УДК 517.983.54

В. А. Галазюк, А. Є. Крупник

МЕТОД ПОЛІНОМІВ ЛАҐЕРРА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛЕМБА

Запропоновано два підходи до розв'язання класичної задачі Лемба про дію зосередженої сили на границю пружного півпростору: за допомогою інтегрального перетворення Лапласа та методу поліномів Лаґерра, причому в першому випадку вдалося отримати аналітичний вираз вертикального переміщення границі пружного півпростору. Доведено ефективність застосування другого підходу до розв'язання цієї задачі.

Класичним методом розв'язування початково-крайових задач математичної фізики є застосування інтегрального перетворення Лапласа за часовою змінною і зведення їх таким способом до крайових задач, які залежать від комплексного параметра перетворення. Проте при відсутності точної формули знаходження оригіналу розв'язку виникає проблема розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма першого роду відносно шуканої функції, що, як відомо, є некоректною задачею. Цієї проблеми можна уникнути, якщо при розв'язуванні початково-крайової задачі використати метод поліномів Лаґерра [2, 3], суть якого полягає у застосуванні до початково-крайової задачі інтегрального перетворення Лаґерра за часом і зведенні її таким чином до трикутної послідовності крайових задач, внаслідок чого розв'язок вихідної початково-крайової задачі подається у вигляді ортогонального ряду за поліномами Лаґерра.

У запропонованому дослідженні розв'язано класичну задачу Лемба про дію зосередженої сили на границю пружного півпростору за допомогою інтегрального перетворення Лапласа та методу поліномів Лаґерра. При цьому доведено, що за допомогою теореми Бореля про згортку інтегрального перетворення Лапласа [5, 6] можна знайти точний аналітичний вираз вертикального переміщення границі пружного півпростору, який співпадає з відомим [8], одержаним за допомогою схеми Cagniard-de Hoop. Проте ця схема не може бути реалізована при аналізі динамічного процесу в півпросторі або в плоско-паралельному шарі. Тому в роботі проілюстровано порівняльний числовий аналіз розв'язку поставленої задачі у вигляді ортогонального ряду за поліномами Лаґерра та точного розв'язку, одержаного за допомогою інтегрального перетворення Лапласа.

1. Однорідний ізотропний пружний півпростір віднесемо до циліндричної системи координат $(R\alpha,\ \beta,\ R\gamma)$, де R − параметр, який має розмірність довжини, та вважатимемо, що під дією зовнішнього навантаження площини $\gamma = 0$ у півпросторі реалізується осесиметричний напружено-деформований стан. Тоді для ненульових компонент вектора пружного переміщення $Ru_\alpha(\alpha,\gamma,\tau)$ і $Ru_\gamma(\alpha,\gamma,\tau)$ можна записати систему диференціальних рівнянь руху пружного тіла стосовно функцій об'ємної деформації $\theta(\alpha,\gamma,\tau) = \operatorname{div}\mathbf{u}$ і $\omega_\beta(\alpha,\gamma,\tau) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{rot}\mathbf{u})_\beta$:

$$æ^2 \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + 2\frac{\partial\omega_\beta}{\partial\gamma} = æ^2 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial\tau^2}, \tag{1}$$

$$æ^2 \frac{\partial\theta}{\partial\gamma} - \frac{2}{\alpha}\frac{\partial(\alpha\omega_\beta)}{\partial\alpha} = æ^2 \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial\tau^2}, \tag{2}$$

де в циліндричній системі координат в осесиметричному випадку

$$\theta = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha u_\alpha) + \frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}, \qquad \omega_\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial\gamma} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial\alpha}\right), \tag{3}$$

$\text{æ}^2 = \dfrac{c_1^2}{c_2^2} = \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$; c_1, c_2 − відповідно швидкості поширення поздовжніх і поперечних хвиль в матеріалі середовища; ν − коефіцієнт Пуассона; $\tau = \dfrac{c_1 t}{R}$ − безрозмірний час; R − характеристичний розмір.

Подіємо оператором $\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}$ на рівняння (1), оператором $\dfrac{\partial}{\partial\gamma}$ − відповідно на рівняння (2), додамо трансформовані таким способом рівняння і, використавши означення (3) функції $\theta(\alpha,\gamma,\tau)$, отримаємо, що

$$\nabla^2\theta + \frac{\partial^2\theta}{\partial\gamma^2} = \frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}, \qquad (4)$$

де $\nabla^2 = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\right)$ − оператор Бельтрамі в осесиметричному випадку. Отже, функція $\theta(\alpha,\gamma,\tau)$ є розв'язком початково-крайової задачі для хвильового рівняння (4). Введемо ключову функцію $\Phi(\alpha,\gamma,\tau)$ як $2\omega_\beta = \dfrac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$ і подіємо оператором $\dfrac{\partial}{\partial\gamma}$ на рівняння (1), а оператором $\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}$ − на рівняння (2) і віднімемо трансформовані таким чином рівняння. Тоді, враховуючи означення (3) функції $\omega_\beta(\alpha,\gamma,\tau)$, отримаємо

$$\nabla^2\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma^2} = \text{æ}^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}, \qquad (5)$$

тобто функція $\Phi(\alpha,\gamma,\tau)$ є розв'язком початково-крайової задачі для хвильового рівняння (5).

