні значення досліджується чисельно методом Бубнова – Гальоркіна (див. п. 5).

Слід зазначити, що ядра інтегральних рівнянь (19) неперервні всюди, за винятком значень λ_1 , що задовольняють умову

$$k(\lambda_1) = 0, \quad (21)$$

де k визначається з (16). Відомо [3], що співвідношення (21) визначає критичні значення λ_1^* в осесиметричній задачі про стиснення нескінченного тіла з тріщиною. З фізичних міркувань випливає, що критичні значення параметрів навантаження для півпростору з приповерхневою тріщиною мають бути меншими від відповідних величин для простору з тріщиною. Тому критичні значення λ_1 треба шукати в межах $\lambda_1^* < \lambda_1 < 1$, де ядра інтегральних рівнянь є неперервними.

4. Коефіцієнти інтенсивності напружень. Аналогічно до того, як прийнято в лінійній механіці руйнування, коефіцієнти інтенсивності напружень у лінеаризованій задачі про руйнування тіла з початковими напруженнями будемо визначати як коефіцієнти при особливостях у компонентах напружень біля краю тріщини, тобто

$$K_I = \lim_{r \rightarrow +a} [2\pi(r-a)]^{-1/2} t_{33}(r, 0),$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow +a} [2\pi(r-a)]^{-1/2} t_{3r}(r, 0). \quad (22)$$

Визначивши з розв'язку інтегральних рівнянь (18) функції $f(\xi)$ та $g(\xi)$ (і відповідно $\varphi(x)$ та $\psi(x)$), з (17), (15), (14) і (7) отримаємо вирази для напружень і переміщень у задачі про руйнування матеріалу з початковими напруженнями, підставивши які в (22), отримуємо вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень

$$K_I = -C_{44} d_1 l_1 \frac{k}{2} \sqrt{\pi a} f(1), \quad K_{II} = -C_{44} n_1^{-1/2} d_1 \frac{k}{2} \sqrt{\pi a} \int_0^1 g(\xi) d\xi. \quad (23)$$

Як бачимо, наявність вільної поверхні призводить до ненульового значення K_I у задачі про тріщину радіального зсуву. Крім того, обидва

коефіцієнти інтенсивності напружень K_I і K_{II} залежать від початкових напружень $S_{11}^0 = S_{22}^0$ (або подовжень $\lambda_1 = \lambda_2$) і відстані між тріщиною та границею півпростору h (або β), оскільки розв'язки $f(\xi)$ і $g(\xi)$ рівнянь (18) залежать від зазначених параметрів.

Покажемо, що в граничному випадку розміщення тріщини в тілі, коли відстань від тріщини до вільної поверхні прямує до нескінченності, отримані вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень (23) точно переходять у відповідні вирази для K_I і K_{II} , які було отримано в задачі про тріщину радіального зсуву в нескінченному матеріалі [2].

З виразів (19) для ядер випливає, що при $h \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow \infty$) всі ядра прямують до нуля:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathcal{K}_{ij}(\xi, \eta) = 0, \quad i, j = 1, 2.$$

Тоді з (18) маємо граничні значення для функцій f і g :

$$f^\infty(\xi) = 0, \quad g^\infty(\xi) = -\frac{4}{\pi k} \xi \int_0^\pi q'(\xi \sin \theta) d\theta. \quad (24)$$

Враховуючи, що

$$\xi \int_0^{\pi/2} q'(\xi \sin \theta) d\theta = \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{\eta q(\eta)}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} d\eta,$$

з (24) і (23) отримуємо

$$K_I^\infty = 0, \quad K_{II}^\infty = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^1 \frac{\eta^2 p(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}} d\eta = \frac{2}{a\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{t^2 \tau(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt, \quad (25)$$

що повністю збігається (при прийнятих позначеннях) зі значеннями коефіцієнтів інтенсивності напружень, отриманими в задачі про тріщину радіального зсуву в нескінченному матеріалі [2].

Зокрема, для випадку рівномірного зсувного навантаження на берегах тріщини $\tau(r) = p = \text{const}$ з (25) отримуємо, що $K_{II}^\infty = \frac{p}{2} \sqrt{\pi a}$.

