УДК 539.3

І. В. Харун, С. В. Козінов

ВЗАЄМОДІЯ МІЖФАЗНИХ ТРІЩИН ІЗ ЗОНАМИ КОНТАКТУ В АНІЗОТРОПНОМУ БІМАТЕРІАЛІ У ПОЛІ РОЗТЯГУ ТА ЗСУВУ

Методами теорії функцій комплексної змінної побудовано замкнений розв'язок плоскої задачі пружності для нескінченної анізотропної біматеріальної площини або простору із системою міжфазних тріщин при наявності малих зон гладкого контакту берегів біля вершин тріщин. На основі числового аналізу одержаного розв'язку, проведеного для випадку двох тріщин, досліджено залежності величин зон контакту та коефіцієнтів інтенсивності напружень від розмірів тріщин і відстані між ними.

Вступ. Уперше «контактна» модель міжфазної тріщини, в якій враховується контакт берегів біля вершин тріщини, запропонована в роботі [14] з метою ліквідувати осцилюючі особливості в полях напружень і переміщень, що виникають у привершинних зонах тріщини при розв'язанні задачі в рамках моделі тріщини з повністю відкритими берегами. У багатьох роботах задачі для міжфазних тріщин з урахуванням зон контакту зводили до інтегральних рівнянь, які розв'язували чисельно. Та у зв'язку з невизначеністю величин контактних областей чисельний аналіз суттєво ускладнюється. Тому були прийняті спроби одержати аналітичні розв'язки зазначених задач. Перший аналітичний розв'язок для тріщини в нескінченній ізотропній біматеріальній площині з урахуванням тільки однієї зони гладкого контакту при навантаженні розтягу та зсуву одержано в [10], де також виведено трансцендентне рівняння для визначення довжини зони. У роботі [15] одержано досить громіздкий аналітичний розв'язок аналогічної задачі з урахуванням двох зон контакту. Замкнені розв'язки плоских задач для тріщини з однією зоною гладкого контакту в біматеріалі з анізотропними та п'єзоелектричними властивостями побудовано в роботах [16, 17]. Аналітичні розв'язки плоскої задачі для тріщини з фрикційним контактом берегів одержано в роботах [1, 8]. Осесиметричну задачу для дископодібної тріщини з кільцевою областю контакту розв'язано в [9], а для розрізу по сферичній поверхні – в [12, 13]. Плоскі задачі для систем міжфазних тріщин з гладкими зонами контакту в ізотропному та анізотропному біматеріалах розв'язано в роботах [4, 18, 19], де виведено системи трансцендентних рівнянь для обчислення довжин зон контакту. Причому в роботі [4] як навантаження задавали зосереджені сили, прикладені в довільних точках біматеріалу. Замкнені розв'язки також побудовано і для стаціонарних динамічних плоских контактних задач для міжфазних тріщин [7, 11]. Утім, незважаючи на значну кількість робіт, взаємодія кількох міжфазних тріщин у рамках «контактної» моделі не досліджувалася.

У пропонованій роботі побудовано ефективний алгоритм для обчислення відносних довжин зон контакту та коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) для довільної системи міжфазних тріщин із зонами гладкого контакту. Отриманий алгоритм дозволив дослідити вплив довжин тріщин і їхнього взаємного розміщення на КІН, а також на довжини зон контакту.

Постановка задачі. Загальний аналітичний розв'язок. Розглянемо систему тріщин, розміщених між різнорідними анізотропними півплощинами (півпросторами). Коефіцієнти пружності «верхньої» і «нижньої» півплощин будемо позначати через $s_{ij}^{(1)}$ і $s_{ij}^{(2)}$ відповідно. Під дією однорідних зусиль розтягу σ і зсуву τ, прикладених на нескінченності, тріщини розкриваються, проте, як відомо [14], біля вершин має місце контакт берегів. Відомо, що зони контакту поблизу вершин міжфазної тріщини, як правило, є дуже малими, і, як показано у [8], одна з зон контакту не здійснює значного

впливу на довжину іншої зони та відповідний КІН. Найбільша похибка при визначенні довжини зони контакту та відповідного КІН, що виникає при нехтуванні іншою зоною контакту, сягає 18%. Ця похибка має місце у випадку, коли один із матеріалів є абсолютно жорстким і $\tau \gg \sigma$. Отже, для визначення КІН у певній вершині тріщини будемо брати до уваги тільки ту зону контакту, що розміщена поблизу цієї вершини. Це припущення значно спрощує дослідження КІН для довільної системи тріщин, що буде показано нижче.

Введемо такі позначення: точку змикання берегів тріщини позначимо через b, точку між жорстким зчепленням і зоною контакту – через a, між жорстким зчепленням і відкритою ділянкою – через d, інші вершини тріщини позначимо через c_j (рис. 1). Крім того, сукупність відкритих ділянок позначимо через $\mathcal{M}$, зону контакту – через $\mathcal{L}$, ділянки жорсткого зчеплення – через $\mathcal{U}$. Вважаючи зони контакту гладкими, а відкриті частини тріщин ненавантаженими та вводячи вектори напруження $\mathbf{t} = \{\sigma_{12}, \sigma_{22}\}$ і переміщення $\mathbf{u} = \{u_1, u_2\}$, умови спряження і граничні умови для збурених тріщинами механічних полів у декартових координатах x, y (рис. 1) запишемо у вигляді

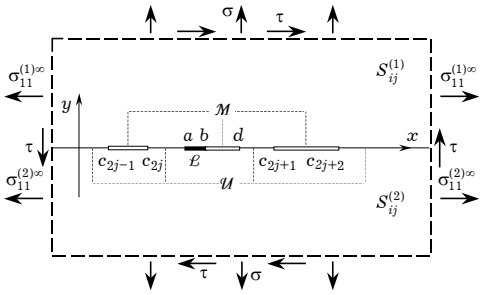

Рис. 1

$$[\mathbf{t}(x)] = 0, \qquad x \in \mathcal{L} + \mathcal{M} + \mathcal{U}, \qquad [\mathbf{u}(x)] = 0, \qquad x \in \mathcal{U}, \tag{1}$$

$$\sigma_{12}^{(1)}(x,0) = -\tau, \quad [u_2(x)] = 0, \qquad x \in \mathcal{L},$$

$$\mathbf{t}^{(1)}(x,0) = -\mathbf{t}^{\infty}, \qquad x \in \mathcal{M}, \tag{2}$$

де $\mathbf{t}^{\infty} = \{\tau, \sigma\}$; $\sigma_{ij}^{(k)}$ та $u_i^{(k)}$ – компоненти напружень і переміщень для «верхнього» ($k = 1$) і «нижнього» ($k = 2$) матеріалів.

