УДК 539.4

М. М. Кундрат, Г. Т. Сулим

КОМПОЗИЦІЯ З ВКЛЮЧЕННЯМ ЗА РОЗТЯГУ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ СИЛАМИ

За умов плоскої задачі досліджується гранична рівновага композиції з жорстким лінійним включенням під час розтягу пластини зосередженими силами. Локалізовані зони передруйнування (ослабленого контакту) розвиваються уздовж межі пластина – включення, просуваючись від кінців до центральної частини включення. Аналітичний розв'язок задачі отримано за допомогою комплексних потенціалів зведенням до задачі спряження. Досліджено вплив навантаження на розвиток смуг передруйнування, розподіли контактних напружень та осьових зусиль у включенні. Із використанням деформаційного критерію руйнування з'ясовано граничні навантаження можливого відшарування включення чи його розриву.

Конструювання композиційних матеріалів з високою питомою міцністю і в'язкістю руйнування може досягатися армуванням матриці високоміцними та жорсткими волокнами-включеннями. Для з'ясування кінетики руйнування таких композитів необхідний аналіз полів напружень і деформацій біля включень. Розв'язок плоскої задачі теорії пружності для тіла з жорстким еліптичним ядром можна знайти у праці [7]. Із нього граничним переходом можна отримати результати і для лінійного (пластинчатого) включення. У статтях [3, 4, 9] вивчено поля напружень і переміщень біля вершин гострокінцевих включень і на основі співвідношень [7] встановлено їх асимптотичні подання. Виявлено [1, 9], що внаслідок нерівномірного розтягу-стиску біля включення слід очікувати більших порівняно з тріщинами пластичних деформацій. Аналітичні розв'язки плоских задач для лінійного включення скінченної довжини з пластичними зонами, що моделюються локалізованими тонкими прошарками матеріалу, отримано у працях [2, 10, 11]. Уточнена постановка цих задач призвела до зміни типу особливості напружень в околі вершин включення із кореневої на логарифмічну. У працях [5, 6] додатково удосконалено формулювання крайових умов, завдяки чому вдалося цілком позбутися особливості напружень. Ця праця розвиває закладені у [5, 6] можливості ефективного дослідження таких задач за умов розтягу пластини зосередженими силами.

Постановка задачі та її розв'язування. Необмежена пластина в умовах плоскої задачі з жорстким лінійним включенням уздовж відрізка $[-a,\ a]$ осі абсцис розтягується уздовж поздовжньої осі включення двома зосередженими силами величини Q, прикладеними в точках $(x = \pm d$, $y = 0)$, $d > a$ (рис. 1). Матеріали пластини та контактного прошарку матриця – включення вважаємо приблизно однакової міцності.

У пластині найбільша концентрація напружень виникає в околах кінців включення і точок прикладання сил, де насамперед і слід чекати появи зон передруйнування. Дослідимо розвиток цих зон в околах кінців включення, нехтуючи для простоти впливом на їхній розвиток пластичних зон біля точок прикладання сил, що є допустимим за достатньої віддаленості останніх від кінців включення.

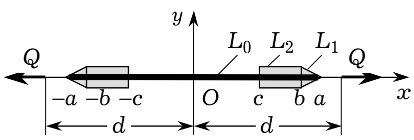

Рис. 1

Аналіз плоского напруженого стану такої композиції за пружним розв'язком показує [1], що максимальні дотичні напруження $\tau_{\max}$ спостерігаються в околах кінців включення уздовж його межі з пластиною. Тому вважатимемо, що саме тут і зароджуються зони передруйнування, просуваючись від кожного краю до центральної частини уздовж межі пластина – включення. Ці зони складаються з двох ділянок: зон розпушення $L_1 \sim \sim b < |x| < a$ і зон (смуг) пластичності $L_2 \sim c < |x| < b$. При цьому виконуються такі крайові умови: на ділянках розпушення (ослабленого, неідеального контакту) дотичні напруження лінійно зростають від нуля до граничного значення τ_s^*:

$$\sigma_{xy}^{+} = \tau_s^* \left(1 - \frac{|x| - b}{a - b}\right) \operatorname{sgn}(x), \qquad x \in L_1, \tag{1}$$

