УДК 517.948.326

О. Д. Поліщук

РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОСТОРОННІХ ЗАДАЧ ДІРІХЛЕ – НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА В $\mathbb{R}^3$ МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ

Встановлено умови коректної розв'язності двосторонніх задач Діріхле – Неймана для рівняння Лапласа в $\mathbb{R}^3$ та еквівалентних їм систем інтегральних рівнянь для суми потенціалів простого і подвійного шару в гільбертових просторах функцій, які, як і їхні нормальні похідні, мають стрибок при переході через границю області.

Вступ. Необхідність розв'язання граничних задач для рівняння Лапласа виникає при моделюванні багатьох фізичних процесів (дифузія, тепловий потік, електростатичне поле, течія ідеальної рідини, пружні рухи твердого тіла, течія ґрунтових вод і т. п.) [1]. У роботі [8] розглянуто двосторонні задачі Діріхле та Неймана для рівняння Лапласа в $\mathbb{R}^3$ у гільбертовому просторі, елементи якого, як і їхні нормальні похідні, мають стрибок при переході через граничну поверхню.

У цій роботі дослідимо двосторонні задачі Діріхле – Неймана, тобто задачі, коли на різних сторонах границі задано умови різного типу. Встановлено умови коректної розв'язності сформульованих граничних задач. Їхній розв'язок пропонується шукати у вигляді суми потенціалів простого та подвійного шару. Встановлено умови коректної розв'язності систем інтегральних рівнянь Фредгольма, еквівалентних розглянутим граничним задачам.

1. Функціональні простори $H^1_{\Gamma,\Delta=0}$, $K^1_{\Gamma,\Delta=0}$, $HK^1_{\Gamma,\Delta=0}$. Нехай G – обмежена відкрита C^1-область [4] в $\mathbb{R}^3$ з 1-гладкою границею Γ. Позначимо $G' = \mathbb{R}^3 \backslash \bar{G}$ і введемо [6] на G і G' простори Соболєва $W_2^m(G)$ і $W_{2,0}^m(G') = \{u \in D'(G') : u/r,\ Du \in L_2(G')\}$ (тут r – відстань від точки $x \in G'$ до початку координат), а на Γ – простір $W_2^{1/2}(\Gamma)$.

Введемо простір $H^1 = W_2^1(G) \times W_{2,0}^1(G')$. Елементи простору H^1 позначимо через $u = (u^i, u^e)$, де $u^i \in W_2^1(G)$, $u^e \in W_{2,0}^1(G')$.

Лема 1 [5]. $\| \nabla u \|_{L_2(G')}$ *є нормою* $W_{2,0}^1(G')$, *еквівалентною* $\| u \|_{W_{2,0}^1(G')}$.

Означимо лінійні неперервні оператори слідів [7]

$$\gamma_0^i u = u\big|_{\Gamma_i}, \quad \gamma_0^e u = u\big|_{\Gamma_e}, \quad \gamma_0^i : W_2^1(G) \to W_2^{1/2}(\Gamma), \quad \gamma_0^e : W_{2,0}^1(G') \to W_2^{1/2}(\Gamma),$$

$$\gamma_1^i u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_i}, \quad \gamma_1^e u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_e}, \quad \gamma_1^i : W_2^1(G) \to W_2^{-1/2}(\Gamma), \quad \gamma_1^e : W_{2,0}^1(G') \to W_2^{-1/2}(\Gamma).$$

Тут $\mathbf{n}$ – нормаль до поверхні Γ, зовнішня по відношенню до G; $W_2^{-1/2}(\Gamma)$ – простір, двоїстий до $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Позначимо $\gamma_0^1 = \gamma_0^i - \gamma_0^e$, $\gamma_1^1 = \gamma_1^i - \gamma_1^e$ і $W_2^1(G; \Delta = 0) = \{u \in W_2^1(G) : \Delta u = 0\}$, $W_{2,0}^1(G'; \Delta = 0) = \{u \in W_{2,0}^1(G') : \Delta u = 0\}$.

