УДК 539.3

Б. В. Процюк

ФУНКЦІЇ ҐРІНА ЗАДАЧ СТАТИКИ ДЛЯ ШАРУВАТИХ ТІЛ ІЗ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИМИ МЕЖАМИ ПОДІЛУ

Побудовано з виділеними особливостями функції Ґріна двовимірних осесиметричних і тривимірних статичних задач пружності для ізотропних шаруватих півпростору та шару за чотирьох основних варіантів граничних умов і шаруватого простору, які для зазначених областей для відповідних задач визначаються на основі одних і тих самих ключових співвідношень. Регулярні доданки подано у вигляді невласних інтегралів від експоненціально спадних функцій.

Одним із методів, який успішно застосовують при розв'язуванні, зокрема, задач пружності та термопружності є, як відомо, метод інтегральних рівнянь. У класичному застосуванні до задач статики він передбачає використання фундаментального розв'язку задачі Кельвіна або функції Ґріна для безмежного простору. Очевидно, що для підвищення ефективності методу необхідно було б використовувати функції Ґріна, які є найбільш близькими до функцій Ґріна відповідних крайових задач. Але вибір тут невеликий, оскільки в теорії пружності перелік функцій Ґріна навіть для однорідних тіл є досить обмеженим. Тому виникає потреба у побудові нових функцій Ґріна, що вимагає розробки нових і вдосконалення існуючих методів розв'язування відповідних крайових задач.

Підходи до розв'язання статичних задач пружності для шаруватих тіл із довільною кількістю складових, які перебувають під дією зосереджених сил, викладено в [5, 8] (див. також наведену там бібліографію) та ін. У переважній більшості публікацій розглядаються задачі для шаруватих просторів. У працях [4, 6, 7] вказано шляхи розв'язання задач для шаруватого шару, остаточні розв'язки, однак, не наведено.

У цій статті, використовуючи функції Ґріна відповідних задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, які одержуємо в результаті виключення у вихідних задачах пружності змінних, за якими фізико-механічних характеристики неперервні, побудовано в явному вигляді функції Ґріна двовимірних осесиметричних і тривимірних задач статики для шаруватих півпростору та шару за чотирьох основних варіантів граничних умов і для шаруватого простору. Коли точки прикладання зосереджених сил і спостереження знаходяться всередині підобласті, то функції Ґріна отримуємо з виділеними особливостями без проведення спеціальних перетворень. Якщо ж ці точки виходять на поверхню підобласті, то для виділення додаткових сингулярних доданків використовуємо асимптотичну поведінку функцій Ґріна задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. Ті ключові співвідношення, на основі яких визначаються в осесиметричних задачах регулярні складові, причому для трьох зазначених областей ці співвідношення є одними й тими самими, використовуємо для визначення регулярних складових і в тривимірних задачах.

1. Функції Ґріна осесиметричних задач статики.

1.1. Шаруватий півпростір. Розглянемо віднесений до циліндричної системи координат r, φ, z шаруватий півпростір (рис. 1), який перебуває під дією неперервно розподіленої по колу радіуса ρ одиничної сили, яка напрямлена в радіальному або осьовому напрямі. Коло, центр якого знаходиться на осі Oz на віддалі ζ від початку координат, роз-

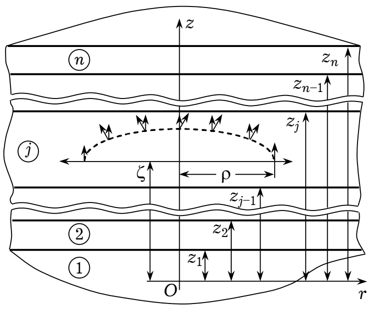


Рис. 1

міщене в паралельній до поверхонь поділу площині. Складові ізотропні частини жорстко з'єднані. Зовнішня поверхня вільна від навантажень або закріплена. Закріплення може бути жорстким, «гладким» або таким, що поверхня вільна від осьових навантажень і не зміщується у своїй площині. Для визначення прямуючих до нульових значень на нескінченності радіальних $G_r^{(k)}$ та осьових переміщень $G_z^{(k)}$, де індекс «k» вказує напрям дії сили, використовуватимемо систему рівнянь із узагальненими похідними

$$\mu(z)\left[\nabla^2 + (\delta_{zi} - 1)r^{-2}\right]G_i^{(k)} + [\lambda(z) + \mu(z)]\,\varepsilon_{,i}^{(k)} +$$

$$+ \sum_{q=1}^{n-1}\left[\tilde{\mu}_q (G_{i,z}^{(k)} + G_{z,i}^{(k)}) + \delta_{zi}\tilde{\lambda}_q\, \varepsilon^{(k)}\right]\Big|_{z=z_q-0} \delta(z - z_q) =$$

$$= -\frac{\delta_{ik}}{\rho}\,\delta(r-\rho)\delta(z-\zeta), \qquad i,k = r,z\,, \tag{1}$$

і такі варіанти граничних умов при $z = z_n$:

$$\textbf{1}^\circ.\quad \tau_{rz}^{(k)} = \tau_{zz}^{(k)} = 0\,; \qquad \textbf{2}^\circ.\quad G_r^{(k)} = G_z^{(k)} = 0\,;$$

$$\textbf{5}^\circ.\quad G_z^{(k)} = 0\,,\ \tau_{rz}^{(k)} = 0\,; \qquad \textbf{6}^\circ.\quad G_r^{(k)} = 0\,,\ \tau_{zz}^{(k)} = 0\,, \tag{2}$$

де

$$\begin{Bmatrix} \lambda(z) \\ \mu(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{Bmatrix} + \sum_{q=1}^{n-1} \begin{Bmatrix} \tilde{\lambda}_q \\ \tilde{\mu}_q \end{Bmatrix} S(z - z_q)\,, \tag{3}$$

$\tilde{\lambda}_q = \lambda_{q+1} - \lambda_q$, $\tilde{\mu}_q = \mu_{q+1} - \mu_q$; λ_j, μ_j – коефіцієнти Ляме j-ї підобласті; $S(x)$ – функція Гевісайда; $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака; δ_{ik} – символ Кронекера;

$$\nabla^2 = \partial_{,rr} + r^{-1}\partial_{,r} + \partial_{,zz}\,, \qquad \varepsilon^{(k)} = G_{r,r}^{(k)} + r^{-1}G_r^{(k)} + G_{z,z}^{(k)}\,,$$

$$\tau_{ij}^{(k)} = \mu(z)\big(G_{i,j}^{(k)} + G_{j,i}^{(k)}\big) + \lambda(z)\,\varepsilon^{(k)}\delta_{ij}\,, \qquad i,j = r,z\,.$$

Застосувавши до (1), (2) інтегральне перетворення Ганкеля, отримаємо відносно трансформант переміщень

$$\bar{G}_r^{(k)} = \int_0^\infty r\,G_r^{(k)} J_1(\xi r)\,dr\,, \qquad \bar{G}_z^{(k)} = \int_0^\infty r\,G_z^{(k)} J_0(\xi r)\,dr$$

для фіксованого k чотири задачі для системи двох звичайних частково вироджених диференціальних рівнянь другого порядку. Розв'язки їх знайдемо за допомогою відповідних функцій Ґріна ${}_s\tilde{G}_i^{(k)}$ [2]:

$${}_s\tilde{G}_i^{(k)} = {}_s\tilde{G}_{i1}^{(k)} + \sum_{l=1}^{n-1} \big({}_s\tilde{G}_{i\,l+1}^{(k)} - {}_s\tilde{G}_{il}^{(k)}\big) S(z - z_l)\,,$$

$${}_s\tilde{G}_{i\nu}^{(k)} = {}_s\tilde{G}_{i\nu}^{(kt)} + \sum_{t=1}^{n-1} \big({}_s\tilde{G}_{i\nu}^{(k\,t+1)} - {}_s\tilde{G}_{i\nu}^{(kt)}\big) S(\zeta - z_t)\,,$$

$${}_s\tilde{G}_{ij}^{(kp)} = {}_s\tilde{G}_{ij}^{(kp)}(z,\zeta), \qquad s = 1,2,5,6\,. \tag{4}$$

Нехай ${}_s\tilde{G}_i^{(k)}$ – розв'язок задачі, який відповідає s-му варіанту трансформованих граничних умов (2). Тоді

$${}_s\bar{G}_i^{(k)} = J_k(\xi\rho)\,{}_s\tilde{G}_i^{(k)}\,, \tag{5}$$

де $J_r(x) = J_1(x)$, $J_z(x) = J_0(x)$.