а на ділянках пластичного деформування вони є сталими:

$$\sigma_{xy}^{+} = -\sigma_{xy}^{-} = \tau_s^* \operatorname{sgn}(x), \qquad x \in L_2, \quad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Тут τ_s^* – адгезійна зсувна міцність контактної межі пластина – включення, а за пластичного деформування – її зсувний поріг пластичності; σ_{ij} – компоненти тензора напружень. Значення параметра c знаходимо з додаткової фізичної умови, а b задаємо (умови для його обчислення поки що немає). Його доцільно пов'язати з розмірами структурних елементів (зерен) матеріалу адгезійного прошарку, що виражає сумарний вплив неоднорідності структури на напружено-деформований стан. Запровадження у такий спосіб зони передруйнування дає можливість уникнути особливостей напружень в околах кінців включення та отримати обмежені напруження в усіх точках композиції, які дають механічно коректну картину деформування.

На ділянці $|x| < c$ зберігається ідеальний контакт, тому поздовжні деформації там відсутні:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = 0, \qquad x \in L_0, \tag{3}$$

де u, v – компоненти вектора переміщень у напрямах осей Ox та Oy відповідно.

Розв'язок задачі за допомогою комплексних потенціалів Колосова – Мусхелішвілі [7] визначаємо як суперпозицію двох розв'язків:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\operatorname{Re}\Phi(z), \qquad \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(z) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)},$$

$$2G(u' + iv') = \varkappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \tag{4}$$

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_*(z), \qquad \Omega(z) = \Omega_0(z) + \Omega_*(z), \tag{5}$$

де індексом «0» позначено складові, що дають розв'язок задачі для суцільної пластини за її розтягу зосередженими силами (однорідний розв'язок), а символом «$*$» – розв'язок, що враховує розрив переміщень на лініях розпушення і пластичності (збурений розв'язок). Однорідний розв'язок відомий [7] і подається формулами

$$\Phi_0(z) = -\frac{Q}{\pi(\varkappa + 1)} \cdot \frac{d}{z^2 - d^2}, \qquad \Omega_0(z) = \frac{\varkappa Q}{\pi(\varkappa + 1)} \cdot \frac{d}{z^2 - d^2}, \tag{6}$$

де $z = x + iy$ – координати точок, у яких визначається напружено-деформований стан.

Збурений розв'язок після задоволення крайових умов (1)–(3) пов'язаний із такою задачею лінійного спряження з кусково-неперервними коефіцієнтами для функції $\Phi_*(z)$:

$$\Phi_*^+(x) - g\Phi_*^-(x) = f(x)\,,$$

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) = -\,2\Phi_0(x), & x \in L_0\,, \\ f_1(x) = -\dfrac{2i\tau_s^*}{æ+1}\dfrac{a-|\,x\,|}{a-b}\,\mathrm{sgn}\,(x), & x \in L_1\,, \\ f_2(x) = \dfrac{2i\tau_s^*}{æ+1}\,\mathrm{sgn}\,(x), & x \in L_2\,, \end{cases}$$

$$g = \begin{cases} -1, & x \in L, \\ 1, & x \in L_1 + L_2\,, \end{cases} \tag{7}$$

функція $\Phi_0(x)$ визначена формулами (6).

Розв'язок однорідної задачі спряження ($f(x) = 0$) для (7) вибираємо у вигляді $X(z) = 1\big/\sqrt{z^2 - c^2}$. Тоді загальним розв'язком неоднорідної задачі спряження (7) буде

$$\Phi_*(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\left\{ \int\limits_{L_0} \frac{f_0(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)} + \int\limits_{L_1} \frac{f_1(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{L_2} \frac{f_2(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)} \right\} + X(z)(c_1 + c_2 z)\,,$$

де c_1, c_2 – дійсні числа. Після інтегрування, задоволення умов на нескінченності та спрощень отримуємо, що

$$\Phi_*(z) = \frac{1}{\pi(æ+1)}\left[\frac{Qd}{z^2 - d^2}\left(1 - \frac{z}{d}\frac{\sqrt{d^2 - c^2}}{\sqrt{z^2 - c^2}}\right) + \right.$$

$$\left. + \tau_s^*\left(\frac{2zf_3(a,b,c)}{\sqrt{z^2 - c^2}} + f_4(z,a,b,c) \right) \right], \tag{8}$$