Для довільних $u \in W_2^1(G; \Delta = 0)$, $v \in W_2^1(G)$ має місце формула Ґріна [7]

$$\int_G \nabla u \nabla v = \left\langle \gamma_1^i u,\ \gamma_0^i v \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma) \times W_2^{1/2}(\Gamma)}, \tag{1}$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V \times V^*}$ – відношення двоїстості на $V \times V^*$, а для будь-яких $u \in W_{2,0}^1(G'; \Delta = 0)$, $v \in W_{2,0}^1(G')$ виконується формула Гріна [5]

$$\int_{G'} \nabla u \nabla v = -\left\langle \gamma_1^e u,\, \gamma_0^e v \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times W_2^{1/2}(\Gamma)}\,. \tag{2}$$

Введемо простір $H_\Gamma^1 = \left\{ u \in H^1 : \gamma_1^0 u = 0 \right\}$ зі скалярним добутком $(u,v)_{H_\Gamma^1} = \int\limits_{G \cup G'} \nabla u \nabla v$ і нормою $\| u \|_{H_\Gamma^1} = (u,u)_{H_\Gamma^1}^{1/2}$.

Справджується

Лема 2 [9]. *Для довільного* $u \in H_\Gamma^1$ *норми* $\| u \|_{H_\Gamma^1}$ *і* $\| u \|_{H^1}$ *еквівалентні.*

Введемо простір $H_{\Gamma,\Delta=0}^1 = \left\{ u \in H_\Gamma^1 : \Delta u = 0 \right\}$. Справджується

Теорема 1 [**7**]. *Оператор* γ_1^1 *здійснює неперервне, взаємно однозначне відображення з* $H_{\Gamma,\Delta=0}^1$ *в* $W_2^{-1/2}(\Gamma)$.

Введемо потенціал простого шару

$$u(x) = (U\gamma_1^1 u)(x) \equiv \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\gamma_1^1 u(y)}{|x-y|}\, d\Gamma_y, \qquad x \in G, G', \qquad y \in \Gamma\,, \tag{3}$$

Має місце

Теорема 2 [**7**]. *Довільну функцію* $u \in H_{\Gamma,\Delta=0}^1$ *можна подати у вигляді* (3).

Введемо простір $K_\Gamma^1 = \left\{ u \in H^1 \setminus R : \gamma_1^1 u = 0 \right\}$, $(u,v)_{K_\Gamma^1} = \int\limits_{G \cup G'} \nabla u \nabla v$, $\| u \|_{K_\Gamma^1} = (u,u)_{K_\Gamma^1}^{1/2}$. Має місце

Лема 3 [9]. *Для довільного* $u \in K_\Gamma^1$ *норми* $\| u \|_{K_\Gamma^1}$ *і* $\| u \|_{H^1}$ *еквівалентні.*

Введемо простори $K_{\Gamma,\Delta=0}^1 = \left\{ u \in K_\Gamma^1 : \Delta u = 0 \right\}$, $\tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma) = W_2^{1/2}(\Gamma) \setminus P$, $\tilde{W}_2^{-1/2}(\Gamma) = \left\{ g \in W_2^{-1/2}(\Gamma) \setminus P : \left\langle g, 1 \right\rangle_{W_2^{1/2}(\Gamma)\times W_2^{-1/2}(\Gamma)} = 0 \right\}$, де P – множина постійних функцій на Γ. Має місце

Теорема 3 [**5**]. *Оператор* γ_0^1 *здійснює неперервне, взаємно однозначне відображення з* $K_{\Gamma,\Delta=0}^1$ *у* $\tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma)$.

Введемо потенціал подвійного шару

$$v(x) = (V\gamma_0^1 v)(x) \equiv -\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \gamma_0^1 v(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x-y|}\, d\Gamma_y\,,$$
$$x \in G, G', \qquad y \in \Gamma\,. \tag{4}$$

Має місце

Теорема 4 [**6**]. *Довільну функцію* $v \in K_{\Gamma,\Delta=0}^1$ *можна подати у вигляді* (4).

Введемо простір $HK_\Gamma^1 = H_\Gamma^1 \cup K_\Gamma^1$, $(u,v)_{HK_\Gamma^1} = \int\limits_{G \cup G'} \nabla u \nabla v$, $\| u \|_{HK_\Gamma^1} = (u,u)_{HK_\Gamma^1}^{1/2}$.

З лем **2** і **3** випливає наступне твердження.

Лема 4. *Для довільного* $u \in HK_\Gamma^1$ *норми* $\| u \|_{HK_\Gamma^1}$ *і* $\| u \|_{H^1}$ *еквівалентні.*

Введемо простір $HK_{\Gamma,\Delta=0}^1 = H_{\Gamma,\Delta=0}^1 \cup K_{\Gamma,\Delta=0}^1$.