Перейшовши в (5) до оригіналів, для визначення переміщень у точках $M(r, z)$ j-ї підобласті, коли зосереджена сила прикладена в точках $M_0(\rho, \zeta)$ p-ї підобласті, дістанемо наступні вирази:

$$
{}_sG_{ij}^{(kp)}(M, M_0) = \int_0^\infty {}_s\tilde{G}_{ij}^{(kp)} J_k(\xi\rho) J_i(\xi r)\, \xi\, d\xi\,,
$$

$$
{}_sG_{kj}^{(ip)}(M, M_0) = {}_sG_{ip}^{(kj)}(M_0, M)\,. \tag{6}
$$

Якщо точки $M(r, z)$ і $M_0(\rho, \zeta)$ розміщені в j-й підобласті ($1 \le j < n$), то, виділивши в (6) доданки, які матимуть особливість лише тоді, коли ці точки будуть на поверхнях поділу, матимемо

$$
\begin{aligned}
{}_sG_{ij}^{(ij)}(M, M_0) &= {}_sG_{ij}^{*(ij)}(M, M_0) + k_{6j}\big[k_{4j}A_{ii}^{(0)}(z-\zeta) - (z-\zeta)\,\delta_i A_{ii}^{(1)}(z-\zeta)\big] + \\
&+ 2k_{6j}\left\{L_{0j}A_{ii}^{(0)}(\tilde{p}_j) + L_{*3}^{(j-1)}\left[\delta_i k_{4j}\tilde{p}_j A_{ii}^{(1)}(\tilde{p}_j)/2 - \zeta_{j-1}^* z_{j-1}^* A_{ii}^{(2)}(\tilde{p}_j)\right]\right\}(1-\delta_{j1})/P_j^* + \\
&+ k_{6j}\left\{R_4^{*(j+1)}A_{ii}^{(0)}(p_j) - R_2^{*(j+1)}\left[\delta_i k_{4j} p_j A_{ii}^{(1)}(p_j) - 2\zeta_j^* z_j^* A_{ii}^{(2)}(p_j)\right]\right\}/P_{j+1}^*\,, \\
{}_sG_{rj}^{(zj)}(M, M_0) &= {}_sG_{rj}^{*(zj)}(M, M_0) + k_{6j}(z-\zeta)A_{01}^{(1)}(z-\zeta) - \\
&- 2k_{6j}\left\{L_{*4}^{(j-1)}A_{01}^{(0)}(\tilde{p}_j) + L_{*3}^{(j-1)}\left[k_{4j}(z-\zeta)A_{01}^{(1)}(\tilde{p}_j)/2 + \zeta_{j-1}^* z_{j-1}^* A_{01}^{(2)}(\tilde{p}_j)\right]\right\}(1-\delta_{j1})/P_j^* + \\
&+ k_{6j}\left\{R_3^{*(j+1)}A_{01}^{(0)}(p_j) + R_2^{*(j+1)}\left[k_{4j}(z-\zeta)A_{01}^{(1)}(p_j) - 2\zeta_j^* z_j^* A_{01}^{(2)}(p_j)\right]\right\}/P_{j+1}^*\,.
\end{aligned} \tag{7}
$$

При $j = p = n$ формули будуть такими:

$$
\begin{aligned}
{}_sG_{in}^{(in)}(M, M_0) &= {}_sG_{in}^{*(in)}(M, M_0) + k_{6n}\big[k_{4n}A_{ii}^{(0)}(z-\zeta) - (z-\zeta)\,\delta_i A_{ii}^{(1)}(z-\zeta)\big] + \\
&+ 2k_{6n}\left\{L_{0n}A_{ii}^{(0)}(\tilde{p}_n) + L_{*3}^{(n-1)}\left[\delta_i k_{4n}\tilde{p}_n A_{ii}^{(1)}(\tilde{p}_n)/2 - \zeta_{n-1}^* z_{n-1}^* A_{ii}^{(2)}(\tilde{p}_n)\right]\right\}/P_n^* + \\
&+ k_{6n}\left\{R_{s4}^{(n)}A_{ii}^{(0)}(p_n) - R_{s2}^{(n)}\left[\delta_i k_{4n} p_n A_{ii}^{(1)}(p_n) - 2\zeta_n^* z_n^* A_{ii}^{(2)}(p_n)\right] + \right. \\
&\left. + 2\tilde{H}_s^{(nn)}\left[-p_n A_{ii}^{(1)}(p_n) + \delta_i k_{4n} A_{ii}^{(0)}(p_n)\right]\right\}/æ_{sn}\,, \\
{}_sG_{rn}^{(zn)}(M, M_0) &= {}_sG_{rn}^{*(zn)}(M, M_0) + k_{6n}(z-\zeta)A_{01}^{(1)}(z-\zeta) - \\
&- 2k_{6n}\left\{L_{*4}^{(n-1)}A_{01}^{(0)}(\tilde{p}_n) + L_{*3}^{(n-1)}\left[k_{4n}(z-\zeta)A_{01}^{(1)}(\tilde{p}_n)/2 + \zeta_{n-1}^* z_{n-1}^* A_{01}^{(2)}(\tilde{p}_n)\right]\right\}/P_n^* + \\
&+ \left\{R_{s3}^{(n)}A_{01}^{(0)}(p_n) + R_{s2}^{(n)}\left[k_{4n}(z-\zeta)A_{01}^{(1)}(p_n) - 2\zeta_n^* z_n^* A_{01}^{(2)}(p_n)\right] + \right. \\
&\left. + 2p_n\tilde{H}_s^{(nn)}A_{01}^{(1)}(p_n)\right\}/æ_{sn}\,.
\end{aligned} \tag{8}
$$

У співвідношеннях (7), (8), крім позначень, наведених вище та в [2], використано такі:

$$
{}_sG_{ij}^{*(kj)}(M, M_0) = 2k_{6j}\int_0^\infty {}_s\bar{G}_{ij}^{*(kj)} J_k(\xi\rho) J_r(\xi r)\, d\xi, \qquad 1 \le j \le n\,,
$$

$$
{}_s\bar{G}_{i1}^{*(i1)} = {}_s\omega_{ii}^{(21)}\, e^{-\xi p_1}/2, \qquad {}_s\bar{G}_{r1}^{*(z1)} = {}_s\omega_{rz}^{(21)}\, e^{-\xi p_1}/2\,,
$$

$$
{}_s\omega_{ii}^{(21)} = \Omega_{3is}^{(01)}(z, \zeta)/P_{sn} - \tilde{\Omega}_{3i}^{(01)}(z, \zeta)/P_2^*\,,
$$

$$
{}_s\omega_{rz}^{(21)} = \Omega_{6s}^{(01)}(z, \zeta)/P_{sn} - \tilde{\Omega}_{6}^{(01)}(z, \zeta)/P_2^*\,;
$$

$$ {}_s\bar{G}_{ij}^{*(ij)} = {}_s\omega_{ii}^{(1j)}\, e^{-\xi\tilde{p}_j} + {}_s\omega_{ii}^{(2j)}\, e^{-\xi\, p_j} + {}_s\omega_{ii}^{(3j)}/P_{sn}\,, $$

$$ {}_s\bar{G}_{rj}^{*(zj)} = {}_s\omega_{rz}^{(1j)}\, e^{-\xi\,\tilde{p}_j} + {}_s\omega_{rz}^{(2j)}\, e^{-\xi\, p_j} + {}_s\omega_{rz}^{(3j)}/P_{sn}, \quad 1 < j \le n\,; $$

$$ {}_s\omega_{ii}^{(1j)} = R_{s1}^{(0j)}\Omega_{4i}^{(0j)}(z,\zeta)/P_{sn} - \tilde{\Omega}_{4i}^{(0j)}(z,\zeta)/P_j^*\,, $$

$$ {}_s\omega_{ii}^{(2j)} = \tilde{L}_{j-1}^{+}\Omega_{3is}^{(0j)}(z,\zeta)/P_{sn} - \tilde{\Omega}_{3i}^{(0j)}(z,\zeta)/(2P_{j+1}^*)\,, $$

$$ {}_s\omega_{rz}^{(1j)} = R_{s1}^{(0j)}\Omega_{7}^{(0j)}(z,\zeta)/P_{sn} - \tilde{\Omega}_{7}^{(0j)}(z,\zeta)/P_j^*\,, $$