причому

$$f_3(a,b,c) = \frac{1}{a-b}\left[\sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{b^2 - c^2} + b\ln\frac{b + \sqrt{b^2 - c^2}}{c} - a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{c} \right],$$

$$f_4(z,a,b,c) = \frac{1}{a-b}\left[b\Gamma_1(z,b,c) - a\Gamma_1(z,a,c) + z\big(\Gamma_2(z,b,c) - \Gamma_2(z,a,c)\big) \right],$$

$$\Gamma_1(z,\alpha,\beta) = \ln\frac{\alpha\sqrt{z^2 - \beta^2} - z\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha\sqrt{z^2 - \beta^2} + z\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}, \qquad \Gamma_2(z,\alpha,\beta) = \ln\frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{z^2 - \beta^2}}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \sqrt{z^2 - \beta^2}}.$$

Враховуючи, що розв'язком поставленої задачі є суперпозиція розв'язків (6), (8), згідно з формулами (5) отримаємо вирази для функцій напружень

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi(æ+1)}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}}\left(2\tau_s^* f_3(a,b,c) - \frac{Q\sqrt{d^2 - c^2}}{z^2 - d^2} \right) + \tau_s^* f_4\,(a,b,c) \right],$$

$$\Omega(z) = -\,æ\,\Phi(z)\,. \tag{9}$$

Формули (9), (4) описують поле напружень і деформацій у пластині з включенням, даючи можливість дослідити умови його коректності та граничної рівноваги тіла. При перетвореннях використано такі значення інтегралів:

$$\int\limits_{L_1} \frac{t\,dt}{(t-z)\sqrt{t^2-c^2}} =$$

$$= 2z\left(\sqrt{a^2-c^2}-\sqrt{b^2-z^2}\right)+z\sqrt{z^2-c^2}\,\left(\Gamma_2(z,b,c)-\Gamma_2(z,a,c)\right),$$

$$\int\limits_{L_2} \frac{\operatorname{sgn}(t)\,dt}{(t-z)\sqrt{t^2-c^2}} = 2z\ln\frac{b+\sqrt{b^2-c^2}}{c}-\sqrt{z^2-c^2}\,\Gamma_1(z,b,c),$$

$$\int\limits_{L_1} \frac{\operatorname{sgn}(t)\,dt}{(t-z)\sqrt{t^2-c^2}} =$$

$$= 2z\ln\frac{a+\sqrt{a^2-c^2}}{b+\sqrt{b^2-c^2}}+\sqrt{z^2-c^2}\,\left(\Gamma_1(z,a,c)-\Gamma_1(z,b,c)\right),$$

$$\int\limits_{L_0} \frac{\sqrt{t^2-c^2}\,dt}{t-z} = \sqrt{z^2-c^2}-z,$$

а поведінка функцій $\Gamma_1(z,\alpha,\beta)$, $\Gamma_2(z,\alpha,\beta)$ на нескінченності визначається асимптотиками

$$\lim_{z\to\infty}\Gamma_1(z,\alpha,\beta) = -\,2\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta}+O\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\lim_{z\to\infty}\Gamma_2(z,\alpha,\beta) = -\,2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\cdot\frac{1}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Довжина зон передруйнування і переміщення у них. Задовольняючи в розв'язку (9) умову неперервності напружень в околах вершин пластичних смуг $\sigma_{xy}(x,0)\to\tau_s^*$ $(x\to c-0)$, отримаємо співвідношення для визначення їх довжини:

$$\frac{1}{2\tau_s^*}Q+\sqrt{d^2-c^2}\,f_3(a,b,c)=0\,. \tag{10}$$

За результатами розв'язування рівняння (10) на рис. 2 наведено залежність відносної довжини зон передруйнування $\varepsilon=(a-c)/a$ від безрозмірного параметра навантаження $\tilde{Q}\equiv Q/(2a\tau_s^*)$ за фіксованої відстані до точок прикладання сил $\tilde{d}\equiv d/a=1.1$ для відносних довжин $\gamma\equiv(a-b)/a$ зони розпушення $\gamma=10^{-4}$, 0.05, 0.15, 0.25. Збільшення зони розпушення за фіксованого рівня навантаження видовжує зону передруйнування, хоча сама область пластичності при цьому зменшується. З розвитком зон передруйнування абсолютна різниця між їхніми довжинами для різних γ зменшується, що пояснюється зростанням впливу зон пластичності.