Введемо ключову функцію $P(\alpha,\gamma,\tau)$ як $u_\alpha(\alpha,\gamma,\tau) = \dfrac{\partial P}{\partial\alpha}$. Тоді з огляду на означення (3) функції $\theta(\alpha,\gamma,\tau)$ отримаємо таке диференціальне співвідношення:

$$\nabla^2 P = \theta - \frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}, \qquad (6)$$

а на підставі означення (3) функції $\omega_\beta(\alpha,\gamma,\tau)$ отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial P}{\partial\gamma} - u_\gamma - \Phi\right) = 0, \qquad (7)$$

звідки випливає, що

$$u_\gamma = \frac{\partial P}{\partial\gamma} - \Phi. \qquad (8)$$

Якщо вираз (8) підставити у співвідношення (6), то для визначення функції $P(\alpha,\gamma,\tau)$ отримаємо рівняння Пуассона

$$\nabla^2 P + \frac{\partial^2 P}{\partial\gamma^2} = \theta + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma},$$

яке після подвійного диференціювання за часом набуде вигляду

$$\left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)\frac{\partial^2 P}{\partial\tau^2} = \frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2} + \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}\right). \qquad (9)$$

Якщо в праву частину диференціального співвідношення (9) підставити рівняння (4) і (5), то отримаємо простий зв'язок між функцією $P(\alpha,\gamma,\tau)$ і ключовими функціями $\theta(\alpha,\gamma,\tau)$ і $\Phi(\alpha,\gamma,\tau)$:

$$\left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)\left[\frac{\partial^2 P}{\partial\tau^2} - \left(\theta + æ^{-2}\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right)\right] = 0\,,$$

причому для виконання цієї рівності достатньо, щоб

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\tau^2} - \left(\theta + æ^{-2}\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right) = 0\,. \tag{10}$$

Отже, якщо ключові функції $\theta(\alpha,\gamma,\tau)$ і $\Phi(\alpha,\gamma,\tau)$ визначити як розв'язки відповідних початково-крайових задач, то безрозмірні компоненти вектора пружного переміщення $u_\gamma(\alpha,\gamma,\tau)$ і $u_\alpha(\alpha,\gamma,\tau)$, а також єдину відмінну від нуля компоненту вектора обертання $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{u}$ знаходимо за формулою (8) і за формулами

$$u_\alpha(\alpha,\gamma,\tau) = \frac{\partial P}{\partial\alpha}\,, \qquad \omega_\beta(\alpha,\gamma,\tau) = \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\,. \tag{11}$$

Оскільки крайові умови динамічної задачі теорії пружності можна формулювати в напруженнях, то необхідним також є подання компонент тензора напружень через ключові функції $\theta(\alpha,\gamma,\tau)$ і $\Phi(\alpha,\gamma,\tau)$. Відповідно до закону Гука запишемо

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma,\tau) = \mu\left[(æ^2-2)\theta + 2\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}\right], \qquad \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma,\tau) = \mu\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial\gamma} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial\alpha}\right), \tag{12}$$

де μ – стала Ляме, тому, враховуючи співвідношення (8), маємо рівність

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \mu\left[(æ^2-2)\theta + 2\left(\frac{\partial^2 P}{\partial\gamma^2} - \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right)\right].$$

Продиференціювавши її двічі за часом

$$\frac{\partial^2\sigma_{\gamma\gamma}}{\partial\tau^2} = \mu\left[(æ^2-2)\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial\gamma^2} - \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right)\right]$$

і використавши рівняння (4), (5), (10), отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\sigma_{\gamma\gamma}}{\partial\tau^2} &= \mu\left[(æ^2-2)\left(\nabla^2\theta + \frac{\partial^2\theta}{\partial\gamma^2}\right) + \right.\\ &\left. + 2\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\left(\theta + \frac{1}{æ^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right) - 2\frac{1}{æ^2}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\nabla^2\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma^2}\right)\right] = \\ &= \mu\left[(æ^2-2)\nabla^2\theta + æ^2\frac{\partial^2\theta}{\partial\gamma^2} - 2\frac{1}{æ^2}\frac{\partial}{\partial\gamma}(\nabla^2\Phi)\right].\end{aligned} \tag{13}$$

Беручи до уваги рівність (8) і підставивши означення (11) функції $P(\alpha,\gamma,\tau)$ у друге зі співвідношень (12), матимемо

$$\sigma_{\alpha\gamma} = \mu\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(2\frac{\partial P}{\partial\gamma} - \Phi\right). \tag{14}$$

Отже, формули (13) і (14) виражають компоненти тензора напружень через ключові функції $\theta(\alpha,\gamma,\tau)$, $\Phi(\alpha,\gamma,\tau)$ і $P(\alpha,\gamma,\tau)$.