$$ {}_s\omega_{rz}^{(2j)} = \tilde{L}_{j-1}^{+}\Omega_{6s}^{(0j)}(z,\zeta)/P_{sn} - \tilde{\Omega}_{6}^{(0j)}(z,\zeta)/(2P_{j+1}^*)\,, $$

$$ \tilde{\Omega}_{3i}^{(0j)}(z,\zeta) = R_2^{*(j+1)}(-\delta_i k_{4j}\xi\, p_j + 2\xi^2\zeta_j^* z_j^*) + R_4^{*(j+1)}\,, $$

$$ \tilde{\Omega}_{6}^{(0j)}(z,\zeta) = R_3^{*(j+1)} + R_2^{*(j+1)}(k_{4j}\xi\, y - 2\xi^2\zeta_j^* z_j^*), \quad 1 < j < n\,, $$

$$ {}_s\omega_{ii}^{(1n)} = æ_{sn}\Omega_{4i}^{(0n)}(z,\zeta)/P_{sn} - \tilde{\Omega}_{4i}^{(0n)}(z,\zeta)/P_n^*\,, $$

$$ {}_s\omega_{ii}^{(2n)} = \Omega_{3is}^{(0n)}(z,\zeta)\big[\,\tilde{L}_{n-1}^{+}/P_{sn} - (2æ_{sn})^{-1}\big]\,, $$

$$ {}_s\omega_{rz}^{(1n)} = æ_{sn}\Omega_{7}^{(0n)}(z,\zeta)/P_{sn} - \tilde{\Omega}_{7}^{(0n)}(z,\zeta)/P_n^*\,, $$

$$ {}_s\omega_{rz}^{(2n)} = \Omega_{6s}^{(0n)}(z,\zeta)\big[\,\tilde{L}_{n-1}^{+}/P_{sn} - (2æ_{sn})^{-1}\big]\,; $$

$$ \tilde{\Omega}_{4i}^{(0j)}(z,\zeta) = L_{*3}^{(j-1)}(\delta_i k_{4j}\xi\,\tilde{p}_j/2 - \xi^2 z_{j-1}^*\zeta_{j-1}^*) + L_{0j}\,, $$

$$ \tilde{\Omega}_{7}^{(0j)}(z,\zeta) = -\,L_{*3}^{(j-1)}(k_{4j}\xi\, y/2 + \xi^2 z_{j-1}^*\zeta_{j-1}^*) - L_{*4}^{(j-1)}\,, $$

$$ {}_s\omega_{ii}^{(3j)} = -\,2R_{s1}^{(1,j)}\tilde{L}_{j-1}^{-}\Omega_{1i}^{(j)}(z,\zeta)e^{-4\xi h_j} + \Omega_{2is}^{(j)}(z,\zeta)e^{-2\xi h_j} + $$

$$ + \tilde{L}_{j-1}^{-}\Omega_{3is}^{(1,j)}(z,\zeta)e^{-\xi(\tilde{p}_j+2h_j)} + R_{s1}^{(1,j)}\Omega_{4i}^{(1,j)}(z,\zeta)e^{-\xi(p_j+2h_j)}\,, $$

$$ {}_s\omega_{rz}^{(3j)} = -\,2R_{s1}^{(1,j)}\tilde{L}_{j-1}^{-}\xi y\,\mathrm{ch}\,\xi y e^{-4\xi h_j} + \Omega_{5s}^{(j)}(z,\zeta)e^{-2\xi h_j} + $$

$$ + \tilde{L}_{j-1}^{-}\Omega_{6s}^{(1,j)}(z,\zeta)e^{-\xi(\tilde{p}_j+2h_j)} + R_{s1}^{(1,j)}\Omega_{7}^{(1,j)}(z,\zeta)e^{-\xi(p_j+2h_j)}, \quad 1 < j \le n\,; $$

$$ æ_{1j} = 1, \quad æ_{2j} = k_{4j}, \quad æ_{3j} = -\,æ_{4j} = k_{1j}, \quad æ_{5j} = æ_{6j} = 2\,, $$

$$ P_1^* = 1, \quad P_j^* = K_{3j}(k_{4j}K_{1j}^2 + k_{4,j-1} + 2k_{1j}K_{1j}k_{1,j-1}) + 4K_{7j}\,, $$

$$ R_2^{*(j+1)} = K_{3,j+1}(K_{1,j+1} - 1)(1 + k_{4,j+1}K_{1,j+1}), \quad R_3^{*(j+1)} = k_{4j}^2 R_2^{*(j+1)} - R_4^{*(j+1)}, $$

$$ R_4^{*(j+1)} = K_{3,j+1}(\nu_j^* k_{4,j+1}K_{1,j+1}^2 - k_{4j}^2 - 2k_{1j}k_{4j}k_{1,j+1}K_{1,j+1})\,, $$

$$ L_{0j} = -k_{4j}^2 L_{*3}^{(j-1)}/2 - L_{*4}^{(j-1)}, \qquad L_{*3}^{(j-1)} = K_{3j}(K_{1j}^2 - k_{4,j-1} + 2K_{1j}k_{1,j-1})\,, $$

$$ 8k_{0j}L_{*4}^{(j-1)} = k_{1j}k_{4,j-1} - k_{4j}K_{1j}k_{1,j-1}, \quad \tilde{p}_j = z + \zeta - 2z_{j-1}, \quad p_j = 2z_j - z - \zeta\,, $$

$$ A_{rr}^{\alpha}(x) = A_{11}^{\alpha}(x), \quad A_{zz}^{\alpha}(x) = A_{00}^{\alpha}(x)\,. $$

Невласні інтеграли $A_{\mu\nu}^{\alpha}(p) = \int_0^{\infty} \xi^{\alpha} e^{-p\xi} J_{\mu}(\xi\rho) J_{\nu}(\xi r)\, d\xi$ обчислюємо за такими формулами [1]:

$$ A_{00}^{(0)}(p) = \frac{k}{\pi\sqrt{\rho\, r}}\,\mathbf{K}(k), \qquad A_{00}^{(1)}(p) = \frac{pk^3}{4\pi(r\rho)^{3/2}k_1^2}\,\mathbf{E}(k)\,, $$

$$ A_{00}^{(2)}(p) = \frac{k^3}{16\pi(r\rho)^{3/2}k_1^2}\left\{\left[\,\frac{2k^2p^2(2-k^2)}{k_1^2 r\rho} - 4\right]\mathbf{E}(k) - \frac{p^2k^2}{r\rho}\,\mathbf{K}(k)\right\}, $$

$$A_{01}^{(0)}(p) = -\frac{pk}{2\pi(r^3\rho)^{1/2}}\left[\mathbf{K}(k) + \frac{r-\rho}{r+\rho}\mathbf{\Pi}(k^*, k)\right] + \frac{1}{r}S(r-\rho),$$

$$A_{01}^{(1)}(p) = \frac{k^3(r^2-\rho^2-p^2)}{8\pi r^{5/2}\rho^{3/2}k_1^2}\mathbf{E}(k) + \frac{k}{2\pi r^{3/2}\rho^{1/2}}\mathbf{K}(k),$$

$$A_{01}^{(2)}(p) = \frac{pk^3}{8\pi r^{5/2}\rho^{3/2}k_1^2}\left\{\left[k^4\frac{r^4-(\rho^2+p^2)^2}{4r^2\rho^2k_1^2} + 3\right]\mathbf{E}(k) - \frac{k^2(r^2-\rho^2-p^2)}{4r\rho}\mathbf{K}(k)\right\},$$

$$A_{11}^{(0)}(p) = \frac{(2-k^2)\mathbf{K}(k) - 2\mathbf{E}(k)}{\pi k\sqrt{r\rho}}, \qquad A_{11}^{(1)}(p) = \frac{pk}{2\pi(r\rho)^{3/2}}\left[\left(1-\frac{1}{2}k^2\right)k_1^{-2}\mathbf{E}(k) - \mathbf{K}(k)\right],$$

$$A_{11}^{(2)}(p) = \frac{k}{2\pi(r\rho)^{3/2}}\left\{\frac{k^2}{4r\rho k_1^2}(k^4p^2k_1^{-2} - r^2 - \rho^2)\mathbf{E}(k) + \left[1 - \frac{p^2k^2(2-k^2)}{8k_1^2 r\rho}\right]\mathbf{K}(k)\right\},$$

$k^2 = \dfrac{4r\rho}{(r+\rho)^2+p^2}$, $k_1^2 = 1-k^2$, $k^* = \dfrac{4r\rho}{(r+\rho)^2}$; $\mathbf{K}(x)$, $\mathbf{E}(x)$ і $\mathbf{\Pi}(x,y)$ − повні еліптичні інтеграли першого, другого і третього роду.