За умови плоскої деформації або ж плоского напруженого стану однорідного анізотропного середовища поля напружень і переміщень можна подати у такій формі [3]:

$$\mathbf{u}(x,y) = \mathbf{A}\mathbf{f}(z) + \overline{\mathbf{A}\mathbf{f}(z)}, \qquad \mathbf{t}(x,y) = \mathbf{B}\mathbf{f}'(z) + \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}'(z)}, \tag{3}$$

$$\sigma_{11}(x,y) = 2\,\mathrm{Re}\,[\mu_1^2 f_1'(z_1) + \mu_2^2 f_2'(z_2)], \tag{4}$$

де $\mathbf{f}(z) = \{f_1(z_1), f_2(z_2)\}$, $f_j(z_j)$ – аналітичні функції комплексних змінних $z_j = x + \mu_j y$; $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ – (2×2)-матриці з компонентами

$$A_{1j} = s_{11}\mu_j^2 + s_{12} - s_{16}\mu_j, \qquad A_{2j} = s_{12}\mu_j + s_{22}/\mu_j - s_{26},$$
$$B_{1j} = -\mu_j, \qquad B_{2j} = 1;$$

μ_j – комплексні корені з додатними уявними частинами такого рівняння:

$$s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22} = 0. \tag{5}$$

Наведені вирази справджуються для плосконапруженого стану. Для плоскодеформованого стану необхідно s_{ij} замінити виразом $s_{ij} - s_{i3}s_{j3}/s_{33}$.

Підставляючи (3) в умови спряження (1) і позначаючи величини, що відносяться до «верхнього» («нижнього») матеріалу верхнім індексом «1» («2»), після елементарних перетворень отримуємо

$$\mathbf{B}^{(1)}\mathbf{f}'^{(1)}(x) - \overline{\mathbf{B}}^{(2)}\overline{\mathbf{f}}'^{(2)}(x) = \mathbf{B}^{(2)}\mathbf{f}'^{(2)}(x) - \overline{\mathbf{B}}^{(1)}\overline{\mathbf{f}}'^{(1)}(x), \qquad x \in \mathcal{U} + \mathcal{M} + \mathcal{L},$$

$$\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{f}^{(1)}(x) - \overline{\mathbf{A}}^{(2)}\overline{\mathbf{f}}^{(2)}(x) = \mathbf{A}^{(2)}\mathbf{f}^{(2)}(x) - \overline{\mathbf{A}}^{(1)}\overline{\mathbf{f}}^{(1)}(x), \qquad x \in \mathcal{U}.$$

Ці рівності свідчать про існування вектор-функції $\mathbf{v}(z)$, аналітичної у всій площині, та $\boldsymbol{\varphi}(z)$, яка є аналітичною у площині, за винятком ділянок $\mathcal{M} \cup \mathcal{U}$, що визначаються за такими формулами:

$$\mathbf{v}(z) = \begin{cases} \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{f}'^{(1)}(z) - \overline{\mathbf{B}}^{(2)}\overline{\mathbf{f}}'^{(2)}(z), & y > 0, \\ \mathbf{B}^{(2)}\mathbf{f}'^{(2)}(z) - \overline{\mathbf{B}}^{(1)}\overline{\mathbf{f}}'^{(1)}(z), & y < 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(z) = \begin{cases} \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{f}^{(1)}(z) - \overline{\mathbf{A}}^{(2)}\overline{\mathbf{f}}^{(2)}(z), & y > 0, \\ \mathbf{A}^{(2)}\mathbf{f}^{(2)}(z) - \overline{\mathbf{A}}^{(1)}\overline{\mathbf{f}}^{(1)}(z), & y < 0. \end{cases} \tag{7}$$

Оскільки механічні поля, збурені тріщинами, приймають нульові значення на нескінченності, то $\mathbf{v}(z) = 0$, а враховуючи, що функція $\mathbf{v}(z)$ аналітична в усій площині, то згідно з теоремою Ліувілля $\mathbf{v}(z)$ дорівнює нулеві всюди. Отже, рівняння (6) і (7) можна переписати у такому вигляді:

$$\mathbf{f}'^{(k)}(z) = \mathbf{D}^{(k)}\boldsymbol{\varphi}'(z), \qquad \overline{\mathbf{f}}'^{(k)}(z) = -\overline{\mathbf{D}}^{(k)}\boldsymbol{\varphi}'(z),$$

$$\mathbf{D}^{(k)} = \left[\mathbf{A}^{(k)} - \overline{\mathbf{A}}^{(m)}\left(\overline{\mathbf{B}}^{(m)}\right)^{-1}\mathbf{B}^{(k)}\right]^{-1}, \qquad m = \begin{cases} 1, & k = 2, \\ 2, & k = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Підставляючи (8) у співвідношення (3) і (4), одержуємо такі вирази для механічних полів через одну вектор-функцію $\boldsymbol{\varphi}(z)$:

$$\sigma_{i2}^{(k)}(x, y) = 2\,\mathrm{Re}\left[B_{ij}^{(k)}D_{jn}^{(k)}\varphi_n'(z_j^{(k)})\right],$$

$$\sigma_{11}^{(k)}(x, y) = 2\,\mathrm{Re}\left[(\mu_j^{(k)})^2 D_{jn}^{(k)}\varphi_n'(z_j^{(k)})\right], \tag{9}$$

$$u_i^{(k)}(x, y) = 2\,\mathrm{Re}\left[A_{ij}^{(k)}D_{jn}^{(k)}\varphi_n(z_j^{(k)})\right]. \tag{10}$$