Зі співвідношень (1), (2) випливає, що для довільних $u \in HK_{\Gamma,\Delta=0}^1$, $v \in HK_\Gamma^1$ має місце формула Ґріна

$$(u,v)_{HK^1_\Gamma} = \left\langle \gamma_1^i u,\ \gamma_0^i v \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times W_2^{1/2}(\Gamma)} - \left\langle \gamma_1^e u,\ \gamma_0^e v \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times W_2^{1/2}(\Gamma)}, \tag{5}$$

причому, якщо $v \in HK^1_{\Gamma,\Delta=0}$, то справджуються співвідношення

$$\begin{aligned}
&\left\langle \gamma_1^i u,\ \gamma_0^i v \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times W_2^{1/2}(\Gamma)} - \left\langle \gamma_1^e u,\ \gamma_0^e v \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times W_2^{1/2}(\Gamma)} = \\
&\quad = \left\langle \gamma_1^i v, \gamma_0^i u \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times W_2^{1/2}(\Gamma)} - \left\langle \gamma_1^e v, \gamma_0^e u \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times W_2^{1/2}(\Gamma)} = \\
&\quad = \left\langle \gamma_1^i u, \gamma_0^i v \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times W_2^{1/2}(\Gamma)} - \left\langle \gamma_1^e v, \gamma_0^e u \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times W_2^{1/2}(\Gamma)} = \\
&\quad = \left\langle \gamma_1^i v, \gamma_0^i u \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times W_2^{1/2}(\Gamma)} - \left\langle \gamma_1^e u, \gamma_0^e v \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times W_2^{1/2}(\Gamma)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Крім того, має місце

Лема 5 [9]. $H^1_{\Gamma,\Delta=0} \cap K^1_{\Gamma,\Delta=0} = \{0\}$.

Якщо виконується це твердження, то довільний елемент $w \in HK^1_{\Gamma,\Delta=0}$ можна єдиним чином подати у вигляді суми

$$w = u + v, \tag{7}$$

де $u \in H^1_{\Gamma,\Delta=0}$, $v \in K^1_{\Gamma,\Delta=0}$. Тоді з теорем **1** і **3** випливає правдивість наступного твердження.

Теорема 5. *Оператор* (γ_1^1, γ_0^1) *здійснює неперервне, взаємно однозначне відображення з* $HK^1_{\Gamma,\Delta=0}$ *у* $W_2^{-1/2}(\Gamma)\times \tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma)$.

Далі, з теорем **2** і **4** випливає

Теорема 6. *Довільну функцію* $w \in HK^1_{\Gamma,\Delta=0}$ *можна подати у вигляді*

$$\begin{aligned}
w(x) &= \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\gamma_1^1 u(y)}{|x-y|}\, d\Gamma_y - \\
&\quad - \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \gamma_0^1 v(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|x-y|}\, d\Gamma_y, \qquad x \in G, G', \quad y \in \Gamma.
\end{aligned} \tag{8}$$

2. Двосторонні задачі Діріхле − Неймана. Розглянемо граничні задачі для рівняння Лапласа:

знайти функцію

$$u \in HK^1_{\Gamma,\Delta=0}, \tag{9}$$

яка задовольняє умови

$$\gamma_0^i u^i = f^i, \qquad f^i \in W_2^{1/2}(\Gamma), \qquad \gamma_1^e u^e = g^e, \qquad g^e \in W_2^{-1/2}(\Gamma) \tag{10}$$

або умови

$$\gamma_1^i u^i = g^i,\ g^i \in W_2^{-1/2}(\Gamma),\ \gamma_0^e u^e = f^e,\ f^e \in W_2^{1/2}(\Gamma). \tag{11}$$

Використовуючи формули (5), (6) та умови (10), отримуємо еквівалентну (9), (10) варіаційну задачу:

знайти функцію $u \in HK^1_{\Gamma,\Delta=0}$, яка задовольняє співвідношення

$$\begin{aligned}
a(u,v) \equiv \int_{G\cup G'} \nabla u \nabla v &= \left\langle f^i,\ \gamma_1^i v \right\rangle_{W_2^{1/2}(\Gamma)\times W_2^{-1/2}(\Gamma)} - \\
&\quad - \left\langle g^e,\ \gamma_0^e v \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times W_2^{1/2}(\Gamma)}
\end{aligned} \tag{12}$$

для довільного $v \in HK^1_{\Gamma,\Delta=0}$.