2. Нехай на границі $\gamma = 0$ пружного півпростору в початковий момент часу діє нормальна зосереджена сила. Тоді для визначення ключових функцій $\theta(\alpha,\gamma,\tau)$ і $\Phi(\alpha,\gamma,\tau)$, які є розв'язками хвильових рівнянь (4) і (5), можна сформулювати таку початково-крайову задачу:

$$u_\alpha(\alpha,\gamma,0) = \frac{\partial u_\alpha(\alpha,\gamma,0)}{\partial\tau} = 0, \qquad u_\gamma(\alpha,\gamma,0) = \frac{\partial u_\gamma(\alpha,\gamma,0)}{\partial\tau} = 0\,, \tag{15}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,0,\tau) = -\,Q\,\frac{\delta(\alpha)}{2\pi\alpha}\,S_+(\tau), \qquad \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0,\tau) = 0\,, \tag{16}$$

$$\lim_{(\alpha,\gamma)\to\infty} u_\alpha(\alpha,\gamma,\tau) = 0, \qquad \lim_{(\alpha,\gamma)\to\infty} u_\gamma(\alpha,\gamma,\tau) = 0\,, \tag{17}$$

де $\delta(\alpha)$ − дельта-функція Дірака, а $S_+(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \ge 0, \\ 0 & \tau < 0, \end{cases}$ − асиметрична функція Гевісайда.

Якщо інтеграл

$$f_n(\alpha,\gamma) = \int_0^\infty f(\alpha,\gamma,\tau)\exp(-\lambda\tau)L_n(\lambda\tau)\,d\tau \tag{18}$$

є інтегральним перетворенням Лаґерра [2] функції $f(\alpha,\gamma,\tau)$ з додатним параметром λ, то формулою його обернення служить ортогональний ряд

$$f(\alpha,\gamma,\tau) = \lambda\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha,\gamma)L_n(\lambda\tau)\,, \tag{19}$$

де $L_n(\lambda\tau)$ − поліноми Лаґерра, які утворюють повну та ортогональну систему функцій на проміжку $[0,\infty)$. Якщо формулами

$$\bar{\theta}_n(\xi,\gamma) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \alpha\,\theta(\alpha,\gamma,\tau)\;J_0(\xi\alpha)\,d\alpha\right]\exp(-\lambda\tau)L_n(\lambda\tau)\,d\tau\,,$$

$$\bar{\Phi}_n(\xi,\gamma) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \alpha\,\Phi(\alpha,\gamma,\tau)\;J_0(\xi\alpha)\,d\alpha\right]\exp(-\lambda\tau)L_n(\lambda\tau)\,d\tau$$

ввести зображення шуканих ключових функцій $\theta(\alpha,\gamma,\tau)$ і $\Phi(\alpha,\gamma,\tau)$ за Ганкелем і Лаґерром, де $J_0(\xi\alpha)$ − функція Бесселя першого роду нульового порядку, то для визначення функцій $\bar{\theta}_n(\xi,\gamma)$ і $\bar{\Phi}_n(\xi,\gamma)$ на підставі рівнянь (4) і (5) запишемо такі послідовності [2] звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d^2\bar{\theta}_n}{d\gamma^2} - \xi^2\bar{\theta}_n = \lambda^2\sum_{m=0}^{n}(n-m+1)\bar{\theta}_m\,, \tag{20}$$

$$\frac{d^2\bar{\Phi}_n}{d\gamma^2} - \xi^2\bar{\Phi}_n = æ^2\lambda^2\sum_{m=0}^{n}(n-m+1)\,\bar{\Phi}_n\,. \tag{21}$$

Загальними розв'язками цих рівнянь служать алгебричні згортки

$$\bar{\theta}_n(\xi,\gamma) = \sum_{j=0}^{n}\left[A_{n-j}(\xi)\,G_j(1,\xi,\gamma) + B_{n-j}(\xi)W_j(1,\xi,\gamma)\right], \tag{22}$$

$$\bar{\Phi}_n(\xi,\gamma) = \sum_{j=0}^{n}\left[C_{n-j}(\xi)G_j(æ,\xi,\gamma) + D_{n-j}(\xi)W_j(æ,\xi,\gamma)\right], \tag{23}$$

де функції $G_j(1,\xi,\gamma)$, $\mathrm{W}_j(1,\xi,\gamma)$ і $G_j(æ,\xi,\gamma)$, $\mathrm{W}_j(æ,\xi,\gamma)$ − фундаментальні системи розв'язків відповідно рівнянь (20) і (21), для яких відомі [4] такі подання:

$$G_j(x,\xi,\gamma)=\sum_{k=0}^{j}a_{j,k}(x,\xi)\left(\sqrt{\xi^2+\lambda^2x^2}\,\gamma\right)^k\exp\left(-\sqrt{\xi^2+\lambda^2x^2}\,\gamma\right),\qquad(24)$$

$$W_j(x,\xi,\gamma)=\sum_{k=0}^{j}a_{j,k}(x,\xi)\left(\sqrt{\xi^2+\lambda^2x^2}\,\gamma\right)^k\exp\left(\sqrt{\xi^2+\lambda^2x^2}\,\gamma\right),\qquad(25)$$

$x\in\{1,æ\}$; $a_{j,k}(x,\xi)$ − коефіцієнти, які обчислюються за рекурентною формулою

$$a_{j,k+1}=\frac{k+2}{2}a_{j,k+2}-\frac{\lambda^2x^2}{2(\xi^2+\lambda^2x^2)(k+1)}\sum_{\ell=k}^{j-1}(j-\ell+1)a_{\ell,k}\,,$$
$$j=\overline{1,n},\qquad k=\overline{0,j-1}\,,$$

причому коефіцієнти $a_{p,0}$ довільні та визначаються умовами нормування функцій $G_j(x,\xi,\gamma)$ і $W_j(x,\xi,\gamma)$.