Коли точки $M(r,z)$ і $M_0(\rho,\zeta)$ розміщені відповідно в j-й та ($j+1$)-й підобластях, то, виділивши в (6) особливість, яка виникне при виході цих точок на поверхню поділу, одержимо

$$
\begin{aligned}
{}_sG_{rj}^{(r,j+1)}(M,M_0) &= {}_sG_{rj}^{*(r,j+1)}(M,M_0) + k_{7,j+1}\left[2k_{8j}A_{11}^{(0)}(\zeta-z) + \varphi_{0j}(z,\zeta)A_{11}^{(1)}(\zeta-z)\right],\\
{}_sG_{zj}^{(r,j+1)}(M,M_0) &= {}_sG_{zj}^{*(r,j+1)}(M,M_0) + k_{7,j+1}\left[k_{11,j}A_{10}^{(0)}(\zeta-z) - \varphi_{0j}(z,\zeta)A_{10}^{(1)}(\zeta-z)\right],\\
{}_sG_{rj}^{(z,j+1)}(M,M_0) &= {}_sG_{rj}^{*(z,j+1)}(M,M_0) + k_{7,j+1}\left[k_{11,j}A_{01}^{(0)}(\zeta-z) + \varphi_{0j}(z,\zeta)A_{01}^{(1)}(\zeta-z)\right],\\
{}_sG_{zj}^{(z,j+1)}(M,M_0) &= {}_sG_{zj}^{*(z,j+1)}(M,M_0) + k_{7,j+1}\left[2k_{8j}A_{00}^{(0)}(\zeta-z) - \varphi_{0j}(z,\zeta)A_{00}^{(1)}(\zeta-z)\right],\\
&\qquad 1 \le j < n, \qquad (9)
\end{aligned}
$$

де

$${}_sG_{ij}^{*(k,j+1)}(M,M_0) = \int_0^\infty {}_s\bar{G}_{ij}^{*(k,j+1)}\, J_k(\xi\rho)J_i(\xi r)\,\xi\,d\xi,$$

$${}_s\bar{G}_{ij}^{*(k,j+1)} = {}_s\tilde{G}_{ij}^{(k,j+1)} - k_{7,j+1}\xi^{-1}\varphi_{ik}^{(j+1)}(\xi,z,\zeta)\,e^{-\xi(\zeta-z)},$$

$$\varphi_{rr}^{(j+1)}(\xi,z,\zeta) = 2k_{8j} + \xi\varphi_{0j}(z,\zeta), \qquad \varphi_{zr}^{(j+1)}(\xi,z,\zeta) = k_{11,j} - \xi\varphi_{0j}(z,\zeta),$$

$$\varphi_{rz}^{(j+1)}(\xi,z,\zeta) = k_{11,j} + \xi\varphi_{0j}(z,\zeta), \qquad \varphi_{zz}^{(j+1)}(\xi,z,\zeta) = 2k_{8j} - \xi\varphi_{0j}(z,\zeta),$$

$$\varphi_{0j}(z,\zeta) = k_{9,j+1}(z-z_j) - k_{10,j}(\zeta-z_j), \qquad k_{7,j+1} = (32\mu_{j+1}k_{0,j+1}^2P_{j+1}^*)^{-1},$$

$$k_{8j} = k_{4j}k_{0,j+1} + k_{4,j+1}k_{0j}K_{1,j+1}, \qquad k_{9,j+1} = 1 + k_{4,j+1}K_{1,j+1},$$

$$k_{10,j+1} = k_{4j} + K_{1,j+1}, \qquad k_{11,j} = k_{4,j+1}k_{1j}K_{1,j+1} - k_{4j}k_{1,j+1}.$$

1.2. Шаруватий простір. Якщо в (6), (7), (9) знехтувати доданками, що містять z_n (спрямувати z_n до нескінченності), то одержимо відповідні співвідношення для елементів матриць функцій Ґріна для шаруватого простору, в яких тепер при $j, p \neq n$, а також при $j \neq n$, $p = n$ необхідно замінити $H_{si}^{(np)}$ на $H_i^{*(np)}$, P_{sn} на P_n^{**}, де

$$H_i^{*(np)} = K_{5n} k_{4n} H_{1i}^{(n-1,p)} + K_{3n} H_{2i}^{(n-1,p)} - 2K_{6n} k_{1n} H_{4i}^{(n-1,p)} + \\ + K_{7n} \left(H_{5i}^{(n-1,p)} + H_{6i}^{(n-1,p)} \right),$$

$$P_n^{**} = K_{5n} k_{4n} P_{1,n-1} + K_{3n} P_{2,n-1} - 2K_{6n} k_{1n} P_{4,n-1} + K_{7n} \left(P_{5,n-1} + P_{6,n-1} \right). \qquad (10)$$

При $j = p = n$ формули будуть такими:

$$k_{6n}^{-1} G_{in}^{(in)}(M, M_0) = 2 \int_0^\infty \omega_{ii}^{(1n)} e^{-\xi \tilde{p}_n} J_i(\xi\rho) J_i(\xi r)\, d\xi + k_{4n} A_{ii}^{(0)}(z-\zeta) - \\ - (z-\zeta)\delta_i A_{ii}^{(1)}(z-\zeta) + 2\left\{ L_{0n} A_{ii}^{(0)}(\tilde{p}_n) + \right. \\ \left. + L_{*3}^{(n-1)} \left[\delta_i k_{4n} \tilde{p}_n A_{ii}^{(1)}(\tilde{p}_n)/2 - \zeta_{n-1}^* z_{n-1}^* A_{ii}^{(2)}(\tilde{p}_n) \right] \right\} / P_n^*,$$

$$k_{6n}^{-1} G_{rn}^{(zn)}(M, M_0) = 2 \int_0^\infty \omega_{rz}^{(1n)} e^{-\xi \tilde{p}_n} J_0(\xi\rho) J_1(\xi r)\, d\xi + (z-\zeta) A_{01}^{(1)}(z-\zeta) - \\ - 2\left\{ L_{*4}^{(n-1)} A_{01}^{(0)}(\tilde{p}_n) + L_{*3}^{(n-1)} \left[k_{4n}(z-\zeta) A_{01}^{(1)}(\tilde{p}_n)/2 + \zeta_{n-1}^* z_{n-1}^* A_{01}^{(2)}(\tilde{p}_n) \right] \right\} / P_n^*,$$

де

$$\omega_{ii}^{(1n)} = \frac{\Omega_{4i}^{(0n)}(z,\zeta)}{P_n^{**}} - \frac{\tilde{\Omega}_{4i}^{(0n)}(z,\zeta)}{P_n^*}, \qquad \omega_{rz}^{(1n)} = \frac{\Omega_7^{(0n)}(z,\zeta)}{P_n^{**}} - \frac{\tilde{\Omega}_7^{(0n)}(z,\zeta)}{P_n^*}.$$

Необхідно відмітити, що отримані співвідношення для шаруватого простору не залежать від індексу «s», тобто, як і треба було сподіватися, від граничних умов (2).

1.3. Шаруватий шар. Встановлено, що з функцій Ґріна для шаруватого півпростору, можна отримати функції Ґріна ${}_s^m G_i^{(k)}(M, M_0)$, $m = 1, 2, 5, 6$, для шаруватого шару з такими ж варіантами граничних умов, але з кількістю складових частин, на одиницю меншою, ніж у півпросторі. Для цього потрібно вилучити з розгляду (рис. 1) підобласть з номером «1» і залежно від варіанту граничних умов на новоутвореній зовнішній границі $z = z_1 = 0$ надати в рекурентних співвідношеннях для визначення P_{sn} таких початкових значень:

$$P_{11} = P_{31} = P_{41} = P_{51} = P_{61} = 0, \; P_{21} = k_{41} \quad \text{для} \quad {}_s\tau_{zz}^{(k)} = {}_s\tau_{rz}^{(k)} = 0 \qquad (m = 1),$$

$$P_{21} = P_{31} = P_{41} = P_{51} = P_{61} = 0, \; P_{11} = 1 \quad \text{для} \quad {}_sG_r^{(k)} = {}_sG_z^{(k)} = 0 \qquad (m = 2),$$

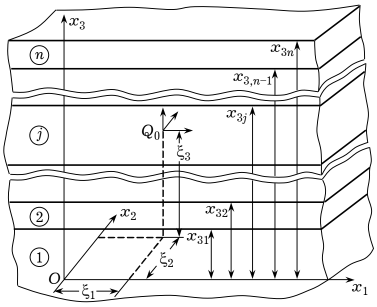
$$P_{11} = P_{21} = P_{31} = P_{41} = P_{51} = 0, \; P_{61} = 2 \quad \text{для} \quad {}_sG_z^{(k)} = 0, \; {}_s\tau_{rz}^{(k)} = 0 \qquad (m = 5),$$

$$P_{11} = P_{21} = P_{31} = P_{41} = P_{61} = 0, \; P_{51} = 2 \quad \text{для} \quad {}_sG_r^{(k)} = 0, \; {}_s\tau_{zz}^{(k)} = 0 \qquad (m = 6). \qquad (11)$$

Зауважимо, що функції ${}_s^1 G_i^{(k)}(M, M_0)$ та ${}_s^2 G_i^{(k)}(M, M_0)$ збігаються з функціями, які отримаємо, спрямувавши у ${}_s G_i^{(k)}(M, M_0)$ модуль зсуву μ_1 відповідно до нуля або нескінченності.