Тут за індексами, що повторюються, проводиться підсумовування. Покладаючи $y = 0$ в (9) і (10), після нескладних перетворень виводимо

$$\mathbf{t}^{(1)}(x, 0) = \mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}'^{+}(x) - \overline{\mathbf{G}}\,\boldsymbol{\varphi}'^{-}(x), \qquad [\mathbf{u}'(x)] = \boldsymbol{\varphi}'^{+}(x) - \boldsymbol{\varphi}'^{-}(x),$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{D}^{(1)}. \tag{11}$$

Вирази (11) перепишемо у наступній формі:

$$\mathbf{N}\mathbf{t}^{(1)}(x, 0) = \boldsymbol{\Phi}^{+}(x) + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Phi}^{-}(x), \qquad \mathbf{S}[\mathbf{u}'(x)] = \boldsymbol{\Phi}^{+}(x) - \boldsymbol{\Phi}^{-}(x), \tag{12}$$

де $\boldsymbol{\Phi}(z) = \mathbf{S}\boldsymbol{\varphi}'(z)$; $\mathbf{S} = \mathbf{N}\mathbf{G}$; $\boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{diag}\left[\gamma, 1/\gamma\right]$; $\mathbf{N}$ – (2×2)-матриця з компонентами $N_{11} = -\dfrac{\overline{G}_{21} + \gamma G_{21}}{\overline{G}_{11} + \gamma G_{11}}$, $N_{21} = \overline{N}_{11}$, $N_{j2} = 1$; дійсна стала γ визначається за формулою

$$\gamma = \left[\mathbf{G}^{*} - \sqrt{\mathbf{G}^{*2} - \det\mathbf{G}^2}\,\right] / \det\mathbf{G}, \qquad \mathbf{G}^{*} = \mathrm{Re}\,(\mathbf{G}_{21}\overline{\mathbf{G}}_{12}) - \mathrm{Re}\,(\mathbf{G}_{11}\overline{\mathbf{G}}_{22}).$$

Можна показати, що $\Phi_2(z) = \gamma\,\overline{\Phi}_1(z)$, тому замість (12) достатньо записати

$$\sigma_{22}^{(1)}(x, 0) + n_{*}\sigma_{12}^{(1)}(x, 0) = \Phi^{+}(x) + \gamma\Phi^{-}(x),$$

$$s_{*}\left([u_1'(x)] - n_{*}[u_2'(x)]\right) = \Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x), \tag{13}$$

де покладено $s_{*} = S_{11}$, $n_{*} = N_{11}$, $\Phi(z) = \Phi_1(z)$. Для ортотропного біматеріалу, головні осі ізотропії якого співпадають з осями координат, коефіцієнти в

рівняннях (13) визначаються за такими формулами:

$$\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^2 = \frac{g_1 g_2}{g_3^2}, \qquad n_* = -\,i\sqrt{\frac{g_2}{g_1}}, \qquad s_* = \frac{2\sqrt{g_1 g_2}}{s_0(1+\gamma)},$$

де $g_1 = \sum_{k=1}^{2} \mu_*^{(k)} \sqrt{s_{11}^{(k)} s_{22}^{(k)}}$, $g_2 = \sum_{k=1}^{2} \mu_*^{(k)} s_{11}^{(k)}$, $g_3 = \sum_{k=1}^{2} (-1)^k \left(s_{12}^{(k)} + \sqrt{s_{11}^{(k)} s_{22}^{(k)}} \right)$,

$$s_0 = \sum_{k=1}^{2} \sqrt{\frac{s_{22}^{(k)}}{s_{11}^{(k)}}} \prod_{k=1}^{2} \mu_*^{(k)} s_{11}^{(k)} + \sum_{k=1}^{2} \sqrt{s_{11}^{(k)} s_{22}^{(k)}} \left(2s_{12}^{(m)} + s_{66}^{(k)} + \sqrt{s_{11}^{(m)} s_{22}^{(m)}} \right) + s_{11}^{(2)} s_{22}^{(2)} -$$

$$- \left(s_{12}^{(1)} - s_{12}^{(2)}\right)^2, \quad \mu_*^{(k)} = \sqrt{\frac{2s_{12}^{(k)} + s_{66}^{(k)}}{s_{11}^{(k)}} + 2\sqrt{\frac{s_{22}^{(k)}}{s_{11}^{(k)}}}}, \quad \varepsilon \equiv \frac{\ln \gamma}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arcth}\left(\frac{\sqrt{g_1 g_2}}{g_3} \right).$$

Зауважимо, що для ізотропного біматеріалу коефіцієнти в рівнянні (13) визначаються за такими формулами:

$$\gamma = \frac{\mu^{(1)} + \mu^{(2)} \varkappa^{(1)}}{\mu^{(2)} + \mu^{(1)} \varkappa^{(2)}}, \qquad s_* = \frac{2\mu^{(1)} \mu^{(2)}}{\mu^{(1)} + \mu^{(2)} \varkappa^{(1)}}, \qquad n_* = -\,i\,,$$

де μ – модуль зсуву, $\varkappa = 3 - 4\nu$ (для ПДС) і $\varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ (для ПНС), а ν – коефіцієнт Пуассона.

Задовольняючи граничні умови (2) за допомогою (13), отримуємо таку крайову задачу:

$$F^+(x) + \gamma F^-(x) = 0, \qquad x \in \mathcal{M}; \qquad \operatorname{Im} F^{\pm}(x) = 0, \qquad x \in \mathcal{L}. \tag{14}$$

Тут введено функцію

$$F(z) = \Phi(z) + \tilde{p} \exp(i\beta), \qquad \tilde{p} = \frac{p}{1+\gamma}, \tag{15}$$

у якій

$$p = \sqrt{(\sigma + n'\tau)^2 + (n''\tau)^2}, \quad \beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{n''\tau}{\sigma + n'\tau} \right), \quad n' = \operatorname{Re} n_*, \quad n'' = \operatorname{Im} n_*.$$

Таким чином, задачу зведено до визначення тільки однієї функції $F(z)$, аналітичної у всій площині, за винятком $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$, де повинні виконуватися рівності (14).