5. Числові результати. Розглянемо як приклад стисливий матеріал, що моделюється пружним потенціалом гармонічного типу [8]. Цей потенціал характеризується двома сталими λ і μ (або E та ν за аналогією з класичною лінійною теорією пружності):

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda s_1^2 + \mu s_2 = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left(\frac{\nu}{1 - 2\nu} s_1^2 + s_2 \right),$$

де $s_i = \sum_{n=1}^3 (\lambda_n - 1)^i$, і відповідає випадку рівних коренів характеристичного рівняння. Параметри, що входять до виразів (7), (16), для зазначеного потенціалу визначаються наступним чином:

$$\lambda_3 = 1 - 2\nu(1 - \nu)^{-1}(\lambda_1 - 1), \quad n_1 = n_2 = 1, \quad m_1 = 1,$$

$$m_2 = 1 - 2(1 - 2\nu)\lambda_1 [\nu\lambda_1 + (1 - \nu)\lambda_3]^{-1}, \quad l_1 = 1,$$

$$l_2 = \frac{1}{2} [\lambda_1(3\nu - 2) + \lambda_3(1 - \nu)] \nu^{-1} \lambda_1^{-1}, \quad d_1 = 1 + \lambda_1 \lambda_3^{-1},$$

$$d_2 = 2\lambda_1 \lambda_3^{-1} - 2(1 - 2\nu)\lambda_1 [\nu\lambda_1 + (1 - \nu)\lambda_3]^{-1}, \quad S_{11}^0 = \frac{E}{1 + \nu} (\lambda_1 - \lambda_3) \lambda_1^{-1},$$

$$C_{44} = \frac{E}{1+\nu} \lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_3)^{-1}, \quad k = [(2-\nu)\lambda_1 - (1-\nu)\lambda_3] [\nu\lambda_1 + (1-\nu)\lambda_3]^{-1},$$

$$\beta_1 = \beta, \quad \lambda_1^* = (1+\nu)(2+\nu)^{-1}.$$

Для числового дослідження систем інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду (18), (20) застосовуємо метод Бубнова – Гальоркіна, числове інтегрування здійснюємо за квадратурними формулами Гаусса. Як початкове напруження розглянуто рівномірне зсувне навантаження $\tau(r) = \text{const}$.

У табл. 1 наведено значення критичних параметрів скорочення λ_1 для різних значень безрозмірної відстані між тріщиною і границею півпростору β і коефіцієнта Пуассона ν , що характеризує стисливість матеріалу. При достатньо великих значеннях β отримуємо значення λ_1 , що збігаються з критичними значеннями $\lambda_1^* = (1+\nu)(2+\nu)^{-1}$, отриманими в осесиметричній задачі про тріщину в нескінченному матеріалі [3].

Таблиця 1

ν	β										
	0.125	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	2.0	3.0	10.0	∞
0.1	0.985	0.951	0.864	0.787	0.728	0.686	0.655	0.615	0.576	0.533	0.524
0.2	0.986	0.955	0.874	0.801	0.745	0.704	0.674	0.635	0.597	0.554	0.545
0.3	0.987	0.958	0.882	0.813	0.760	0.721	0.692	0.654	0.616	0.574	0.565
0.4	0.988	0.961	0.890	0.824	0.773	0.735	0.707	0.670	0.634	0.584	0.583
0.5	0.989	0.963	0.896	0.834	0.785	0.749	0.721	0.685	0.649	0.609	0.600

Таблиця 2

ν	λ_1	β								
		0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	2.0	3.0	10.0
0.1	0.85	-	-	1.304	1.098	1.044	1.022	1.007	1.001	1.000
	0.90	-	1.657	1.148	1.061	1.029	1.015	1.005	1.001	1.000
	1.00	1.342	1.134	1.061	1.030	1.015	1.008	1.003	1.001	1.000
	1.05	1.172	1.088	1.044	1.023	1.012	1.006	1.002	1.000	1.000
	1.50	-	1.024	1.010	1.022	1.003	1.001	1.000	1.000	1.000
	2.00	-	1.023	1.008	1.003	1.001	1.001	1.000	1.000	1.000
0.3	0.85	-	-	1.504	1.129	1.054	1.027	1.008	1.001	1.000
	0.90	-	2.246	1.180	1.070	1.033	1.017	1.005	1.001	1.000
	1.00	1.342	1.134	1.061	1.030	1.015	1.008	1.003	1.001	1.000
	1.05	1.158	1.083	1.042	1.021	1.011	1.006	1.002	1.000	1.000
	1.50	-	1.023	1.009	1.004	1.002	1.000	1.000	1.000	1.000
	2.00	-	-	1.008	1.003	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.5	0.85	-	-	2.132	1.174	1.068	1.032	1.010	1.002	1.000
	0.90	-	6.770	1.224	1.081	1.037	1.019	1.006	1.001	1.000
	1.00	1.342	1.134	1.061	1.030	1.015	1.008	1.003	1.001	1.000
	1.05	1.147	1.077	1.040	1.020	1.011	1.006	1.002	1.000	1.000
	1.50	-	-	-	-	1.002	1.001	1.000	1.000	1.000
	2.00	-	-	-	-	1.001	1.000	1.000	1.000	1.000