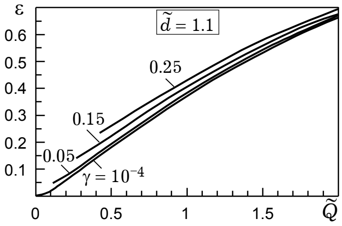

Рис. 2

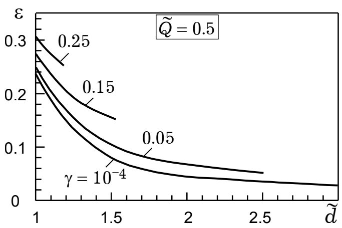

Рис. 3

На рис. 3 подано залежність тих самих довжин зон передруйнування ε від відносної відстані $\tilde{d}$ до точок прикладання сил за фіксованого рівня навантаження $\tilde{Q} = 0.5$ для тих самих значень відносних довжин зони розпушення, що й у попередньому випадку, $\gamma = 10^{-4}$, 0.05, 0.15, 0.25. Обрив ліній на рисунку зумовлений тим, що постановка задачі передбачає існування зон розпушення завдовжки γ, через що мінімально можлива довжина зони пластичності зумовлює мінімальну довжину зони передруйнування на рівні γ. У випадку безмежно малих зон розпушення $(\gamma \to 0)$ рівняння (10) спрощується:

$$\frac{Q}{2\tau_s^*} - \sqrt{d^2 - c^2}\,\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{c} = 0\,. \qquad (11)$$

У цьому випадку за малих навантажень і відповідно малих довжин зон передруйнування $(\varepsilon \ll 1)$ з використанням розвинення у ряд Тейлора за ε і збереженні лише перших доданків із рівняння (11) отримуємо

$$\sqrt{\varepsilon} = \frac{Q}{2\sqrt{2}\,a\tau_s^*}\frac{1}{\sqrt{\tilde{d}^2 - 1}} \qquad \text{або} \qquad a - c = \frac{Q^2}{8(\tau_s^*)^2}\frac{a}{d^2 - a^2}\,. \qquad (12)$$

Тобто у першому наближенні довжина зон передруйнування пропорційна квадрату прикладених сил, довжині включення та обернено пропорційна до різниці квадратів відстаней між точками прикладання сил і вершинами включення.

На рис. 4 зображено залежність безрозмірної довжини зон передруйнування ε від параметра навантаження $\tilde{Q} \equiv Q/(2a\tau_s^*)$ за безмежно малої зони розпушення для різних значень відстані $\tilde{d}$ до точок прикладання сил (криві *1* (*1′*)–*3* (*3′*) відповідають значенням $\tilde{d} = 1.5,\ 2,\ 5$). Криві *1*–*3* обчислено за точною формулою (11), а *1′*–*3′* – за наближеною формулою (12). Для значної частини спектра навантаження доволі просту наближену формулу (12) можна використовувати при обчисленні довжини зони передруйнування.

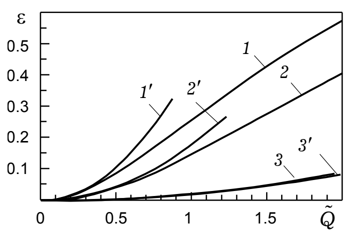

Рис. 4

Тангенціальні переміщення у зонах передруйнування (нормальні переміщення за постановкою задачі дорівнюють нулю) знайдемо згідно з формулами (4) на основі виразу $G(u' + iv')^+ = æ\Phi^+(x) + \dfrac{iæ\sigma_{xy}^+}{æ + 1}$, звідки маємо

$$G\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right)^+ = \frac{æ\tau_s^* f_4(x,a,b,c)}{\pi(æ+1)}\,.$$

Після інтегрування отримуємо зміщення (проковзування) точок матеріалу пластини відносно включення при $c \le x \le a$:

$$u(x) = \frac{æ\,\tau_s^*}{2\pi G(æ + 1)} f_5(x,a,b,c)\,, \qquad (13)$$

де

$$f_5(x,a,b,c) = \frac{1}{a - b}\Big[(a^2 + x^2)\Gamma_2(x,a,c) + {}$$
$$+ 2x\left[b\Gamma_2(x,b,c) - a\Gamma_1(x,a,c)\right] - (b^2 + x^2)\Gamma_2(x,b,c) - {}$$
$$- 2\sqrt{x^2 - c^2}\left(\sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{b^2 - c^2}\right)\Big]\,.$$

Звідси випливає, що найбільші переміщення точок матеріалу пластини відносно включення досягаються в околах вершин $x = \pm a$:

$$u_{\max} = u(a) = \frac{\text{æ}\,\tau_s^*}{\pi G(\text{æ}+1)} f_6(a,b,c), \tag{14}$$

причому

$$f_6(a,b,c) \equiv f_5(a,a,b,c) = \frac{1}{a-b}\left[\, 2a^2 \ln\frac{a}{c} + ab\Gamma_1(a,b,c) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(a^2+b^2)\Gamma_2(a,b,c) + c^2 - a^2 + \sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\,\right].$$

Зазначимо, що на кожному з відрізків L_i, $i = 1,2$, обчислення необхідно виконувати окремо, оскільки вирази для функцій $\Gamma_1(a,\alpha,\beta)$, $\Gamma_2(a,\alpha,\beta)$ при цьому є різними.