2. Тривимірні функції Ґріна.

2.1. Шаруватий півпростір. Розглянемо віднесений до декартової системи координат x_1, x_2, x_3 шаруватий півпростір (рис. 2), складові ізотропні частини якого жорстко з'єднані. Нехай у довільній точці $Q_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ прикладено одиничну силу, яка діє у напрямі однієї з осей координат. Зовнішня поверхня вільна від навантажень або закріплена одним із тих способів, що й в осесиметричному випадку. Для визначення прямуючих до нульових значень на нескінченності компонент вектора переміщень $G_i^{(k)}$, де індекс «k» вказує напрям дії сили, використовуємо систему рівнянь з узагальненими похідними



$$\mu G_{i,jj}^{(k)} + (\lambda + \mu)\varepsilon_{,i}^{(k)} +$$
$$+ \sum_{q=1}^{n-1} \left[\tilde{\mu}_q (G_{i,3}^{(k)} + G_{3,i}^{(k)}) + \delta_{i3} \tilde{\lambda}_q \varepsilon^{(k)} \right] \Big|_{x_3 = x_{3q} - 0} \delta(x_3 - x_{3q}) =$$
$$= - \delta_{ik} \delta(y_1) \delta(y_2) \delta(y_3), \qquad i, j, k = 1, 2, 3, \tag{12}$$

і такі варіанти граничних умов при $x_3 = x_{3n}$:

$$\textit{1}^\circ. \quad \tau_{3i}^{(k)} = 0, \ i = 1, 2, 3; \qquad \textit{2}^\circ. \quad G_i^{(k)} = 0, \ i = 1, 2, 3;$$

$$\textit{5}^\circ. \quad G_3^{(k)} = 0, \ \tau_{3i}^{(k)} = 0, \ i = 1, 2; \qquad \textit{6}^\circ. \quad G_i^{(k)} = 0, \ i = 1, 2, \ \tau_{33}^{(k)} = 0. \tag{13}$$

Тут $y_i = x_i - \xi_i$; $\varepsilon^{(k)} = G_{i,j}^{(k)}$; $\tau_{ij}^{(k)} = \mu(x_3)(G_{i,j}^{(k)} + G_{j,i}^{(k)}) + \lambda(x_3)\varepsilon^{(k)}\delta_{ij}$; $\lambda(x_3)$, $\mu(x_3)$ – коефіцієнти Ляме, які мають вигляд (3).

Розв'язок системи рівнянь (12) за граничних умов (13) шукатимемо у вигляді [5], відповідному до зображення інтегралами Фур'є добутку δ-функцій:

$$\delta(y_1)\delta(y_2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos \eta_1 y_1 \cos \eta_2 y_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 .$$

Як наслідок для фіксованого k отримаємо чотири задачі для системи трьох звичайних частково вироджених диференціальних рівнянь другого порядку, розв'язки яких наведено в [3]. З урахуванням цих розв'язків переміщення у шаруватому півпросторі в точці $Q(x_1, x_2, x_3)$ j-ї підобласті, коли зосереджена сила прикладена в точці $Q_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ p-ї підобласті, для s-го варіанту граничних умов (13) визначатимуться за формулами

$${}_sG_{ij}^{(ip)} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty {}_s\bar{G}_{ij}^{(ip)} \cos \eta_1 y_1 \cos \eta_2 y_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2, \quad i = 1, 2, 3,$$

$${}_sG_{ij}^{(kp)} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty {}_s\bar{G}_{ij}^{(kp)} \sin \eta_1 y_1 \sin \eta_2 y_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2, \quad i, k = 1, 2, \ i \neq k,$$

$${}_sG_{ij}^{(kp)} = \frac{(-1)^k}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty {}_s\bar{G}_{ij}^{(kp)} \cos \eta_1 y_1 \sin \eta_2 y_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2, \quad i, k = 2, 3, \ i \neq k,$$

$${}_sG_{ij}^{(kp)} = \frac{\delta_{3k} - \delta_{1k}}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty {}_s\bar{G}_{ij}^{(kp)} \sin \eta_1 y_1 \cos \eta_2 y_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2, \quad i, k = 1, 3, \ i \neq k, \tag{14}$$

де ${}_s\bar{G}_{ij}^{(kp)}$ збігаються з ${}_s\bar{G}_i^{(k)}(x_3, \xi_3)$ [3] при $x_{3,j-1} < x_3 < x_{3j}$, $x_{3,p-1} < \xi_3 < x_{3p}$.

Якщо точки $Q(x_1, x_2, x_3)$ і $Q_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ розміщені в j-й підобласті, $1 \le j < n$, то, виділивши в (14) доданки, які матимуть особливість лише тоді, коли ці точки є на поверхнях поділу, отримаємо

$$
\begin{aligned}
{}_sG_{ij}^{(ij)}(Q,Q_0) &= \frac{k_{6j}}{2\pi}\left[\frac{k_{4j}}{R(y_3)} + \frac{y_i^2}{R^3(y_3)}\right] + \\
&+ \frac{1}{4\pi\mu_j}\left[\upsilon_j D_{3-i,3-i}^{(-3)}(\tilde{p}_j)(1-\delta_{j1}) - \upsilon_{j+1} D_{3-i,3-i}^{(-3)}(p_j)\right] + \\
&+ \frac{k_{6j}}{\pi P_j^*}\left\{L_{0j} D_{ii}^{(-3)}(\tilde{p}_j) + L_{*3}^{(j-1)}\left[k_{4j}\tilde{p}_j D_{ii}^{(-2)}(\tilde{p}_j)/2 - z_{j-1}^*\zeta_{j-1}^* D_{ii}^{(-1)}(\tilde{p}_j)\right]\right\}(1-\delta_{j1}) + \\
&+ \frac{k_{6j}}{2\pi P_{j+1}^*}\left\{R_4^{*(j+1)} D_{ii}^{(-3)}(p_j) - R_2^{*(j+1)}\left[k_{4j} p_j D_{ii}^{(-2)}(p_j) - 2z_j^*\zeta_j^* D_{ii}^{(-1)}(p_j)\right]\right\} + {}_sG_{ij}^{*(ij)}, \\
{}_sG_{ij}^{(3j)}(Q,Q_0) &= \frac{k_{6j}}{2\pi} y_3 D_{3i}^{(-1)}(y_3) - \\
&- \frac{k_{6j}}{\pi P_j^*}\left\{L_{*4}^{(j-1)} D_{3i}^{(-2)}(\tilde{p}_j) + L_{*3}^{(j-1)}\left[k_{4j} y_3 D_{3i}^{(-1)}(\tilde{p}_j)/2 + z_j^*\zeta_j^* D_{3i}^{(0)}(\tilde{p}_j)\right]\right\}(1-\delta_{j1}) + \\
&+ \frac{k_{6j}}{2\pi P_{j+1}^*}\left\{R_3^{*(j+1)} D_{3i}^{(-2)}(p_j) + R_2^{*(j+1)}\left[k_{4j} y_3 D_{3i}^{(-1)}(p_j) - 2z_j^*\zeta_j^* D_{3i}^{(0)}(p_j)\right]\right\} + {}_sG_{ij}^{*(3j)}, \\
&\qquad i = 1, 2, \\
{}_sG_{1j}^{(2j)}(Q,Q_0) &= \frac{k_{6j}}{2\pi}\frac{y_1 y_2}{R^3(y_3)} - \frac{1}{4\pi\mu_j}\left[-\upsilon_j D_{12}^{(-3)}(\tilde{p}_j)(1-\delta_{j1}) + \upsilon_{j+1} D_{12}^{(-3)}(p_j)\right] - \\
&- \frac{k_{6j}}{\pi P_j^*}\left\{L_{0j} D_{12}^{(-3)}(\tilde{p}_j) + L_{*3}^{(j-1)}\left[k_{4j}\tilde{p}_j D_{12}^{(-2)}(\tilde{p}_j)/2 - z_{j-1}^*\zeta_{j-1}^* D_{12}^{(-1)}(\tilde{p}_j)\right]\right\}(1-\delta_{j1}) - \\
&- \frac{k_{6j}}{2\pi P_{j+1}^*}\left\{R_4^{*(j+1)} D_{12}^{(-3)}(p_j) - R_2^{*(j+1)}\left[k_{4j} p_j D_{12}^{(-2)}(p_j) - 2z_j^*\zeta_j^* D_{12}^{(-1)}(p_j)\right]\right\} + {}_sG_{1j}^{*(2j)}, \\
{}_sG_{3j}^{(3j)}(Q,Q_0) &= \frac{k_{6j}}{2\pi}\left[k_{4j} D_{33}^{(-1)}(y_3) + y_3 D_{33}^{(-1)}(y_3)\right] + \\
&+ \frac{k_{6j}}{\pi P_j^*}\left\{L_{0j} D_{33}^{(-1)}(\tilde{p}_j) - L_{*3}^{(j-1)}\left[k_{4j}\tilde{p}_j D_{33}^{(0)}(\tilde{p}_j)/2 + z_{j-1}^*\zeta_{j-1}^* D_{33}^{(1)}(\tilde{p}_j)\right]\right\}(1-\delta_{j1}) + \\
&+ \frac{k_{6j}}{2\pi P_{j+1}^*}\left\{R_4^{*(j+1)} D_{33}^{(-1)}(p_j) + R_2^{*(j+1)}\left[k_{4j} p_j D_{33}^{(0)}(p_j) + 2z_j^*\zeta_j^* D_{33}^{(1)}(p_j)\right]\right\} + {}_sG_{3j}^{*(3j)}.
\end{aligned} \tag{15}
$$