У табл. 2 і 3 відповідно наведено значення співвідношень коефіцієнтів інтенсивності напружень K_{II} / K_{II}^∞ і K_I / K_{II}^∞ . Крім того, для значень $\beta = 0.5, 0.75, 1.0, 1.25$ і величини $\nu = 0.3$ на рис. 1 і 2 відповідно наведено залежності співвідношень коефіцієнтів інтенсивності напружень K_{II} / K_{II}^∞ і K_I / K_{II}^∞ від параметра початкового подовження (скорочення) λ_1 ($\lambda_1 > 1$ – для розтягу, $\lambda_1 < 1$ – для стиснення). Як видно з рисунків, криві мають вертикальні асимптоти, що відповідають значенням критичних параметрів скорочення, які отримуються в задачі про стиснення матеріалу з тріщиною (див. табл. 1).

Таблиця 3

ν	λ_1	β								
		0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	2.0	3.0	10.0
0.1	0.85	-	-	0.393	0.445	0.074	0.043	0.017	0.004	0.000
	0.90	-	0.749	0.186	0.090	0.051	0.030	0.013	0.003	0.000
	1.00	0.261	0.133	0.077	0.046	0.028	0.018	0.008	0.002	0.000
	1.05	0.080	0.074	0.056	0.035	0.022	0.014	0.006	0.001	0.000
	1.50	-	0.018	0.011	0.006	0.005	0.003	0.002	0.001	0.000
	2.00	-	0.003	0.003	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
0.3	0.85	-	-	0.665	0.190	0.0092	0.052	0.021	0.005	0.000
	0.90	-	1.465	0.228	0.103	0.057	0.034	0.014	0.003	0.000
	1.00	0.261	0.133	0.0077	0.046	0.028	0.018	0.008	0.002	0.000
	1.05	0.066	-	0.053	0.034	0.021	0.013	0.006	0.002	0.000
	1.50	-	0.007	0.007	0.006	0.004	0.003	0.001	0.000	0.000
	2.00	-	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
0.5	0.85	-	-	1.537	0.259	0.115	0.063	0.024	0.006	0.000
	0.90	-	7.018	0.285	0.119	0.064	0.038	0.015	0.004	0.000
	1.00	0.261	0.133	0.077	0.046	0.028	0.018	0.008	0.002	0.000
	1.05	0.055	-	0.050	0.032	0.020	0.013	0.006	0.001	0.000
	1.50	-	-	-	-	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000
	2.00	-	-	-	-	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

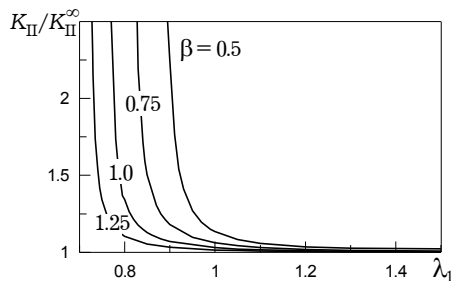


Рис. 1

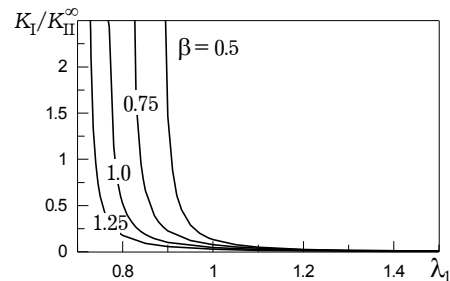


Рис. 2

6. Висновки. Виконаний у цій роботі аналіз двох некласичних механізмів руйнування (руйнування матеріалу при стисненні та руйнування тіла з початковими (або залишковими) напруженнями) для випадку задачі про приповерхневу кругову тріщину в стисливому пружному матеріалі дозволяє зробити наступні висновки:

- наявність вільної границі в тілі з початковими напруженнями, які відповідають тріщині радіального зсуву (Mode II), призводить до ненульових значень коефіцієнта інтенсивності напружень K_I ; у задачі про стиснення уздовж тріщини величина відстані між тріщиною і границею півпростору суттєво впливає на значення критичних параметрів навантаження. При цьому при прямуванні величини відносної відстані між тріщиною і границею півпростору β до нескінченності коефіцієнти інтенсивності напружень (у задачі про руйнування тіла з початковими напруженнями) та критичні параметри скорочення (у задачі про стиснення матеріалу) прямують до відповідних значень, отриманих для випадку ізольованої тріщини в нескінченному матеріалі;

- стисливість матеріалу, що характеризується коефіцієнтом Пуассона ν , досить суттєво впливає як на критичні значення параметра скорочення λ_1 (у задачі про стиснення тіла з тріщиною), так і на коефіцієнти інтенсивності напружень (у задачі про руйнування тіла з початковими напруженнями);

- при наближенні величин початкових напружень (у задачі про руйнування матеріалу з початковими напруженнями) до значень, що відповідають локальній втраті стійкості матеріалу в задачі про стиснення півпростору з тріщиною, спостерігається ефект різкого «резонансного» зростання значень коефіцієнтів інтенсивності напружень.

1. Богданов В. Л. Про тривимірні задачі лінеаризованої механіки руйнування // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / Під заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. М. Карпенка НАН України, 2004. – С. 193–200.
2. Гузь А. Н. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1991. – 288 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т., 5 кн. – Т. 2.)
3. Гузь А. Н., Дышель М. Ш., Назаренко В. М. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами. – К.: Наук. думка, 1992. – 456 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т., 5 кн. – Т. 4, кн. 1.)
4. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: А.С.К., 2004. – 672 с.
5. Guz A. N. On the development of brittle-fracture mechanics of materials with initial stress // Int. Appl. Mech. – 1996. – **32**, № 4. – P. 316–323.
Те саме: Гузь А. Н. О создании механики хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1996. – **32**, № 4. – С. 88–96.
6. Guz A. N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – Berlin: Springer-Verlag, 1999. – 555 p.
7. Guz A. N. On construction of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, № 1. – P. 3–44.
Те саме: Гузь А. Н. О построении трехмерной теории устойчивости деформируемых тел // Прикл. механика. – 2001. – **37**, № 1. – С. 3–44.
8. John F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // Commun. Pure and Appl. Math. – 1960. – **13**, No. 2. – P. 239–296.
9. Nazarenko V. M., Bogdanov V. L., Altenbach H. Influence of initial stress on fracture of a halfspace containing a penny-shaped crack under radial shear // Int. J. Fract. – 2000. – **104**. – P. 275–289.

ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ЗАДАЧА О РАЗРУШЕНИИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО УПРУГОГО МАТЕРИАЛА С ПОТЕНЦИАЛОМ ГАРМОНИЧЕСКОГО ТИПА

В рамках трехмерной линейаризованной механики деформируемого твердого тела выполнен анализ двух неклассических механизмов разрушения – разрушения материала при сжатии вдоль трещины и разрушения тела с начальными напряжениями – для случая приповерхностной круговой трещины в полубесконечном теле. Для материала с упругим потенциалом гармонического типа получены критические параметры сжатия, соответствующие локальной потере устойчивости материала в окрестности трещины, а также выражения коэффициентов интенсивности напряжений для случая трещины радиального сдвига (Mode II) и исследована их зависимость от начальных напряжений.

LINEARIZED PROBLEM ON FRACTURE OF SEMI-INFINITE ELASTIC MATERIAL WITH HARMONIC-TYPE POTENTIAL

In this paper, the problem for a near-the-surface circular crack in a semi-infinite elastic solid is considered within the framework of the three-dimensional linearized mechanics of deformable bodies. The analysis involves two non-classical mechanisms of fracture, namely, fracture of materials under compression along the cracks and fracture of solids with initial stresses. The critical parameters of compression corresponding to the local stability loss are obtained for material with harmonic-type elastic potential. For a crack under radial shear (Mode II) the representations of the stress intensity factors are obtained. The dependences of these stress intensity factors on the initial stresses are investigated.

Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
21.01.05