Крайову задачу вигляду (14) досліджено в роботі [6], де одержано її розв'язок для задачі про втиснення жорстких штампів із зонами відшарування в ізотропну півплощину. Втім, для розглядуваного випадку задачу (14) можна розв'язати простішим методом. Замінимо задачу (14) такою задачею спряження:

$$X^+(x) - \left\{ \begin{matrix} G(x) \\ -\gamma \end{matrix} \right\} X^-(x) = 0, \qquad x \in \left\{ \begin{matrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \end{matrix} \right\},$$

розв'язок якої згідно з [2] можна записати у формі

$$X(z) = \exp[\psi(z)], \quad \psi(z) = \left(\frac{1}{2} - i\varepsilon \right) I(z) - i\Gamma_1(z) + \Gamma_2(z), \quad \varepsilon = \frac{\ln \gamma}{2\pi}, \tag{16}$$

де

$$I(z) = \int_M \frac{dx}{x - z}, \quad \Gamma_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{\ln |G(x)|}{x - z}\, dx, \quad \Gamma_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{\arg[G(x)]}{x - z}\, dx.$$

Розв'язок (16) буде відповідати задачі (14), якщо функція $G(x)$ є такою, що

$$\operatorname{Im} X^{\pm}(x) = 0, \qquad x \in \mathcal{L}. \tag{17}$$

Враховуючи, що

$$X^{\pm}(x) = \exp[\psi^{\pm}(x)],$$

$$\psi^{\pm}(x) = \left(\frac{1}{2} - i\varepsilon\right) I(x) - i\Gamma_1(x) + \Gamma_2(x) \pm \frac{1}{2}\left(\ln|G(x)| + i\arg[G(x)]\right), \quad x \in \mathcal{L},$$

з рівняння (17) отримуємо

$$\operatorname{Im}\psi^{\pm}(x) = \pi n^{\pm}, \qquad x \in \mathcal{L},$$

або

$$-\varepsilon I(x) - \Gamma_1(x) \pm \arg[G(x)] = \pi n^{\pm}, \qquad x \in \mathcal{L},$$

де $n^{\pm}$ – довільні цілі числа. Записану вище систему двох рівнянь зведемо до наступної форми:

$$\arg[G(x)] = \pi(n^+ - n^-),$$

$$2\Gamma_1(x) = g(x),$$

$$g(x) = \pi(n^+ + n^-) - 2\varepsilon I(x), \qquad x \in \mathcal{L}. \tag{18}$$

Друге з рівнянь (18) є сингулярним інтегральним рівнянням, розв'язок якого згідно з [2] запишемо як

$$\Gamma_1(z) = \frac{Z(z)}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}} \frac{g(x)\,dx}{Z^+(x)(z-x)}, \qquad Z(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}.$$

Підставляючи $g(x)$, визначене з третьої із формул (18), у попередній інтеграл і обчислюючи його, одержуємо

$$\Gamma_1(z) = \frac{\pi(n^+ + n^-)}{2} - \varphi(z) - \varepsilon I(z), \tag{19}$$

де

$$\varphi(z) = -\delta_0\varepsilon\left(\pi i - 2\operatorname{arcth}\sqrt{\frac{\chi(d)}{\chi(z)}}\right) - 2\varepsilon\sum_{j=1}^{2J-2}(-1)^j\delta_j\operatorname{arcth}\sqrt{\frac{\chi(c_j)}{\chi(z)}},$$

$$I(z) = -\delta_0\ln\left(\frac{z-d}{z-b}\right) + \sum_{j=1}^{J-1}\ln\left(\frac{z-c_{2j}}{z-c_{2j-1}}\right), \qquad \chi(z) = \frac{z-b}{z-a},$$

$$\delta_0 = \operatorname{sgn}(a-b), \qquad \delta_j = \operatorname{sgn}(c_j - b).$$

З огляду на (19) і друге зі співвідношень (16) функція $\psi(z)$ набуде форми

$$\psi(z) = \frac{1}{2}I(z) + i\varphi(z) - \frac{i\pi(n^+ + n^-)}{2} - \delta_0\frac{n^+ - n^-}{2}\ln\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$$

і, отже,

$$X(z) = \exp\left(i\varphi(z) - \frac{i\pi(n^+ + n^-)}{2}\right)\prod_{j=1}^{J}\left(\frac{z-c_{2j}}{z-c_{2j-1}}\right)^{1/2}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{z-d}{z-b}\right)^{\alpha_2}. \tag{20}$$

Тут $\alpha_1 = -\delta_0\dfrac{n^+ - n^-}{2}$, $\alpha_2 = -\dfrac{\delta_0}{2}$.

Легко показати, що формула

$$F(z) = \frac{\exp(i\varphi(z))}{f(z)}\left(\frac{P(z)}{\sqrt{z-b}} + i\frac{Q(z)}{\sqrt{z-a}}\right) \tag{21}$$

містить усі розв'язки, подані у (20). Тут $f(z) = \sqrt{z-d}\prod_{j=1}^{2J-2}(z-c_j)^{1/2}$, а $P(z)$ і $Q(z)$ є поліномами з довільними дійсними коефіцієнтами.