За результатами здійснених на основі формул (14), (10) обчислень на рис. 5 подано безрозмірні відносні зміщення точок пластини під торцями включення відносно цих торців (включення в цілому) $\tilde{u}(a) = \dfrac{Gu(a)}{\tau_s^* a}$ як функції від навантаження $\tilde{Q}$ за сталої відстані до точок прикладання сил $\tilde{d} = 1.1$ і сталої Мусхелішвілі $\text{æ} = 2.2$ для значень відносних довжин зони розпушення $\gamma = 10^{-4}$, 0.05, 0.15, 0.25. За сталих навантаження і фізико-механічних характеристик зі збільшенням зони розпушення зміщення точок матеріалу пластини відносно включення зростає.

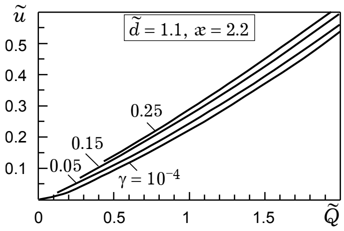

Рис. 5

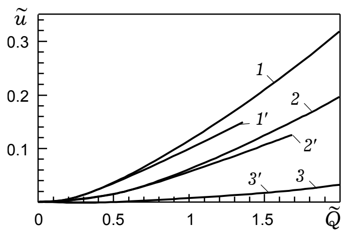

Рис. 6

У першому наближенні за відсутності зони розпушення для оцінки розривів переміщень можна скористатися формулою, отриманою після розвинення у ряд Тейлора за ε у формулах (11), (14):

$$u(a) = \frac{\text{æ}\,Q^2}{4\pi G(\text{æ}+1)\,a\tau_s^*}\,\frac{1}{\tilde{d}^2 - 1}. \tag{15}$$

На рис. 6 зображено залежність відносних переміщень $\tilde{u}(a)$ від параметра навантаження $\tilde{Q}$ за безмежно малої зони розпушення і різних відстанях до точок прикладання сил (криві *1* (*1′*)–*3* (*3′*) відповідають значенням $\tilde{d} = 1.5,\ 2,\ 5$). Криві *1*–*3* обчислено за точною формулою (14), а *1′*–*3′* – за наближеною формулою (15). Для значної частини навантаження доволі просту наближену формулу (15) можна використати під час обчислення відносних зміщень точок пластини.

Контактні напруження. Згідно з формулами (4), (9) розподіл контактних напружень уздовж межі включення – матриця є таким:

$$x \in L_0: \qquad \sigma_{yy}^+ = 0, \qquad \sigma_{xy}^+ = \frac{2\tau_s^*}{\pi} f_7(x,a,b,c),$$

$$x \in L_1 + L_2: \qquad \sigma_{yy}^+ = -\frac{(\text{æ}-1)\tau_s^*}{\pi(\text{æ}+1)} f_4(x,a,b,c), \tag{16}$$

де

$$f_7(x,a,b,c) = a\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{a^2-c^2}}{a\sqrt{c^2-x^2}} - b\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{c^2-x^2}} + \\ + x\left(\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{c^2-x^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} - \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{c^2-x^2}}{\sqrt{b^2-c^2}}\right),$$

Навантаження пластини сюди входить опосередковано через значення довжини зон за рівнянням (10). Зазначимо, що на кожному з відрізків L_i, $i = 1,2$, вирази для функції $f_4(x,a,b,c)$ є різними.