Відповідно до умов на безмежності (17) у поданнях (22) і (23) усі константи $B_{n-j}(\xi)=0$ і $D_{n-j}(\xi)=0$, а для визначення констант $A_{n-j}(\xi)$ і $C_{n-j}(\xi)$ трансформуємо співвідношення (10), (13), (14) і крайові умови (16) за Ганкелем і Лаґерром:

$$\bar P_n=\lambda^{-2}(\bar f_n-2\bar f_{n-1}+\bar f_{n-2}),\qquad \bar f_n=\bar\theta_n+æ^{-2}\frac{d\bar\Phi_n}{d\gamma}\,,\qquad(26)$$

$$\frac{\lambda^2}{\mu}\sum_{m=0}^{n}(n-m+1)\bar\sigma_{\gamma\gamma,m}=æ^2\frac{d^2\bar\theta_n}{d\gamma^2}-(æ^2-2)\xi^2\bar\theta_n+2æ^{-2}\xi^2\frac{d\bar\Phi_n}{d\gamma}\,,\qquad(27)$$

$$\bar\sigma_{\alpha\gamma,n}=\mu\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(2\frac{\partial\bar P_n}{\partial\gamma}-\bar\Phi_n\right),\qquad(28)$$

$$\bar\sigma_{\gamma\gamma,n}=-\frac{Q}{2\pi\lambda}\delta_{n,0},\qquad \gamma=0\,,\qquad(29)$$

$$\bar\sigma_{\alpha\gamma,n}=0,\qquad \gamma=0\,,\qquad(30)$$

де $\delta_{n,0}$ − функція Кронекера. Зокрема, з формули (28) та умови (30) випливає, що

$$\bar\Phi_n=2\frac{d\bar P_n}{d\gamma},\qquad \gamma=0\,,\qquad(31)$$

а, отже,

$$\bar\Phi_n=\frac{2}{\lambda^2}\frac{d}{d\gamma}(\bar f_n-2\bar f_{n-1}+\bar f_{n-2}),\qquad \bar f_n=\bar\theta_n+æ^{-2}\frac{d\bar\Phi_n}{d\gamma},\qquad \gamma=0\,.\qquad(32)$$

Підставимо у співвідношення (27) і (32) подання зображень (22) і (23) ключових функцій $\bar\theta_n(\xi,\gamma)$ і $\bar\Phi_n(\xi,\gamma)$ при $\gamma=0$, внаслідок чого отримаємо систему рівнянь стосовно невідомих констант $A_n(\xi)$ і $C_n(\xi)$, $n=0,1,2,\ldots$:

$$-(2\xi^2+æ^2\lambda^2)A_n+2æ^{-2}\xi^2\sqrt{\xi^2+æ^2\lambda^2}\,C_n=F_n^{(1)},$$

$$2\sqrt{\xi^2+\lambda^2}\,A_n-æ^{-2}(2\xi^2+æ^2\lambda^2)\,C_n=F_n^{(2)},\qquad(33)$$

де

$$F_n^{(1)}(\xi) = -\frac{\lambda^2}{\mu}\sum_{m=0}^{n}(n-m+1)\bar{\sigma}_{\gamma\gamma,m} + æ^2\sum_{j=1}^{n}A_{n-j}G_j''(1,\xi,0) +$$

$$+ 2æ^{-2}\xi^2\sum_{j=1}^{n}C_{n-j}G_j'(æ,\xi,0),$$

$$F_n^{(2)}(\xi) = 2\psi_n(\xi) - 4\varphi_{n-1}(\xi) + 2\varphi_{n-2}(\xi),$$

$$\psi_n(\xi) = \sum_{j=1}^{n}\left[A_{n-j}G_j'(1,\xi,0) + æ^{-2}C_{n-j}G_j''(æ,\xi,0)\right],$$

$$\varphi_n(\xi) = \sum_{j=0}^{n}\left[A_{n-j}G_j'(1,\xi,0) + æ^{-2}C_{n-j}G_j''(æ,\xi,0)\right],$$

$$G_j'(x,\xi,0) \equiv \left.\frac{dG_j(x,\xi,\gamma)}{d\gamma}\right|_{\gamma=0}, \quad G_j''(x,\xi,0) \equiv \left.\frac{d^2G_j(x,\xi,\gamma)}{d\gamma^2}\right|_{\gamma=0}, \quad x \in \{1, æ\}.$$

Будемо вимагати, щоб функції $G_j(x,\xi,\gamma)$ при $\gamma = 0$ задовольняли такі умови: $G_0(x,\xi,0) = 1$, $G_j(x,\xi,0) = 0$, $j = 1,2,3,\ldots$. Тоді зі співвідношення (24) маємо, що довільні коефіцієнти $a_{p,0}(x,\xi) = \delta_{p,0}$ і

$$G_j'(x,\xi,0) = \sqrt{\xi^2 + \lambda^2x^2}\,\left(a_{j,1}(x,\xi) - a_{j,0}(x,\xi)\right),$$

$$G_0''(x,\xi,0) = \xi^2 + \lambda^2x^2, \qquad G_j''(x,\xi,0) = \lambda^2x^2(j+1), \quad j = 1,2,\ldots\ .$$