Враховуючи, що згідно з (15) функція $F(z)$ на нескінченності повинна бути константою $\tilde{p}\exp(i\beta)$ і повинні виконуватись умови однозначності переміщень [5], поліноми $P(z)$ і $Q(z)$ матимуть вигляд

$$P(z)=\sum_{j=0}^{J}C_j z^j, \qquad Q(z)=\sum_{j=0}^{J}D_j z^j, \tag{22}$$

де дійсні коефіцієнти визначаються за формулами

$$C_j=\tilde{p}\{c_j^{(1)}\cos(\alpha_0+\beta)+c_j^{(2)}\sin(\alpha_0+\beta)\},$$

$$D_j=\tilde{p}\{d_j^{(1)}\cos(\alpha_0+\beta)+d_j^{(2)}\sin(\alpha_0+\beta)\}, \quad j=0,\dots,J, \tag{23}$$

у яких

$$c_J^{(1)}=-d_J^{(2)}=1, \quad c_J^{(2)}=d_J^{(1)}=0, \quad c_{J-1}^{(2)}=d_{J-1}^{(1)}=-\alpha_1, \quad c_{J-1}^{(1)}=-\upsilon, \quad d_{J-1}^{(2)}=\eta,$$

$$c_{j-1}^{(k)}=\sum_{m=1}^{2J-2}M_{jm}^{*}h_m^{(k)}, \quad d_{j-1}^{(k)}=\sum_{m=1}^{2J-2}M_{(j+J-1)m}^{*}h_m^{(k)}, \quad \mathbf{M}^{*}=\mathbf{M}^{-1},$$

$$M_{n(m+1)}=G_{nm}^{(1)}, \qquad M_{n(m+J)}=G_{nm}^{(2)},$$

$$G_{(2j-1)m}^{(1)}=\int_{c_{2j-1}}^{c_{2j}}\frac{x^m\sin\varphi^{*}(x)}{f^{*}(x)\sqrt{|x-b|}}\,dx, \qquad G_{(2j)m}^{(1)}=\int_{c_{2j-1}}^{c_{2j}}\frac{x^m\cos\varphi^{*}(x)}{f^{*}(x)\sqrt{|x-b|}}\,dx,$$

$$G_{(2j)m}^{(2)}=-\int_{c_{2j-1}}^{c_{2j}}\frac{x^m\sin\varphi^{*}(x)}{f^{*}(x)\sqrt{|x-a|}}\,dx, \qquad G_{(2j-1)m}^{(2)}=\int_{c_{2j-1}}^{c_{2j}}\frac{x^m\cos\varphi^{*}(x)}{f^{*}(x)\sqrt{|x-a|}}\,dx,$$

$$h_{2j}^{(1)}=\int_{c_{2j-1}}^{c_{2j}}\left[\frac{\upsilon-x}{\sqrt{|x-b|}}\cos\varphi^{*}(x)-\frac{\alpha_1}{\sqrt{|x-a|}}\sin\varphi^{*}(x)\right]\frac{x^{J-1}}{f^{*}(x)}\,dx,$$

$$h_{2j}^{(2)}=\int_{c_{2j-1}}^{c_{2j}}\left[\frac{\alpha_1}{\sqrt{|x-b|}}\cos\varphi^{*}(x)+\frac{\upsilon+\eta-x}{\sqrt{|x-a|}}\sin\varphi^{*}(x)\right]\frac{x^{J-1}}{f^{*}(x)}\,dx,$$

$$h_{2j-1}^{(1)}=\int_{c_{2j-1}}^{c_{2j}}\left[\frac{\upsilon-x}{\sqrt{|x-b|}}\sin\varphi^{*}(x)+\frac{\alpha_1}{\sqrt{|x-a|}}\cos\varphi^{*}(x)\right]\frac{x^{J-1}}{f^{*}(x)}\,dx,$$

$$h_{2j-1}^{(2)}=\int_{c_{2j-1}}^{c_{2j}}\left[\frac{\alpha_1}{\sqrt{|x-b|}}\sin\varphi^{*}(x)-\frac{\upsilon+\eta-x}{\sqrt{|x-a|}}\cos\varphi^{*}(x)\right]\frac{x^{J-1}}{f^{*}(x)}\,dx,$$

$$\varphi^{*}(x)=-\delta_0\varepsilon\ln\left|\frac{\sqrt{\chi(d)}+\sqrt{\chi(x)}}{\sqrt{\chi(d)}-\sqrt{\chi(x)}}\right|+\varepsilon\sum_{j=1}^{2J-2}(-1)^j\delta_j\ln\left|\frac{\sqrt{\chi(c_j)}+\sqrt{\chi(x)}}{\sqrt{\chi(c_j)}-\sqrt{\chi(x)}}\right|, \quad x\in\mathcal{M},$$

$$\upsilon=\frac{1}{2}\left(b+d+\sum_{j=1}^{2J-2}c_j\right), \qquad \eta=\frac{1}{2}\left(a+d+\sum_{j=1}^{2J-2}c_j\right),$$

$$f^{*}(x)=\sqrt{|x-d|}\prod_{j=1}^{2J-2}\sqrt{|x-c_j|},$$

$$\alpha_0=-2\varepsilon\delta_0\operatorname{arcth}\left(\sqrt{\chi(d)}\right)+2\varepsilon\sum_{j=1}^{2J-2}(-1)^j\delta_j\operatorname{arcth}\left(\sqrt{\chi(c_j)}\right),$$

$$\alpha_1=\varepsilon\sqrt{(d-a)(d-b)}-\varepsilon\sum_{j=1}^{2J-2}(-1)^j\delta_j\sqrt{(c_j-a)(c_j-b)}.$$

Тут $m=0,\dots,J-2$; $j=1,\dots,J-1$; $n=1,\dots,2J-2$; J – загальна кількість тріщин.

Визначення зон контакту та КІН. Одержаний вище розв'язок буде відповідати механічній задачі за умови, що напруження у зоні контакту є стискувальними, а береги тріщин не взаємопроникають один у другий і плавно змикаються у точці b. Математично ці умови виразимо так:

$$[u_2'(b)] = 0, \qquad \sigma_{22}^{(1)}(x,0) \le 0, \quad x \in \mathcal{L}, \qquad [u_2(x)] \ge 0, \quad x \in \mathcal{M}. \tag{24}$$