Осьові зусилля. Дотичні напруження уздовж поверхні зчеплення пластини з включенням (16), (1), (2) спричиняють появу в поперечному перерізі останньої осьового зусилля $P(x) = 2\int_x^a \sigma_{xy}(x)\,dx$, яке під час перевищення деякого граничного значення може її розірвати. Розподіл осьових зусиль на різних ділянках контакту включення з пластиною обчислюється за формулою

$$P(x) = \begin{cases} \tau_s^* \dfrac{(a-x)^2}{a-b}, & b \le |x| \le a, \\ \tau_s^*(a+b-2x), & c \le |x| \le b, \\ \dfrac{2\tau_s^*}{\pi} f_9(x,a,b,c), & 0 \le |x| \le c, \end{cases} \tag{17}$$

де

$$f_9(x,a,b,c) = \Bigg[(b^2+x^2)\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{c^2-x^2}}{\sqrt{b^2-c^2}} - \\ -(a^2+x^2)\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{c^2-x^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} + \frac{\pi}{2}(a-b)(a+b-2c) + \\ + 2x\left(b\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{c^2-x^2}} - a\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{a^2-c^2}}{a\sqrt{c^2-x^2}}\right) + \\ + \sqrt{b^2-x^2}\left(\sqrt{b^2-x^2} - \sqrt{a^2-c^2}\right)\Bigg].$$

При цьому передавання зусиль через торець включення не враховуємо.

Розподіл безрозмірних розривних осьових зусиль $\tilde{P}(x) \equiv P(x)/(2\tau_s^* a)$, обчислених за формулами (17), (10), уздовж правої половини включення для значень навантаження $\tilde{Q} = 0.5,\ 0.8$ зображено на рис. 7. Розрахунки виконано для $\tilde{d} = 2$, $\gamma = 10^{-4}$. Відмітимо існування у центральній частині включення такої області, де величина осьових зусиль змінюється незначно. Це свідчить про можливість у композиціях з достатньо довгими включеннями одночасного їх розриву на декілька (більше двох) фрагментів.

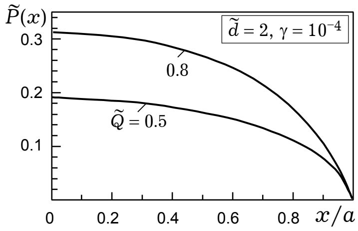

Рис. 7

Максимальне значення розривних осьових зусиль досягається посередині включення $(x = 0)$:

$$P(0) = \frac{2\tau_s^*}{\pi} f_{10}(a,b,c). \tag{18}$$

Тут

$$f_{10}(a,b,c) = \frac{1}{a-b}\left[b^2 \operatorname{arctg} \frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}} - a^2 \operatorname{arctg} \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}} + \right.$$

$$\left. + c\left(\sqrt{b^2-c^2} - \sqrt{a^2-c^2}\right) + \frac{\pi}{2}(a^2-b^2) \right].$$

Зміна довжини зони розпушення слабо впливає на розподіл осьових розривних зусиль у включенні та на їхні максимальні значення. На рис. 8 зображено залежність величини $\tilde{P}(0)$ від параметра навантаження $\tilde{Q}$ при $\tilde{d} = 1.1$, $\ae = 2.2$ як розв'язку системи рівнянь (18), (10) для значень відносних довжин зони розпушення $\gamma = 10^{-4}$, 0.05, 0.15, 0.25. Зі збільшенням довжини зони розпушення значення розривних зусиль дещо зменшується.

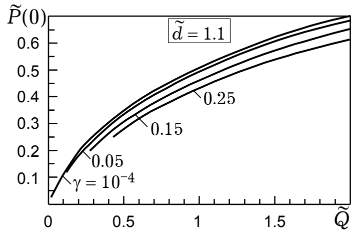

Рис. 8

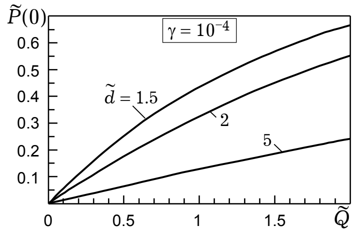

Рис. 9

Залежність максимальних осьових зусилля $\tilde{P}(0)$ від параметра навантаження $\tilde{Q}$ при $\gamma = 10^{-4}$ для відстаней до точок прикладання сил $\tilde{d} = 1.5,\ 2,\ 5$ подано на рис. 9.

Гранична рівновага та руйнування. Розглянемо два найбільш вірогідні способи розвитку руйнування в композиції.

Перший − у смугах пластичності та розпушення відбуваються зміщення точок матриці відносно включення. При досягненні ними певної межі, яка є характеристикою контактної межі композиції, відбудеться втрата зв'язку між включенням і матрицею, тобто утвориться тріщина ковзання.