Розв'язавши систему рівнянь (33), отримаємо формули для визначення констант $A_n(\xi)$ і $C_n(\xi)$:

$$A_n = \frac{(2\xi^2 + æ^2\lambda^2)F_n^{(1)} + 2\xi^2\sqrt{\xi^2 + æ^2\lambda^2}\,F_n^{(2)}}{D(\xi)},$$

$$C_n = \frac{2æ^2\sqrt{\xi^2 + \lambda^2}\,F_n^{(1)} + æ^2(2\xi^2 + æ^2\lambda^2)\,F_n^{(2)}}{D(\xi)},$$

де

$$D(\xi) = 4\xi^2\sqrt{\xi^2 + æ^2\lambda^2}\,\sqrt{\xi^2 + \lambda^2} - (2\xi^2 + æ^2\lambda^2)^2,$$

які дозволяють однозначно знайти зображення ключових функцій $\bar{\theta}_n(\xi,\gamma)$ і $\bar{\Phi}_n(\xi,\gamma)$, а, отже, записати компоненти вектора пружного переміщення $u_\alpha(\alpha,\gamma,\tau)$ і $u_\gamma(\alpha,\gamma,\tau)$, а також $\omega_\beta(\alpha,\gamma,\tau)$.

Відповідно до співвідношень (8) і (31) запишемо вираз для зображення вертикальної компоненти вектора пружного переміщення:

$$\bar{u}_{\gamma,n}(\xi,0) = -\frac{1}{2}\bar{\Phi}_n(\xi,0). \tag{34}$$

На основі формул обернення інтегрального перетворення Лаґерра (19) і Ганкеля і співвідношень (11), (34) остаточно визначаємо поле переміщень у півпросторі та вираз для єдиної ненульової компоненти вектора обертання $\mathbf{\Omega}(\alpha,\gamma,\tau)$:

$$u_\alpha(\alpha,\gamma,\tau) = -\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^\infty \xi\bar{P}_n(\xi,\gamma)J_1(\xi\alpha)\,d\xi\right]L_n(\lambda\tau), \tag{35}$$

$$u_\gamma(\alpha,\gamma,\tau) = \lambda\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_0^\infty \xi\left[\frac{d\bar{P}_n(\xi,\gamma)}{d\gamma} - \bar{\Phi}_n(\xi,\gamma)\right]J_0(\xi\alpha)\,d\xi\right\}L_n(\lambda\tau), \tag{36}$$

$$\omega_\beta(\alpha,\gamma,\tau) = -\frac{\lambda}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^\infty \xi\bar{\Phi}_n(\xi,\gamma)J_1(\xi\alpha)\,d\xi\right]L_n(\lambda\tau)\,, \tag{37}$$

де функції $\bar{\theta}_n(\alpha,\gamma)$, $\bar{\Phi}_n(\alpha,\gamma)$ і $\bar{P}_n(\alpha,\gamma)$ визначаються відповідно за формулами (22), (23) і (26). Зокрема, вертикальна компонента вектора пружного переміщення на межі півпростору $u_\gamma(\alpha,0,\tau)$ набуде вигляду

$$u_\gamma(\alpha,0,\tau) = -\frac{\lambda}{2}\sum_{n=0}^{\infty}L_n(\lambda\tau)\int_0^\infty \xi\bar{\Phi}_n(\xi,0)J_0(\xi\alpha)\,d\xi\,. \tag{38}$$

3. Оскільки $L_n(\lambda\tau) = 1$ при $n = 0$, то інтегральне перетворення Лаґерра (18) можна розглядати як інтегральне перетворення Лапласа з параметром перетворення λ. Проведемо символічну заміну $s = \lambda$ і запишемо вираз для зображення вертикальної компоненти вектора пружного переміщення на межі півпростору (34) при $n = 0$ і $æ^2 = 3$ $(\nu = 0.25)$:

$$\bar{u}_{\gamma,0}(\xi,s,0) \equiv u_\gamma^L(\xi,s,0) = M\,\frac{s\sqrt{\xi^2+s^2}}{(2\xi^2+3s^2)^2 - 4\xi^2\sqrt{\xi^2+3s^2}\,\sqrt{\xi^2+s^2}}\,, \tag{39}$$

де $M = \dfrac{æ^2 Q}{\pi\mu} = \dfrac{3Q}{\pi\mu}$. Застосувавши до останньої рівності формулу обернення перетворення Ганкеля, домножимо чисельник і знаменник підінтегральної функції на вираз $(2\xi^2+3s^2)^2 + 4\xi^2\sqrt{\xi^2+3s^2}\,\sqrt{\xi^2+s^2}$, після деяких перетворень матимемо

$$u_\gamma^L = \frac{M}{81}\,\mathbb{I}_1(\alpha,s) + \frac{4M}{81}\,\mathbb{I}_2(\alpha,s)\,, \tag{40}$$

де

$$\mathbb{I}_1(\alpha,s) = \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{(\xi^2+s^2)(2\xi^2+3s^2)^2\xi J_0(\xi\alpha)\,d\xi}{(s^2+a^2\xi^2)(s^2+b^2\xi^2)(s^2+c^2\xi^2)\sqrt{\xi^2+s^2}}\,,$$

$$\mathbb{I}_2(\alpha,s) = \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{\xi^2(\xi^2+s^2)(\xi^2+3s^2)\,\xi J_0(\xi\alpha)\,d\xi}{\left(s^2+a^2\xi^2\right)\,\left(s^2+b^2\xi^2\right)\,\left(s^2+c^2\xi^2\right)\sqrt{\xi^2+3s^2}}\,,$$