Для перевірки умов (24) виведемо вирази для напружень і переміщень уздовж осі Ox і розглянемо їхню поведінку в околі точки b. Підставляючи (21) у (15), а потім у (13), виводимо

$$\sigma_{22}^{(1)}(x) =$$

$$= \frac{2\exp(\pi\varepsilon)}{(-1)^N f^*(x)}\left(\frac{\delta_0 P(x)}{\sqrt{|x-b|}}\operatorname{ch}(\tilde{\varphi}(x)-\pi\varepsilon) + \frac{Q(x)}{\sqrt{|x-a|}}\operatorname{sh}(\tilde{\varphi}(x)-\pi\varepsilon)\right), \quad x \in \mathcal{L}, \tag{25}$$

$$\sigma_{22}^{(1)}(x) + n_* \sigma_{12}^{(1)}(x) = -(-1)^N e^{i\varphi(x)} \frac{1+\gamma}{f^*(x)}\left(\frac{P(x)}{\sqrt{|x-b|}} + i\frac{Q(x)}{\sqrt{|x-a|}}\right), \quad x \in \mathcal{U}, \tag{26}$$

$$[u_2'(x)] =$$

$$= \frac{2(-1)^N \operatorname{ch}(\pi\varepsilon)}{s_* n'' f^*(x)}\left(\frac{P(x)}{\sqrt{|x-b|}}\cos(\varphi^*(x)) - \frac{Q(x)}{\sqrt{|x-a|}}\sin(\varphi^*(x))\right), \quad x \in \mathcal{M}. \tag{27}$$

Тут N – кількість тріщин, які знаходиться справа від x;

$$\tilde{\varphi}(x) =$$

$$= -2\varepsilon \operatorname{arctg}\sqrt{\chi(d)/|\chi(x)|} + 2\varepsilon\delta_0 \sum_{j=1}^{2J-2}(-1)^j \delta_j \operatorname{arctg}\sqrt{\chi(c_j)/|\chi(x)|}, \qquad x \in \mathcal{L}.$$

Розвиваючи рівняння (25) і (27) у ряди Тейлора в точці b, одержуємо

$$\sigma_{22}^{(1)}(x) =$$

$$= \frac{2\exp(\pi\varepsilon)}{(-1)^N f^*(b)}\left(\frac{\delta_0 P(b)}{\sqrt{|x-b|}} + \varphi_1\sqrt{|x-b|}\right) + O((x-b)^{3/2}), \quad x \to b + 0\delta_0, \tag{28}$$

$$[u_2'(x)]\Big|_{x\to b-0\delta_0} = -\frac{1+\gamma}{2s_* n''\gamma}\,\sigma_{22}^{(1)}(x)\Big|_{x\to b+0\delta_0}, \tag{29}$$

де

$$\varphi_1 = \delta_0 P'(b) - \frac{\delta_0}{2}P(b)\varphi_0^2 + \frac{Q(b)}{\sqrt{|b-a|}}\varphi_0,$$

$$\varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{|b-a|}}\left[\frac{1}{\chi(d)} - \delta_0\sum_{j=1}^{2J-2}(-1)^j\delta_j\frac{1}{\sqrt{\chi(c_j)}}\right].$$

На підставі попередніх формул умови (24) запишемо так:

$$P(b) = 0, \qquad (-1)^N \varphi_1 < 0.$$

Зауважимо, що у випадку, коли напруження у зоні контакту є стискувальними, то, як випливає з (29), береги тріщини не взаємопроникають в околі точки змикання. Підставляючи вирази (23) у (22), а тоді у попередні формули, після деяких алгебраїчних перетворень отримаємо

$$\operatorname{tg}(\alpha_0+\beta) = \frac{(b-\upsilon)b^{J-1} + \sum_{j=0}^{J-2} c_j^{(1)} b^j}{\alpha_1 b^{J-1} - \sum_{j=0}^{J-2} c_j^{(2)} b^j}, \qquad \frac{\operatorname{tg}(\alpha_0+\beta)}{\operatorname{sgn}(p)} > \frac{q_0^{(1)} + q_1^{(1)}}{q_0^{(2)} + q_1^{(2)}}, \tag{30}$$

де

$$q_0^{(1)} = -\delta_0\left(b^{J-2}(\upsilon + J(b-\upsilon)) + \sum_{j=1}^{J-2} jc_j^{(1)}b^{j-1}\right),$$

$$q_1^{(1)} = \left(-\alpha_1 b^{J-1} + \sum_{j=1}^{J-2} d_j^{(1)}b^{j-1}\right)\frac{\varphi_0}{\sqrt{|b-a|}},$$

$$q_0^{(2)} = -\delta_0\left(\alpha_1(J-1)b^{J-2} + \sum_{j=1}^{J-2} jc_j^{(2)}b^{j-1}\right),$$

$$q_1^{(2)} = \left(b^{J-1}(\eta - b) + \sum_{j=1}^{J-2} d_j^{(2)}b^{j}\right)\frac{\varphi_0}{\sqrt{|b-a|}}.$$

Трансцендентне рівняння (30) визначає положення точки b або ж величину зони контакту, при якій береги тріщини змикаються плавно. Втім, трансцендентне рівняння має безліч розв'язків, однак вибрати необхідно ті, для яких контактні напруження біля точки b є стискувальними, а береги тріщини не взаємопроникають. Можна показати, що нерівність з формул (30) однозначно визначає потрібний корінь рівняння (30).

Підставляючи (23) у (22), а потім у (26), вирази для КІН у вершині тріщини a, які визначаються формулою

$$K_1 - iK_2 = \lim_{x\to a}\left(\sigma_{22}(x,0) - i\sigma_{12}(x,0)\right)\sqrt{|x-a|},$$

після алгебраїчних перетворень набувають вигляду

$$K_1 = -n'K_2, \qquad \frac{K_2}{p} = -(-1)^N\frac{\cos(\alpha_0+\beta)}{n''f^*(a)}\left(\omega_1 + \omega_2\,\mathrm{tg}\,(\alpha_0+\beta)\right), \tag{31}$$

де $\omega_1 = -\alpha_1 a^{J-1} + \sum_{j=0}^{J-2} d_j^{(1)}a^j$, $\omega_2 = (\eta - a)a^{J-1} + \sum_{j=0}^{J-2} d_j^{(2)}a^j$.