При $j = p = n$ формули будуть такими:

$$
\begin{aligned}
{}_sG_{in}^{(in)}(Q,Q_0) &= \frac{k_{6n}}{2\pi}\left[\frac{k_{4n}}{R(y_3)} + \frac{y_i^2}{R^3(y_3)}\right] + \frac{1}{4\pi\mu_n}\left[\upsilon_n D_{3-i,3-i}^{(-3)}(\tilde{p}_n) - \upsilon_{n+1} D_{3-i,3-i}^{(-3)}(p_n)\right] + \\
&+ \frac{k_{6n}}{\pi P_n^*}\left\{L_{0n} D_{ii}^{(-3)}(\tilde{p}_n) + L_{*3}^{(n-1)}\left[k_{4n}\tilde{p}_n D_{ii}^{(-2)}(\tilde{p}_n)/2 - z_{n-1}^*\zeta_{n-1}^* D_{ii}^{(-1)}(\tilde{p}_n)\right]\right\} + \\
&+ \frac{k_{6n}}{2\pi æ_{sn}}\left\{R_{s4}^{(n)} D_{ii}^{(-3)}(p_n) - R_{s2}^{(n)}\left[k_{4n} p_n D_{ii}^{(-2)}(p_n) - 2z_n^*\zeta_n^* D_{ii}^{(-1)}(p_n)\right] + \right. \\
&\left. + 2\tilde{H}_s^{(nn)}\left[-p_n^* D_{ii}^{(-2)}(p_n) + k_{4n} D_{ii}^{(-3)}(p_n)\right]\right\} + {}_sG_{in}^{*(in)}, \qquad i = 1, 2,
\end{aligned}
$$

$$
{}_sG_{in}^{(3n)}(Q,Q_0)=\frac{k_{6n}}{2\pi}\,y_3D_{3i}^{(-1)}(y_3)-
$$

$$
-\frac{k_{6n}}{\pi P_n^*}\left\{L_{*4}^{(n-1)}D_{3i}^{(-2)}(\tilde p_n)+L_{*3}^{(n-1)}\left[k_{4n}y_3D_{3i}^{(-1)}(\tilde p_n)/2+z_{n-1}^*\zeta_{n-1}^*D_{3i}^{(0)}(\tilde p_n)\right]\right\}+
$$

$$
+\frac{k_{6n}}{2\pi æ_{sn}}\left\{R_{s3}^{(n)}D_{3i}^{(-2)}(p_n)+R_{s2}^{(n)}\left[k_{4n}y_3D_{3i}^{(-1)}(p_n)-2z_n^*\zeta_n^*D_{3i}^{(0)}(p_n)\right]\right\}+{}_sG_{in}^{*(3n)},
$$

$$
i=1,2,
$$

$$
{}_sG_{1n}^{(2n)}(Q,Q_0)=\frac{k_{6n}}{2\pi}\frac{y_1y_2}{R^3(y_3)}+\frac{1}{4\pi\mu_n}\left[\upsilon_nD_{12}^{(-3)}(\tilde p_n)-\upsilon_{n+1}D_{12}^{(-3)}(p_n)\right]-
$$

$$
-\frac{k_{6n}}{\pi P_n^*}\left\{L_{0n}D_{12}^{(-3)}(\tilde p_n)+L_{*3}^{(n-1)}\left[k_{4n}\tilde p_nD_{12}^{(-2)}(\tilde p_n)/2-z_{n-1}^*\zeta_{n-1}^*D_{12}^{(-1)}(\tilde p_n)\right]\right\}-
$$

$$
-\frac{k_{6n}}{2\pi æ_{sn}}\left\{R_{s4}^{(n)}D_{12}^{(-3)}(p_n)-R_{s2}^{(n)}\left[k_{4n}p_nD_{12}^{(-2)}(p_n)-2z_n^*\zeta_n^*D_{12}^{(-1)}(p_n)\right]+\right.
$$

$$
\left.+2\tilde H_s^{(nn)}\left[-p_nD_{12}^{(-2)}(p_n)+k_{4n}D_{12}^{(-3)}(p_n)\right]\right\}+{}_sG_{1n}^{*(2n)},
$$

$$
{}_sG_{3n}^{(3n)}(Q,Q_0)=\frac{k_{6n}}{2\pi}\left[k_{4n}D_{33}^{(-1)}(y_3)+y_3D_{33}^{(-1)}(y_3)\right]+
$$

$$
+\frac{k_{6n}}{\pi P_n^*}\left\{L_{0n}D_{33}^{(-1)}(\tilde p_n)-L_{*3}^{(n-1)}\left[k_{4n}\tilde p_nD_{33}^{(0)}(\tilde p_n)/2+z_{n-1}^*\zeta_{n-1}^*D_{33}^{(1)}(\tilde p_n)\right]\right\}+
$$

$$
+\frac{k_{6n}}{2\pi æ_{sn}}\left\{R_{s4}^{(n)}D_{33}^{(-1)}(p_n)+R_{s2}^{(n)}\left[k_{4n}p_nD_{33}^{(0)}(p_n)+2z_n^*\zeta_n^*D_{33}^{(1)}(p_n)\right]-\right.
$$

$$
\left.-2\tilde H_s^{(nn)}\left[p_nD_{33}^{(0)}(p_n)+k_{4n}D_{33}^{(1)}(p_n)\right]\right\}+{}_sG_{3n}^{*(3n)}. \tag{16}
$$

Коли точки $Q(x_1,x_2,x_3)$ і $Q_0(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ розміщені відповідно в j-й і ($j+1$)-й підобластях, то, виділивши в (14) особливість, яка виникне при виході цих точок на поверхню поділу, одержимо

$$
{}_sG_{ij}^{(i,j+1)}(Q,Q_0)={}_sG_{ij}^{*(i,j+1)}+
$$

$$
+k_{6,j+1}^*D_{3-i}^{(-3)}(-y_3)+k_{7,j+1}\left[2k_{8j}D_{ii}^{(-3)}(-y_3)+\varphi_{0j}(x_3,\xi_3)D_{ii}^{(-2)}(-y_3)\right]/(2\pi),
$$

$$
{}_sG_{1j}^{(2,j+1)}(Q,Q_0)={}_sG_{1j}^{*(2,j+1)}+
$$

$$
+k_{6,j+1}^*D_{12}^{(-3)}(-y_3)-k_{7,j+1}\left[2k_{8j}D_{12}^{(-3)}(-y_3)+\varphi_{0j}(x_3,\xi_3)D_{12}^{(-2)}(-y_3)\right]/(2\pi),
$$

$$
{}_sG_{ij}^{(3,j+1)}(Q,Q_0)={}_sG_{ij}^{*(3,j+1)}+
$$

$$
+k_{7,j+1}\left[k_{11,j}D_{3i}^{(-2)}(-y_3)+\varphi_{0j}(x_3,\xi_3)D_{3i}^{(-1)}(-y_3)\right]/(2\pi),
$$

$$
{}_sG_{3j}^{(3,j+1)}(Q,Q_0)={}_sG_{3j}^{*(3,j+1)}+
$$

$$
+k_{7,j+1}\left[2k_{8j}D_{33}^{(-1)}(-y_3)-\varphi_{0j}(x_3,\xi_3)D_{33}^{(0)}(-y_3)\right]/(2\pi). \tag{17}
$$