Другий спосіб − дотичні напруження на поверхні матриця – включення створюють у поперечному перерізі включення осьові зусилля, які за досягнення межі міцності включення P_{ut} спричинять його розрив.

Розглянемо спочатку можливість відшарування включення. Коли максимальні переміщення $u(\pm a)$ досягають деякого граничного значення δ_{2c}, яке є характеристикою зсувної контактної міцності системи пластина – включення і встановлюється експериментально, то можлива втрата безпосереднього механічного зв'язку між включенням і пластиною − відбувається руйнування адгезійних зв'язків. Відповідна критеріальна умова

$$u(a) = \delta_{2c}, \tag{19}$$

що характеризує початок відшарування включення, аналогічна відомій [8] умові δ_c-моделі. Тому система рівнянь

$$\frac{Q^*}{2\tau_s^*} = \sqrt{d^2-c^2}\, f_3(a,b,c), \qquad \delta_{2c} = \frac{2\ae\tau_s^*}{\pi G(\ae+1)} f_6(a,b,c) \tag{20}$$

описує стан граничної рівноваги композиції, коли є можливим розшарування між включенням і пластиною, а її розв'язок дає значення відповідного цій ситуації граничного навантаження $Q = Q^*$. Виявляється, що за фіксованого δ_{2c} зі збільшенням зони розпушення допустиме граничне навантаження розшарування зменшується.

У першому наближенні за безмежно малих зон розпушення маємо

$$Q^* = 2\sqrt{\tilde{d}^2 - 1}\,\sqrt{\frac{\pi(\ae+1)G\delta_{2c} a \tau_s^*}{\ae}}. \tag{21}$$

Співвідношення (20), (21) будуть корисними для експериментальної механіки руйнування, оскільки за відомою довжиною зони передруйнування і граничним навантаженням можна для конкретних композицій оцінити критичний розрив переміщень δ_{2c} та енергію руйнування.

Розглянемо тепер можливість розривання включення. Найбільші осьові зусилля визначається за формулою (18). Зі збільшенням навантаження і розвитком зон передруйнування осьові зусилля також зростають. Їхнє збільшення у включенні відбуватиметься до граничного стану відшарування включення від матриці чи, що те саме, до досягнення розривами переміщень граничного значення δ_{2c}. Тому максимальні осьові зусилля, що можуть виникнути у включенні, визначаємо з розв'язку системи рівнянь

$$P_{\max} = \frac{2\tau_s^*}{\pi} f_{10}(a,b,c), \qquad \delta_{2c} = \frac{2æ\tau_s^*}{\pi G(æ+1)} f_6(a,b,c). \tag{22}$$

На рис. 10 зображено залежності $\tilde{P}_{\max} \equiv \equiv \dfrac{P_{\max}}{2a\tau_s^*}$ як функції від $\tilde{\delta}_{2c} = \dfrac{G\delta_{2c}}{\tau_s^* a}$, які необхідно враховувати під час проектування таких композицій з включеннями для значень $æ = 2.2$ і $\gamma = 10^{-4}$, 0.05, 0.15, 0.25.

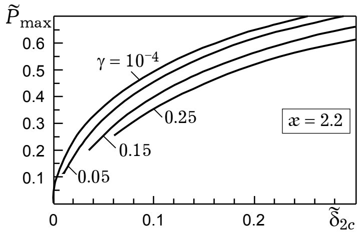

Рис. 10

З іншого боку, міцність включення на розрив є обмеженою. Для збереження цілісності включення максимальні осьові зусилля $P_{\max}$ не повинні перевищувати міцності P_{ut} включення на розрив:

$$P_{\max} \le P_{\mathrm{ut}}. \tag{23}$$

Приймаючи умову (23) за критеріальну та розв'язуючи систему рівнянь

$$\frac{Q^{**}}{2\tau_s^*} = \sqrt{d^2 - c^2}\, f_3(a,b,c), \qquad P_{\max} = \frac{2\tau_s^*}{\pi} f_{10}(a,b,c), \tag{24}$$

визначаємо граничне навантаження $Q = Q^{**}$ розриву включення. Просту формулу першого наближення отримаємо, розвинувши функції у правих частинах системи рівнянь (24) у ряд Тейлора за ε (за безмежно малих зон розпушення), звідки

$$Q^{**} = 0.5\pi P_{\mathrm{ut}} \sqrt{d^2 - a^2}. \tag{25}$$

Висновки. Таким чином, характер руйнування в композиції буде визначатися, з одного боку, міцнісними параметрами матриці чи контактного прошарку матриця – включення δ_{2c}, τ_s^* (чи $\gamma_\tau^* = 2\delta_{2c}\tau_s^*$), а з іншого – міцністю P_{ut} включення на розрив. За фіксованої довжини включення або відшаровується від матриці або розривається залежно від того, яка з граничних рівностей (19) чи (23) досягнеться раніше.