Тоді за допомогою леми **4** і теореми Лакса − Мільґрама доводимо таке твердження.

Теорема 7. *Існує єдиний розв'язок задачі* (9), (10) (*оператор* $(\gamma_0^i,\ \gamma_1^e)$ *здійснює взаємно однозначне відображення з* $HK^1_{\Gamma,\Delta=0}$ *у* $W_2^{1/2}(\Gamma)\times W_2^{-1/2}(\Gamma)$).

Аналогічним способом задачі (9), (11) можна співставити еквівалентну їй варіаційну задачу:

знайти функцію $u\in HK^1_{\Gamma,\Delta=0}$, яка задовольняє співвідношення

$$a(u,v)=\left\langle g^i,\gamma_0^i v\right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times W_2^{1/2}(\Gamma)}-\left\langle f^e,\gamma_1^e v\right\rangle_{W_2^{1/2}(\Gamma)\times W_2^{-1/2}(\Gamma)}, \tag{13}$$

для довільного $v\in HK^1_{\Gamma,\Delta=0}$.

На підставі леми **4** і теореми Лакса − Мільґрама можна довести таку теорему.

Теорема 8. *Існує єдиний розв'язок задачі* (9), (11) (*оператор* $(\gamma_1^i,\ \gamma_0^e)$ *здійснює взаємно однозначне відображення з* $HK^1_{\Gamma,\Delta=0}$ *у* $W_2^{-1/2}(\Gamma)\times W_2^{1/2}(\Gamma)$).

3. Системи інтегральних рівнянь, еквівалентні двостороннім задачам Діріхле − Неймана. Розглянемо варіаційну задачу (9), (12). Враховуючи формули (5), (6) і теореми **5**, **6**, отримуємо еквівалентну (9), (12) варіаційну задачу:

знайти пару

$$(\sigma,q)\in W_2^{-1/2}(\Gamma)\times\tilde W_2^{1/2}(\Gamma),\qquad \sigma=\gamma_1^1 u,\qquad q=\gamma_1^0 u, \tag{14}$$

яка для довільної пари $(\mu,\nu)\in W_2^{-1/2}(\Gamma)\times\tilde W_2^{1/2}(\Gamma)$ задовольняє співвідношення

$$\begin{aligned}
b((\sigma,q),(\mu,\nu)) &\equiv \int_\Gamma\left[-\frac{q(x)}{2}+\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\frac{\sigma(y)}{|x-y|}d\Gamma_y-\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma q(y)\frac{\partial}{\partial\mathbf n_y}\frac{1}{|x-y|}d\Gamma_y\right]\times\\
&\times\left[\frac{\mu(x)}{2}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\mathbf n_x}\int_\Gamma\frac{\mu(y)}{|x-y|}d\Gamma_y+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\mathbf n_x}\int_\Gamma\nu(y)\frac{\partial}{\partial\mathbf n_y}\frac{1}{|x-y|}d\Gamma_y\right]d\Gamma_x-\\
&-\int_\Gamma\left[-\frac{\sigma(x)}{2}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\mathbf n_x}\int_\Gamma\frac{\sigma(y)}{|x-y|}d\Gamma_y+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\mathbf n_x}\int_\Gamma q(y)\frac{\partial}{\partial\mathbf n_y}\frac{1}{|x-y|}d\Gamma_y\right]\times\\
&\times\left[\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\frac{\mu(y)}{|x-y|}d\Gamma_y+\frac{\nu(x)}{2}-\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\nu(y)\frac{\partial}{\partial\mathbf n_y}\frac{1}{|x-y|}d\Gamma_y\right]d\Gamma_x=\\
&=\int_\Gamma f^i(x)\left[\frac{\mu(x)}{2}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\mathbf n_x}\int_\Gamma\frac{\mu(y)}{|x-y|}d\Gamma_y+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\mathbf n_x}\int_\Gamma\nu(y)\frac{\partial}{\partial\mathbf n_y}\frac{1}{|x-y|}d\Gamma_y\right]d\Gamma_x-\\
&\qquad-\int_\Gamma g^e(x)\left[\frac{\nu(x)}{2}+\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\frac{\mu(y)}{|x-y|}d\Gamma_y-\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\nu(y)\frac{\partial}{\partial\mathbf n_y}\frac{1}{|x-y|}d\Gamma_y\right]d\Gamma_x.
\end{aligned}\tag{15}$$