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,,\qquad b = \frac{1}{3}\sqrt{6-2\sqrt{3}}\,,\qquad c = \frac{1}{3}\sqrt{6+2\sqrt{3}}\,.$$

Зауважимо, що для довільних A, B, $a \ne 0$, $b \ne 0$ справджується формула

$$\frac{As^2+B\xi^2}{as^2+b\xi^2} \;\bullet\!\!=\!\!\bullet\; \frac{A}{a}\,\delta_+(\tau) + \frac{1}{\sqrt{ab}}\left(B - \frac{Ab}{a}\right)\xi\sin\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,\xi\tau\right), \tag{41}$$

де $\delta_+(\tau) = \dfrac{dS_+(\tau)}{dt}$ – асиметрична функція Дірака. На основі формули (41) виконаємо обчислення:

$$\frac{s^2+\xi^2}{s^2+a^2\xi^2} \;\bullet\!\!=\!\!\bullet\; \delta_+(\tau) + \frac{1}{a}(1-a^2)\xi\sin(a\xi\tau)\,,$$

$$\frac{3s^2+2\xi^2}{s^2+b^2\xi^2} \;\bullet\!\!=\!\!\bullet\; 3\delta_+(\tau) + \frac{1}{b}(2-3b^2)\,\xi\sin(b\xi\tau)\,,$$

$$\frac{3s^2+2\xi^2}{s^2+c^2\xi^2} \;\bullet\!\!=\!\!\bullet\; 3\delta_+(\tau) + \frac{1}{c}(2-3c^2)\,\xi\sin(c\xi\tau)\,.$$

Користуючись теоремою Бореля, деякими властивостями асиметричної функції Дірака, а також формулами

$$\int_0^\tau \sin(a\xi x)\sin\big(b\xi(\tau-x)\big)\,dx = \frac{a\sin(b\xi\tau)-b\sin(a\xi\tau)}{(a^2-b^2)\,\xi}, \qquad \frac{1}{s} \;\bullet\!\!=\!\!\bullet\; S_+(\tau),$$

обчислимо такі згортки:

$$F_1(\xi,\tau) \equiv \left[\delta_+(\tau)+\frac{1}{a}(1-a^2)\,\xi\sin(a\xi\tau)\right] * \left[3\delta_+(\tau)+\frac{1}{b}(2-3b^2)\,\xi\sin(b\xi\tau)\right] =$$

$$= 3\delta_+(\tau)+\frac{(2-3b^2)(1-b^2)}{b(a^2-b^2)}\,\xi\sin(b\xi\tau)\,S_+(\tau)+\frac{(2-3a^2)(1-a^2)}{a(b^2-a^2)}\,\xi\sin(a\xi\tau)\,S_+(\tau),$$

$$F_2(\xi,\tau) \equiv \; F_1(\xi,\tau) * \left[3\delta_+(\tau)+\frac{1}{c}(2-3c^2)\xi\sin(c\xi\tau)\right] = 9\delta_+(\tau)+$$

$$+\frac{(2-3b^2)(1-b^2)}{b(a^2-b^2)(c^2-b^2)}\,\xi\sin(b\xi\tau)\,S_+(\tau)+\frac{(2-3a^2)(1-a^2)}{a(b^2-a^2)(c^2-b^2)}\,\xi\sin(a\xi\tau)\,S_+(\tau)+$$

$$+\frac{(2-3c^2)^2(1-c^2)}{c(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\,\xi\sin(c\xi\tau)S_+(\tau),$$

$$F_3(\xi,\tau) \equiv S_+(\tau) * F_2(\xi,\tau) = (9+n_1+n_2+n_3)\,S_+(\tau)-$$

$$-\left[\,n_1\cos(a\xi\tau)+n_2\cos(b\xi\tau)+n_3\cos(c\xi\tau)\,\right]S_+(\tau),$$

де
$$n_1 = \frac{(2-3a^2)^2(1-a^2)}{a^2(b^2-a^2)(c^2-a^2)}, \quad n_2 = \frac{(2-3b^2)^2(1-b^2)}{b^2(c^2-b^2)(a^2-b^2)},$$

$$n_3 = \frac{(2-3c^2)^2(1-c^2)}{c^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.$$

На основі співвідношень [7] $\dfrac{1}{\sqrt{s^2+\xi^2}} \;\bullet\!\!=\!\!\bullet\; J_0(\xi\tau)$ і $J_0(\xi\tau)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\frac{\cos(\xi\tau x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, а також виразу

$$\int_0^\tau \cos(a\xi x)\cos\big(b\xi(\tau-x)\big)\,dx = \frac{a\sin(a\xi\tau)-b\sin(b\xi\tau)}{(a^2-b^2)\,\xi}$$

отримаємо наступну згортку:

$$F_3(\xi,\tau) * J_0(\xi\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\left[\,F_3(\xi,\tau) * \cos(\xi\tau x)\,\right]\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\pi\xi}\int_{-1}^{+1}\Bigg[(9+n_1+n_2+n_3)\,\frac{\sin(\xi\tau x)}{x}+\left(\frac{n_1x}{a^2-x^2}+\frac{n_2x}{b^2-x^2}+\frac{n_3x}{c^2-x^2}\right)\sin(\xi\tau x)-$$

$$-\frac{n_1a}{a^2-x^2}\sin(a\xi\tau)-\frac{n_2b}{b^2-x^2}\sin(b\xi\tau)-\frac{n_3c}{c^2-x^2}\sin(c\xi\tau)\Bigg]\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,S_+(\tau).$$