У випадку однієї тріщини довжини ℓ рівняння (30) для визначення відносної довжини зони контакту λ можна подати так:

$$\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\lambda}}{2\varepsilon}\right) + 2\varepsilon\,\mathrm{arcth}\left(\sqrt{1-\lambda}\right) = \pm\beta + \pi, \tag{32}$$

а друга з формул (31) для КІН з урахуванням (32) набуде вигляду

$$\frac{K_2}{p\sqrt{\ell}} = \pm\frac{1+4\varepsilon^2}{2n''}\left(1 + \frac{4\varepsilon^2}{1-\lambda}\right)^{-1/2}. \tag{33}$$

Тут знак «+» вибираємо для визначення величин зони контакту та КІН біля правої вершини, а знак «−» − біля лівої. У зв'язку з тим, що довжини зон контакту надзвичайно малі для більшості випадків, формули (32) і (33) доцільно розвинути у степеневі ряди відносно λ, звідки отримуємо такі елементарні формули:

$$\lambda = 2\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1+t}{1+4\varepsilon^2}\right)^{-1} + O(\lambda^2), \quad t = \mathrm{th}\left[\frac{1}{2\varepsilon}\left(\pm\beta - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) + \pi\right)\right], \tag{34}$$

$$\frac{K_2}{p\sqrt{\ell}} = \frac{\pm 1}{n''}\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+4\varepsilon^2} - \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1+4\varepsilon^2}}\lambda\right) + O(\lambda^2). \tag{35}$$

Аналіз результатів. Для встановлення основних закономірностей у поведінці КІН і величин зон контакту для системи міжфазних тріщин достатньо дослідити взаємодію двох тріщин. Позначаючи довжини тріщин через ℓ_1 і ℓ_2, а відстань між ними − через h, дослідимо поведінку КІН і відносних довжин зон контакту тріщини ℓ_1 залежно від безрозмірних па-

раметрів ℓ_2/ℓ_1 і h/ℓ_1. Стосовно інших параметрів, які містяться у розв'язку, а саме: s_*, n_*, β і ε, то параметр s_* не входить у вирази для КІН і відносних довжин зон контакту, параметр $n_* \equiv n' + in''$ входить у вирази для КІН як коефіцієнт, так що його вплив очевидний. Вплив параметрів ε і β на КІН і величину зон контакту прослідковується за формулами (34) і (35). Зауважимо тільки, що у випадку ізотропного біматеріалу параметр β – це кут нахилу вектора результуючого навантаження p до осі Oy. Для анізотропного ж біматеріалу маємо

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{n''\operatorname{tg}\beta_0}{1 + n'\operatorname{tg}\beta_0}, \qquad \operatorname{tg}\beta_0 = \frac{\tau}{\sigma}.$$

Звідси випливає, що величини відносних довжин зон контакту та КІН (з множником $-n''$), обчислені для анізотропного біматеріалу з кутом нахилу β_0 вектора p, відповідають величинам, обчисленим для ізотропного біматеріалу з кутом β, при умові, що параметри ε однакові. Параметр ε для реальних матеріалів змінюється в інтервалі $\left[-\ln(3)/2\pi;\ \ln(3)/2\pi\right]$.

На рис. 2*а*, *б* зображено залежності відносних довжин зон контакту λ відповідно біля лівої і правої вершин тріщини ℓ_1. Залежності подано як функції параметрів $\xi = \frac{1}{\pi}\operatorname{tg}\frac{h}{\ell_1}$ і $\zeta = \frac{1}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\ell_2}{\ell_1}$ для сталих $\varepsilon = 0.17$ і $\beta = 0$.

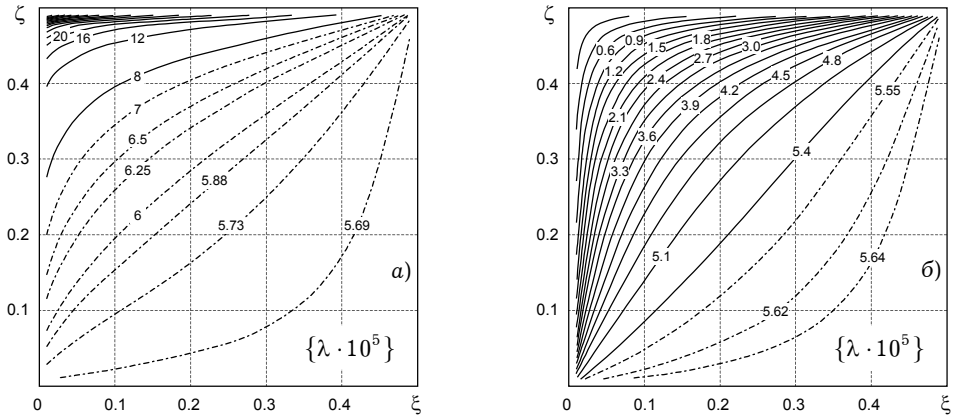

Рис. 2

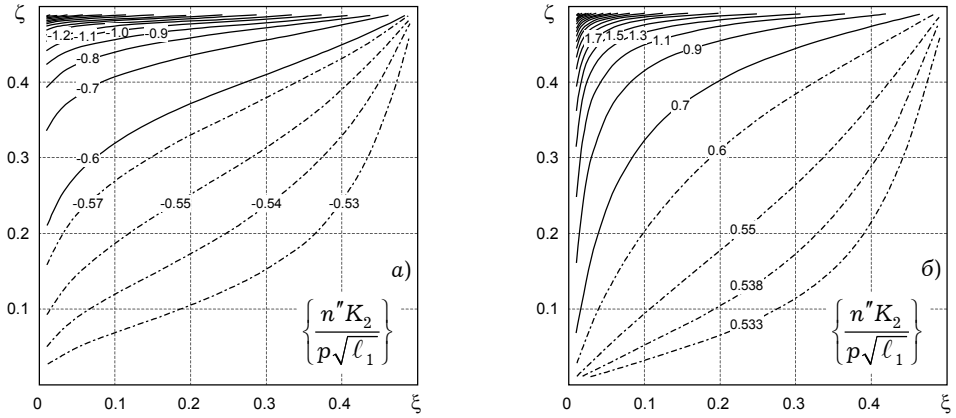

Рис. 3

На рис. 3*а*, *б* наведено аналогічні залежності для нормованих КІН $(n''K_2 / p\sqrt{\ell_1})$ відповідно для лівої і правої вершин тріщини. При зміні значень параметрів ε і β залежності, зображені на рисунках, якісно практично не змінюються.