У співвідношеннях (15)–(17) ${}_sG_{ij}^{*(kp)}$ визначаються за формулами (14), у яких потрібно замінити ${}_s\bar G_{ij}^{(kp)}$ на ${}_s\bar G_{ij}^{*(kp)}$, а в позначеннях, використаних з осесиметричної задачі, – відповідно ξ, z, ζ, z_j на β, x_3, ξ_3, x_{3j}, причому

$$
\begin{aligned}
&{}_s\bar{G}_{i1}^{*(i1)} = \beta^{-3}\left[-\eta_{3-i}^2\ {}_s\omega_{11}^{(2)}/(2\mu_1) + k_{61}\eta_i^2\ {}_s\omega_{rr}^{(21)}\right]e^{-\beta p_1},\\
&{}_s\bar{G}_{i1}^{*(31)} = k_{61}\eta_i\beta^{-2}\ {}_s\omega_{rz}^{(21)}e^{-\beta p_1},\\
&{}_s\bar{G}_{11}^{*(21)} = -\eta_1\eta_2\beta^{-3}\left[{}_s\omega_{11}^{(2)}/(2\mu_1) + k_{61}\ {}_s\omega_{rr}^{(21)}\right]e^{-\beta p_1},\\
&{}_s\bar{G}_{31}^{*(31)} = k_{61}\beta^{-1}\ {}_s\omega_{zz}^{(21)}e^{-\beta p_1}, \qquad \omega_{11}^{(2)} = L_{n1}^{-}/M - \upsilon_2;\\
&{}_s\bar{G}_{ij}^{*(ij)} = \beta^{-3}\left[-\eta_{3-i}^2\ {}_s\bar{U}_{0j}^{*}/(2\mu_j) + 2k_{6j}\ \eta_i^2\ {}_s\bar{G}_{rj}^{*(rj)}\right],\\
&{}_s\bar{G}_{1j}^{*(2j)} = -\eta_1\eta_2\beta^{-3}\left[{}_s\bar{U}_{0j}^{*}/(2\mu_j) + 2k_{6j}\ {}_s\bar{G}_{rj}^{*(rj)}\right],\\
&{}_s\bar{U}_{0j}^{*} = M_2^{(j-1)}L_{nj}^{-}M^{-1}\left[e^{-\beta(2h_j+y_3)} + e^{-\beta(2h_j-y_3)}\right] - {}_s\omega_{1j}^{(1)}e^{-\beta\tilde{p}_j} + {}_s\omega_{1j}^{(2)}e^{-\beta p_j},\\
&{}_s\bar{G}_{ij}^{*(3j)} = 2k_{6j}\eta_i\beta^{-2}\left[{}_s\omega_{rz}^{(1j)}e^{-\beta\tilde{p}_j} + {}_s\omega_{rz}^{(2j)}e^{-\beta p_j} + {}_s\omega_{rz}^{(3j)}/P_{sn}\right], \quad i = 1,2,\\
&{}_s\bar{G}_{3j}^{*(3j)} = 2k_{6j}\beta^{-1}\left[{}_s\omega_{zz}^{(1j)}e^{-\beta\tilde{p}_j} + {}_s\omega_{zz}^{(2j)}e^{-\beta p_j} + {}_s\omega_{zz}^{(3j)}/P_{sn}\right],\\
&{}_s\omega_{1j}^{(1)} = M_2^{(j-1)}L_{nj}^{+}M^{-1} - \upsilon_j, \quad {}_s\omega_{1j}^{(2)} = M_1^{(j-1)}L_{nj}^{-}M^{-1} - \upsilon_{j+1}, \quad \upsilon_j = \frac{\mu_j - \mu_{j-1}}{\mu_j + \mu_{j-1}},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2 \le j \le n;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}_s\bar{G}_{ij}^{*(i,j+1)} = \beta^{-2}\left[\eta_{3-i}\ {}_s\bar{U}_{1j}^{*(i,j+1)} + \eta_i^2\ {}_s\bar{G}_{rj}^{*(r,j+1)}\right],\\
&{}_s\bar{G}_{1j}^{*(2,j+1)} = \eta_2\beta^{-2}\left[{}_s\bar{U}_{1j}^{*(2,j+1)} - \eta_1\ {}_s\bar{G}_{rj}^{*(r,j+1)}\right],\\
&{}_s\bar{U}_{1j}^{*(i,j+1)} = {}_s\bar{U}_{1j,j+1}^{(i)} - k_{6,j+1}^{*}\eta_{3-i}\beta^{-1}e^{y_3\beta}, \qquad k_{6,j+1}^{*} = (\mu_j + \mu_{j+1})^{-1},\\
&{}_s\bar{G}_{ij}^{*(3,j+1)} = \eta_i\beta^{-1}\ {}_s\tilde{G}_{rj}^{*(z,j+1)}, \quad {}_s\bar{G}_{3j}^{*(3,j+1)} = {}_s\tilde{G}_{zj}^{*(z,j+1)}, \quad i = 1,2, \quad 1 \le j < n;
\end{aligned}
$$

$$
\upsilon_{n+1} = \begin{cases} -1, & s = 1,\ s = 5, \\ \ \ 1, & s = 2,\ s = 6; \end{cases} \quad D_{ik}^{(-3)}(p) = \frac{\delta_{ik}}{p + R(p)} - (-1)^{i+k}\frac{y_i y_k}{R(p)[p + R(p)]^2},
$$

$$
D_{ik}^{(-2)}(p) = \frac{\delta_{ik}}{R(p)[p + R(p)]} - (-1)^{i+k}\frac{p + 2R(p)}{R^3(p)[p + R(p)]^2}\,y_i y_k,
$$

$$
D_{ik}^{(-1)}(p) = \frac{\delta_{ik}}{R^3(p)} - (-1)^{i+k}\frac{3y_i y_k}{R^5(p)}, \quad i,k = 1,2; \quad D_{3k}^{(-2)}(p) = \frac{y_k}{R(p)[p + R(p)]},
$$

$$
D_{3k}^{(-1)}(p) = \frac{y_k}{R^3(p)}, \quad D_{3k}^{(0)}(p) = \frac{3y_k}{R^5(p)}\,p, \quad R^2(p) = d^2 + p^2, \quad d^2 = y_1^2 + y_2^2,
$$

$$
D_{33}^{(-1)}(p) = \frac{1}{R(p)}, \quad D_{33}^{(0)}(p) = \frac{p}{R^3(p)}, \quad D_{33}^{(1)}(p) = -\frac{d^2 - 2p^2}{R^5(p)}.
$$

2.2. Шаруватий простір. Функції Ґріна для шаруватого простору, як і в осесиметричному випадку, отримаємо шляхом граничного переходу, спрямувавши x_{3n} до нескінченності. При $j, p \ne n$, а також при $j \ne n$, $p = n$ елементи матриць функцій Ґріна визначатимуться також за формулами (14), (15), (17), але тепер вони не залежатимуть від індексу «s» і в них необхідно врахувати співвідношення (10) та знехтувати доданками, що містять x_{3n}.