Враховуючи, що $\displaystyle\int_0^\infty \sin(a\xi)J_0(b\xi)\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\,S_+(a-b)$, запишемо оригінал інтеграла $\mathbb{I}_1(\alpha,s)$ у такому вигляді:

$$\mathbb{I}_1(\alpha,s) \;\bullet\!=\!\bullet\; \frac{S_+(\tau)}{\pi}\Bigg[(9+n_1+n_2+n_3)\int_{-1}^{+1}\frac{S_+(x\tau-\alpha)\,dx}{x\sqrt{x^2\tau^2-\alpha^2}\sqrt{1-x^2}} -$$

$$- n_1 a\frac{S_+(a\tau-\alpha)}{\sqrt{a^2\tau^2-\alpha^2}}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(a^2-x^2)\sqrt{1-x^2}} + n_1\int_{-1}^{+1}\frac{xS_+(x\tau-\alpha)\,dx}{(a^2-x^2)\sqrt{x^2\tau^2-\alpha^2}\sqrt{1-x^2}} -$$

$$- n_2 b\frac{S_+(b\tau-\alpha)}{\sqrt{b^2\tau^2-\alpha^2}}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(b^2-x^2)\sqrt{1-x^2}} + n_2\int_{-1}^{+1}\frac{xS_+(x\tau-\alpha)\,dx}{(b^2-x^2)\sqrt{x^2\tau^2-\alpha^2}\sqrt{1-x^2}} -$$

$$- n_3 c\frac{S_+(c\tau-\alpha)}{\sqrt{c^2\tau^2-\alpha^2}}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(c^2-x^2)\sqrt{1-x^2}} + n_3\int_{-1}^{+1}\frac{xS_+(x\tau-\alpha)\,dx}{(c^2-x^2)\sqrt{x^2\tau^2-\alpha^2}\sqrt{1-x^2}}\Bigg].$$

Оригінал інтеграла $\mathbb{I}_2(\alpha, s)$ отримуємо аналогічно:

$$\mathbb{I}_2(\alpha,s) \;\bullet\!=\!\bullet\; \frac{\sqrt{3}S_+(\tau)}{\pi}\Bigg[(n_4+n_5+n_6)\int_{-1}^{+1}\frac{S_+(x\tau-\sqrt{3}\alpha)\,dx}{x\sqrt{x^2\tau^2-3\alpha^2}\sqrt{1-x^2}} -$$

$$- n_4 a\frac{S_+(a\tau-\alpha)}{\sqrt{a^2\tau^2-\alpha^2}}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(3a^2-x^2)\sqrt{1-x^2}} + n_4\int_{-1}^{+1}\frac{xS_+(x\tau-\sqrt{3}\alpha)\,dx}{(3a^2-x^2)\sqrt{x^2\tau^2-3\alpha^2}\sqrt{1-x^2}} -$$

$$- n_5 b\frac{S_+(b\tau-\alpha)}{\sqrt{b^2\tau^2-\alpha^2}}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(3b^2-x^2)\sqrt{1-x^2}} + n_5\int_{-1}^{+1}\frac{xS_+(x\tau-\sqrt{3}\alpha)\,dx}{(3b^2-x^2)\sqrt{x^2\tau^2-3\alpha^2}\sqrt{1-x^2}} -$$

$$- n_6 c\frac{S_+(c\tau-\alpha)}{\sqrt{c^2\tau^2-\alpha^2}}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(3c^2-x^2)\sqrt{1-x^2}} + n_6\int_{-1}^{+1}\frac{xS_+(x\tau-\sqrt{3}\alpha)\,dx}{(3c^2-x^2)\sqrt{x^2\tau^2-3\alpha^2}\sqrt{1-x^2}}\Bigg],$$

де $$n_4 = \frac{(1-a^2)(1-3a^2)}{a^2(b^2-a^2)(c^2-a^2)}, \qquad n_5 = \frac{(1-b^2)(1-3b^2)}{b^2(c^2-b^2)(a^2-b^2)},$$

$$n_6 = \frac{(1-c^2)(1-3c^2)}{c^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.$$

Обчисливши табличні інтеграли за x [4], запишемо функцію $u_\gamma(\alpha, 0, \tau)$ при $\alpha = 1$:

$$u_\gamma = \begin{cases} 0, & 0 < \tau < 1, \\ \dfrac{M}{162}\left[m_0 + \dfrac{m_1}{\sqrt{\alpha^2\tau^2-1}} - \dfrac{m_2}{\sqrt{1-b^2\tau^2}} + \dfrac{m_3}{\sqrt{c^2\tau^2-1}}\right], & 1 \le \tau < \sqrt{3}, \\ \dfrac{M}{81}\left[m_0 - \dfrac{m_2}{\sqrt{1-b^2\tau^2}}\right], & \sqrt{3} \le \tau < \dfrac{1}{b}, \\ \dfrac{M}{81}\, m_0, & \dfrac{1}{b} < \tau < \infty, \end{cases} \tag{42}$$