Як видно з наведених рисунків, відносна довжина зони контакту біля лівої вершини тріщини ℓ_1 зростає при зближенні тріщин $(h \to 0)$ та при збільшенні довжини другої тріщини $(\ell_2 \to \infty)$. Права ж зона контакту, навпаки, зменшується за цих самих умов. Щодо КІН, то їхні абсолютні значення зростають при $h \to 0$ і $\ell_2 \to \infty$ як біля лівої, так і біля правої вершин. Причому КІН біля правої вершини, яка знаходиться ближче до другої тріщини, приймає трохи більші значення.

Висновки. Одержано замкнений розв'язок пружної плоскої задачі для системи міжфазних тріщин із зонами гладкого контакту їхніх берегів за умови, що зони контакту малі порівняно з довжинами тріщин. За допомогою чисельного аналізу розв'язку встановлено поведінку зон контакту та коефіцієнтів інтенсивності напружень залежно від взаємного розміщення тріщин та їхніх відносних розмірів. На основі одержаних результатів можна зробити такі висновки: тріщиностійкість біматеріалу зменшується при зближенні тріщин і збільшенні різниці між їхніми розмірами, причому оскільки коефіцієнти інтенсивності напружень біля сусідніх вершин двох тріщин більші, ніж біля протилежних вершин, то тріщини будуть розповсюджуватися у напрямку одна до другої, при цьому першою почне розповсюджуватися менша тріщина.

Слід зауважити, що використаний тут метод комплексних потенціалів для пружної задачі анізотропного біматеріалу можна застосувати для розв'язання аналогічних задач лінійної термоелектропружності для пє'зоелектриків.

1. *Антипов Ю. А.* Трещина на линии раздела упругих сред при наличии сухого трения // Прикл. математика и механика. – 1995. – № 2. – С. 290–306.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
4. *Лобода В. В., Харун І. В.* Міжфазні тріщини з зонами контакту в анізотропному середовищі у полі віддаленого термомеханічного навантаження, зосереджених сил і теплових джерел // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 1. – С. 32–46.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
6. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Давление системы штампов на упругую полуплоскость при общих условиях контактного сцепления и скольжения // Прикл. математика и механика. – 1988. – **52**, № 2. – С. 284–293.
7. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Динамические контактные задачи для ортотропной упругой полуплоскости и составной плоскости // Прикл. математика и механика. – 1990. – **54**, № 4. – С. 633–641.
8. *Острик В. І.* Контакт з тертям берегів міжфазної тріщини за розтягу та зсуву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 2. – С. 58–65.
9. *Острик В. І., Улітко А. Ф.* Кругова міжфазна тріщина за умови фрикційного контакту поверхонь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 1. – С. 84–94.
10. *Симонов И. В.* Межфазная трещина в однородном поле напряжений // Механика композитных материалов. – 1985. – № 2. – С. 969–976.
11. *Симонов И. В.* Стационарное дозвуковое движение трещин и тонких щелей по границе составной анизотропной плоскости // Прикл. математика и механика. – 2001. – **65**, № 2. – С. 346–359.
12. *Смирнов С. А.* Напряженное состояние двухслойной толстостенной сферической оболочки с разрезами // Докл. АН УССР. – 1991. – № 9. – С. 97–101.

13. *Смирнов С. А.* Решение некоторых контактных задач теории упругости для пространства с разрезом по сферической поверхности // Межвуз. темат. сб. науч. трудов. – Днепропетровск: Днепропетр. гос. ун-т. – 1984. – С. 95–102.
14. *Comninou M.* The interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – **44**. – P. 631–636.
15. *Dundurs J., Gautesen A. K.* An opportunistic analysis of the interface crack // Int. J. Fract. – 1988. – **36**. – P. 151–159.
16. *Herrmann K. P., Loboda V. V.* Fracture-mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimaterials by consideration of various contact zone models // Arch. Appl. Mech. – 2000. – **70**. – P. 127–143.
17. *Herrmann K. P., Loboda V. V.* On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial // Arch. Appl. Mech. – 1999. – **69**. – P. 311–335.
18. *Kharun I. V., Loboda V. V.* A problem of thermoelasticity for a set of interface cracks with contact zones between dissimilar anisotropic materials // Mech. of Materials. – 2004. – **36**, No. 7. – P. 585–600.
19. *Kharun I. V., Loboda V. V.* A thermoelastic problem for interface cracks with contact zones // Int. J. Solids and Struct. – 2004. – **41**. – P. 159–175.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖФАЗНЫХ ТРЕЩИН С ЗОНАМИ КОНТАКТА В АНИЗОТРОПНОМ БИМАТЕРИАЛЕ В ПОЛЕ РАСТЯЖЕНИЯ И СДВИГА

Методами теории функции комплексного переменного построено замкнутое решение плоской задачи упругости для бесконечной анизотропной биматериальной плоскости или пространства с системой межфазных трещин при наличии малых зон гладкого контакта берегов вблизи вершин трещин. В результате численного анализа полученного решения, проведенного для случая двух трещин, исследованы зависимости величин зон контакта и коэффициентов интенсивности напряжений от размеров трещин и расстояния между ними.

INTERACTION BETWEEN INTERFACE CRACKS AND CONTACT ZONES IN ANISOTROPIC BIMATERIAL IN TENSION-SHEAR FIELD

A closed-form solution to the plane elasticity problem for an infinite anisotropic bimaterial plane or space with a set of interface cracks in the presence of small frictionless contact zones near the crack tips by means of the complex function theory methods is obtained. As a result of numerical analysis of the derived solution, carried out for the case of two cracks, the dependence of magnitudes of contact zones and stress intensity factors on the crack lengths and the distance between them are investigated.

Дніпропетр. нац. ун-т, Дніпропетровськ

Одержано
29.05.04