Отримані співвідношення визначають критичну довжину включення $a = a_{\mathrm{cr}}$, яка разом з пружними та міцнісними параметрами композиції визначає механізм руйнування. Якщо довжина включення більша від критичної a_{cr}, що визначається із розв'язку системи рівнянь

$$\frac{\pi P_{\mathrm{ut}}}{2\tau_s^*} = f_{10}(a_{\mathrm{cr}},b,c), \qquad \delta_{2c} = \frac{2æ\tau_s^*}{\pi G(æ+1)} f_6(a_{\mathrm{cr}},b,c),$$

то зі зростанням навантаження включення розірветься. Відповідне граничне навантаження обчислюємо з системи рівнянь (24) чи за наближеною формулою (25). При довжині включення, меншій від критичної a_{cr}, відбудеться руйнування його відшаруванням. Граничне навантаження при цьому визначають із розв'язку системи рівнянь (20) чи за наближеною формулою (21).

1. *Бережницкий Л. Т., Громяк Р. С.* К оценке предельного состояния матрицы в окрестности остроконечного жесткого включения // Физ.-хим. механика материалов. – 1977. – **13**, № 2. – С. 39–47.
2. *Бережницкий Л. Т., Кундрат Н. М.* Упругопластические деформации в окрестности жесткого включения // Проблемы прочности. – 1984. – № 11. – С. 62–69.
3. *Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Труш И. И.* Коэффициенты интенсивности напряжений возле жестких остроугольних включений // Проблемы прочности. – 1973. – № 7. – С. 3–7.
4. *Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Труш И. И.* О локальном разрушении хрупкого тела с остроконечными жесткими включениями // Проблемы прочности. – 1973. – № 10. – С. 8–11.
5. *Бережницький Л. Т., Кундрат М. М.* Локальне руйнування композиції з жорстким лінійним включенням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1995. – **31,** № 4. – С. 60–67.
6. *Бережницький Л. Т., Кундрат М. М.* Пружнопластична рівновага композиції з жорстким лінійним включенням // Доп. НАН України. – 2001. – № 1. – С. 56–60.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
8. *Панасюк В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1991. – 415 с.
9. *Панасюк В. В., Бережницкий Л. Т., Труш И. И.* Распределение напряжений около дефектов типа жестких остроугольных включений // Проблемы прочности. – 1972. – № 7. – С. 3–9.
10. *Brussat T. R., Westmann R. A.* Interfacial slip around rigid fiber inclusions // J. Compos. Mater. – 1974. – **8**, No. 4. – P. 364–377.
11. *Shioiri J., Inoue K.* Micromechanics of interfacial failure in short fiber reinforced composite materials // Reps 1st Soviet-Japanese Symp. Compos. Mater. – Moscow, 1979. – P. 286–295.

КОМПОЗИЦИЯ С ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ

В условиях плоской задачи исследуется предельное равновесие композиции с жестким линейным включением при растяжении пластины сосредоточенными силами. Локализованные зоны предразрушения (ослабленного контакта) развиваются вдоль границы пластина – включение, продвигаясь от его торцов к центральной части. Аналитическое решение задачи получено с помощью комплексных потенциалов сведением к задаче сопряжения. Исследовано влияние нагрузки на развитие зон предразрушения, распределение контактных напряжений и осевых усилий во включении. С использованием деформационного критерия разрушения установлены предельные нагрузки возможного отслоения включения или его разрыва.

COMPOSITION WITH INCLUSION AT TENSION BY CONCENTRATED FORCES

Limit equilibrium of composition with a rigid fiber inclusion at tension by concentrated forces under conditions of plane problem is studied. The localized zones of prefracture (weakened contact) develop along the plate-inclusion boundary from its ends to the central part. Analytical solution of the problem by means of complex potentials is obtained. The influence of load on development of prefracture zones, distribution of contact stresses, and axial forces in the inclusion is analyzed. Limiting loads of possible separation of the inclusion or its rupture are found using the strain criterion of rupture.

Укр. держ. ун-т водного госп-ва
та природокористування, Рівне,
Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
19.04.04