де $$m_0 = 9 + n_1 + n_2 + n_3 = 4(n_4 + n_5 + n_6), \qquad m_1 = \frac{n_1}{\sqrt{a^2-1}} = -\frac{4n_4}{\sqrt{3a^2-1}},$$

$$m_2 = \frac{n_2}{\sqrt{1-b^2}} = \frac{4n_5}{\sqrt{1-3b^2}}, \qquad m_3 = \frac{n_3}{\sqrt{c^2-1}} = -\frac{4n_6}{\sqrt{3c^2-1}}.$$

Зауважимо, що при великих часах значення функції $u_\gamma(1, 0, \tau)$ співпадає з результатом, обчисленим за відомою в літературі [1] формулою стаціонарної задачі Бусінеска:

$$u_\gamma(\alpha,\gamma) = \frac{Q\,æ^2}{4\pi\mu(æ^2-1)}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} + \frac{Q}{4\pi\mu}\frac{\gamma^2}{\sqrt{(\alpha^2+\gamma^2)^3}}.$$

За наведеними формулами (38) і (42) виконано чисельні розрахунки вертикальної компоненти вектора пружного переміщення на межі півпростору $u_\gamma(\alpha, 0, \tau)$ при $\alpha = 1$, $Q/\mu = 1$, що зображені на рис. 1 і в табл. 1. Крива *1* обчислена за формулою (38) – за допомогою перетворення Лаґерра, крива *2* – за формулою (42) – перетворення Лапласа.

Отже, у роботі розвинуто два підходи до розв'язання класичної задачі Лемба про перехідний динамічний процес у пружному півпросторі при дії на його границі зосередженої нормальної сили. Зокрема, за допомогою інтегрального перетворення Лапласа вдалося отримати аналітичний вираз вертикального руху границі пружного півпростору та виділити три типи хвиль – поздовжню, поперечну і хвилю Релея, яка рухається зі швидкістю $c_R = 1.883\, c_1$ при $\nu = 0.25$. Слід зауважити, що амплітуда хвилі Релея має розрив другого роду, що суперечить фізиці явища та є результатом некоректної постановки задачі в рамках моделі твердого деформівного тіла. Порівняльний числовий аналіз обох підходів до визначення вертикального переміщення границі пружного півпростору вказує на те, що інтегральне перетворення Лаґерра дає похибку 5% в усіх точках неперервності, що є цілком достатнім для практичних обчислень компонент вектора пружного переміщення $u_\alpha(\alpha, \gamma, \tau)$ і $u_\gamma(\alpha, \gamma, \tau)$ за формулами (35) і (36) у всіх точках пружного півпростору.

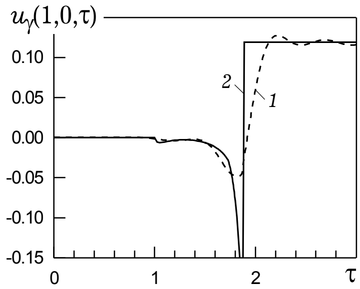

Рис. 1

Таблиця 1

τ	$u_\gamma(1, 0, \tau)$		
	формула (38) (перетворення Лагерра)		формула (42) (перетворення Лаплаcа)
	$n = 60$	$n = 120$	
0.0	0.00054	0.00052	0.0
0.5	0.00057	0.00058	0.0
1.0	-0.00139	-0.00281	-0.0053
1.5	-0.00545	-0.02477	-0.0054
1.82	-0.04748	-0.03124	-0.09860
2.5	0.11629	0.11667	0.11937
3.0	0.11595	0.12501	0.11937
3.5	0.11618	0.11821	0.11937

Разом з тим слід відмітити, що за допомогою інтегрального перетворення Лапласа можна отримати аналітичний вираз тільки вертикального переміщення границі, що й було зроблено іншими авторами [8].

1. *Божидарник В. В., Сулим Г. Т.* Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994. – 560 с.
2. *Галазюк В. А.* Метод полиномов Чебышева – Лагерра в смешанной задаче для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 3–7.
3. *Галазюк В. А., Горечко А. Н.* Об одном методе решения динамических задач теории упругости в сферических и цилиндрических координатах // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 6. – С. 41–44.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.
5. *Онищук В. Я.* Інтегральні перетворення в задачах твердого деформівного тіла. – Львів: Вид-во Львів. ун-ту, 1998. – 148 с.
6. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 667 с.
7. *Справочник* по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под. ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
8. *Achenbach J. D.* Wave propagation in elastic solids. – Amsterdam: North-Holland, 1973. – 425 p.

МЕТОД ПОЛИНОМОВ ЛАГЕРРА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛЕМБА

Предложены два подхода к решению классической задачи Лемба о действии сосредоточенной силы на границу упругого полупространства: с помощью интегрального преобразования Лапласа и метода полиномов Лагерра. В первом случае удалось получить аналитическое выражение вертикального движения границы упругого полупространства. Доказана эффективность применения второго подхода к решению задачи.

METHOD OF LAGUERRE POLYNOMIALS FOR SOLUTION OF LAMB PROBLEM

Two methods for solution of classical Lamb problem are proposed: the Laplace integral transformation and the method of Laguerre polynomials. In the first case it was possible to obtain the analytical expression for vertical displacement of elastic half-space. The effectiveness of using the second method is also proved.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
26.03.03