При $j = p = n$ формули будуть такими:

$$
G_{in}^{(in)}(Q,Q_0) = \frac{k_{6n}}{2\pi}\left[\frac{k_{4n}}{R(y_3)} + \frac{y_i^2}{R^3(y_3)}\right] + \frac{1}{4\pi\mu_n}\upsilon_n D_{3-i,3-i}^{(-3)}(\tilde{p}_n) +
$$

$$
+ \frac{k_{6n}}{\pi P_n^{*}}\left\{L_{0n}D_{ii}^{(-3)}(\tilde{p}_n) + L_{*3}^{(n-1)}\left[\delta_i k_{4n}\tilde{p}_n D_{ii}^{(-2)}(\tilde{p}_n)/2 - \right.\right.
$$

$$- z^*_{n-1}\zeta^*_{n-1}D^{(-1)}_{ii}(\tilde{p}_n)\Big]\Big\} + G^{*(in)}_{in} ,$$

$$G^{(2n)}_{1n}(Q,Q_0) = \frac{k_{6n}}{2\pi}\frac{y_1y_2}{R^3(y_3)} + \frac{1}{4\pi\mu_n}\upsilon_n D^{(-3)}_{12}(\tilde{p}_n) +$$

$$+ \frac{k_{6n}}{\pi P^*_n}\Big\{L_{0n}D^{(-3)}_{12}(\tilde{p}_n) + L^{(n-1)}_{*3}\Big[\delta_i k_{4n}\tilde{p}_n D^{(-2)}_{12}(\tilde{p}_n)/2 -$$

$$- z^*_{n-1}\zeta^*_{n-1}D^{(-1)}_{12}(\tilde{p}_n)\Big]\Big\} + G^{*(2n)}_{1n} ,$$

$$G^{(3n)}_{in}(Q,Q_0) = \frac{k_{6n}}{2\pi} y_3 D^{(-1)}_{3i}(y_3) - \frac{k_{6n}}{\pi P^*_n}\Big\{L^{(n-1)}_{*4}D^{(-2)}_{3i}(\tilde{p}_n) +$$

$$+ L^{(n-1)}_{*3}\Big[k_{4n}y_3D^{(-1)}_{3i}(\tilde{p}_n)/2 + z^*_{n-1}\zeta^*_{n-1}D^{(0)}_{3i}(\tilde{p}_n)\Big]\Big\} + G^{*(3n)}_{in}, \quad i = 1,2,$$

$$G^{(3n)}_{3n} = \frac{k_{6n}}{2\pi}\Big[k_{4n}D^{(-1)}_{33}(y_3) + y_3D^{(-1)}_{33}(y_3)\Big] + \frac{k_{6n}}{\pi P^*_n}\Big\{L_{0n}D^{(-1)}_{33}(\tilde{p}_n) -$$

$$- L^{(n-1)}_{*3}\Big[k_{4n}\tilde{p}_n D^{(0)}_{33}(\tilde{p}_n)/2 + z^*_{n-1}\zeta^*_{n-1}D^{(1)}_{33}(\tilde{p}_n)\Big]\Big\} + G^{*(3n)}_{3n} ,$$

де $G^{*(kn)}_{in}$ визначаються за формулами, аналогічними до (14), у яких

$$\bar{G}^{*(in)}_{in} = \beta^{-3}\Big[\eta^2_{3-i}\omega^{(1)}_{1n}/(2\mu_n) + 2k_{6n}\eta^2_i\omega^{(1n)}_{rr}\Big]e^{-\beta\tilde{p}_n} ,$$

$$\bar{G}^{*(3n)}_{in} = 2k_{6n}\eta_i\,\beta^{-2}\omega^{(1n)}_{rz}e^{-\beta\tilde{p}_n} ,$$

$$\bar{G}^{*(2n)}_{1n} = \beta^{-3}\eta_1\eta_2\Big[\omega^{(1)}_{1n}/(2\mu_n) - 2k_{6n}\omega^{(1n)}_{rr}\Big]e^{-\beta\tilde{p}_n} ,$$

$$\bar{G}^{*(3n)}_{3n} = 2k_{6n}\,\beta^{-1}\omega^{(1n)}_{zz}e^{-\beta\tilde{p}_n} .$$

2.3. Шаруватий шар. Щоб отримати тривимірні функції Ґріна ${}^m_sG^{(k)}_i(Q,Q_0)$, $m = 1,2,5,6$, для шаруватого шару з такими самими варіантами граничних умов, як для шаруватого півпростору, але на одиницю меншою кількістю складових частин, вилучаємо з розгляду (рис. 2) підобласть з номером «1», надаємо залежно від варіанту граничних умов на новоутвореній зовнішній границі $x_3 = x_{31} = 0$ тих самих для відповідних m початкових значень $P_{\ell 1}$, $\ell = \overline{1,6}$, що й в (11), а $M^{(1)}_1$, $M^{(1)}_2$, які є початковими значеннями рекурентних співвідношень, якими визначаються $M^{(j-1)}_1$, $M^{(j-1)}_2$, таких значень:

$M^{(1)}_1 = M^{(1)}_2 = 1$	для	${}_s\tau^{(k)}_{33} = {}_s\tau^{(k)}_{32} = {}_s\tau^{(k)}_{31} = 0$	$(m = 1)$,
$M^{(1)}_1 = 1$, $M^{(1)}_2 = -1$	для	${}_sG^{(k)}_1 = {}_sG^{(k)}_2 = {}_sG^{(k)}_3 = 0$	$(m = 2)$,
$M^{(1)}_1 = M^{(1)}_2 = 1$	для	${}_sG^{(k)}_3 = 0$, ${}_s\tau^{(k)}_{32} = {}_s\tau^{(k)}_{31} = 0$	$(m = 5)$,
$M^{(1)}_1 = 1$, $M^{(1)}_2 = -1$	для	${}_sG^{(k)}_1 = {}_sG^{(k)}_2 = 0$, ${}_s\tau^{(k)}_{33} = 0$	$(m = 6)$.

3. Висновки. Отримані співвідношення для функцій Ґріна дають можливість для шаруватих тіл з плоскопаралельними межами поділу, зокрема, записати в квадратурах розв'язки широкого класу статичних задач пружності та статичних і квазістатичних задач термопружності, які мають самостійне значення або є початковими наближеннями при розв'язанні ітераційними методами задач з нелінійностями, задач для термочутливих тіл та ін.; звести розв'язання задач з неоднорідностями типу включень, порожнин до граничних інтегральних рівнянь, що розглядаються лише на поверхнях цих неоднорідностей.

1. *Лихачев В. А., Хайров Р. Ю.* Введение в теорию дисклинаций. − Л.: Изд-во Ленингр. ун-та , 1975. − 183 с.
2. *Процюк Б. В.* Статичні та квазістатичні осесиметричні задачі термопружності для шаруватих тіл з плоскопаралельними границями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. − 2001. − **44**, № 4. − С. 103−112.
3. *Процюк Б. В.* Тривимірні статичні та квазістатичні задачі термопружності для шаруватих тіл з плоскопаралельними границями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. − 2003. − **46**, № 2. − С. 96−106.
4. *Процюк Б. В., Синюта В. М.* Про побудову функцій переміщень Гріна багатошарових тіл // Мат. методи та фіз-мех. поля. − 1998. − **41**, № 3. − С. 37-43.
5. *Benitez F. G., Wideberg F. G.* The boundary element method based on the three-dimensional elastostatic fundamentsl solution for the orthotropic multilayered space: Application to composite materials // Comput. Mech. − 1996. − **18**. − P. 24-45.
6. *Linkov A., Filippov N.* Difference equations approach to the analysis of layered systems // Meccanica. − 1991. − **26**. − P. 195-209.
7. *Linkov A. M., Linkova A. A., Savitski A. A.* An effective method for multi-layered media with cracks and cavities // Int. J. Damage Mech. − 1994. − **3.** − P. 338-356.
8. *Yue Z. Q.* On generalized Kelvin solutions in a multilayered elastic medium // J. of Elasticity. − 1995. − **40**. − P. 1-43.

ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧ СТАТИКИ ДЛЯ СЛОИСТЫХ ТЕЛ С ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ГРАНИЦАМИ РАЗДЕЛА

Построены с выделенными особенностями функции Грина двухмерных осесимметричных и трехмерных статических задач упругости для изотропных слоистых полупространства и слоя при четырех основных вариантах граничных условий и слоистого пространства, которые для указанных областей для соответствующих задач определяются на основании одних и тех же ключевых соотношений. Регулярные слагаемые представлены в виде несобственных интегралов от экспоненциально убывающих функций.

GREEN'S FUNCTIONS OF PROBLEMS OF STATICS FOR LAYERED BODIES WITH PLANE-PARALLEL INTERFACES

Green's functions − with marked properties − for 2D axisymmetric and 3D static elasticity problems are constructed for an isotropic layered half-space and a layer under four main versions of boundary conditions and for a layered space, which (for the given regions of the corresponding problems) are defined on the basis of the same key relations. The regular summands are presented in the form of improper integrals from the exponentially decaying functions.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
01.11.04