Очевидно, що білінійна форма $b((\sigma,q),(\mu,\nu))$ є неперервною і симетричною. Покладемо $\mu=\sigma,\ \nu=q$. Тоді, використовуючи формули (5), (6), розвинення вигляду (7), результати лем **2**–**5** і теорем **1**, **3**, для довільної пари $(\sigma,q)\in W_2^{-1/2}(\Gamma)\times\tilde W_2^{1/2}(\Gamma)$ отримуємо

$$b((\sigma, q),(\mu, \nu)) =$$

$$= \left\langle \gamma_1^i w^i, \gamma_0^i w^i \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times\tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma)} - \left\langle \gamma_1^e w^e, \gamma_0^e w^e \right\rangle_{W_2^{-1/2}(\Gamma)\times\tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma)} =$$

$$= \| w \|^2_{HK_\Gamma^1} = \| u \|^2_{H_\Gamma^1} + \| v \|^2_{K_\Gamma^1} \geq C_1 \| \sigma \|^2_{W_2^{-1/2}(\Gamma)} + C_2 \| q \|^2_{\tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma)},$$

де $C_1, C_2 \geq 0$, тобто білінійна форма $b((\sigma, q),(\mu, \nu))$ є $W_2^{-1/2}(\Gamma)\times\tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma)$-еліптичною.

Очевидно, що розв'язання задачі (14), (15) еквівалентне розв'язанню системи інтегральних рівнянь

$$-\frac{q(x)}{2} + \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\sigma(y)}{|x-y|}\, d\Gamma_y - \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma q(y)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}\frac{1}{|x-y|}\, d\Gamma_y = f^i(x), \tag{16}$$

$$-\frac{\sigma(x)}{2} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}\int_\Gamma \frac{\sigma(y)}{|x-y|}\, d\Gamma_y + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}\int_\Gamma q(y)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}\frac{1}{|x-y|}\, d\Gamma_y = g^e(x). \tag{17}$$

Тоді з теореми Лакса – Мільґрама випливає

Теорема 9. *Існує єдиний розв'язок системи* (16), (17).

Аналогічним способом можна показати, що розв'язання задачі (9), (11) еквівалентне розв'язанню системи інтегральних рівнянь

$$\frac{\sigma(x)}{2} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}\int_\Gamma \frac{\sigma(y)}{|x-y|}\, d\Gamma_y + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}\int_\Gamma q(y)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}\frac{1}{|x-y|}\, d\Gamma_y = g^i(x), \tag{18}$$

$$\frac{q(x)}{2} + \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\sigma(y)}{|x-y|}\, d\Gamma_y - \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma q(y)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}\frac{1}{|x-y|}\, d\Gamma_y = f^e(x), \tag{19}$$

і довести таке твердження.

Теорема 10. *Існує єдиний розв'язок системи* (18), (19).

Апроксимуючи простори $W_2^{-1/2}(\Gamma)\times\tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma)$ повними ортонормованими системами функцій, B-сплайнами або скінченними елементами інших типів [3], аналогічно, як у [2], можна довести збіжність ряду проекційних методів (колокації, Гальоркіна, найменших квадратів, найменшої похибки) розв'язування систем інтегральних рівнянь (16), (17) і (18), (19).

1. *Громадка Т., Лей Ч.* Комплексный метод граничных элементов. – М.: Мир, 1990. – 303 с.
2. *Полищук А. Д.* О сходимости проекционных методов решения интегральных уравнений теории потенциала. – Новосибирск, 1988. – 11 с. – (Препр. / СО АН СССР. Вычисл. центр; 776).
3. *Полищук А. Д.* О численном решении интегральных уравнений теории потенциала. – Новосибирск, 1987. – 26 с. – (Препр. / СО АН СССР. Вычисл. центр; 743).
4. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 342 с.
5. *Giroure J.* Formulation variationnelle par equations integrales de problemes aux limites exterieurs // Rap. Int. Centre de Math. Appl. de l'Ecole Politechn. – 1976. – No. 6. – 97 p.
6. *Giroure J., Nedelec J. C.* Numerical solution of an exterior Neuman problem using a double layer potential // Rap. Int. Centre de Math. Appl. de l'Ecole Politechn. – 1977. – No. 21. – 34 p.
7. *Nedelec J. C., Planchard J.* Une methode variationnelle d'elements finis pour la resolution numerique d'un probleme exterieur dans $\mathbb{R}^3$ // R.A.I.R.O. – 1973. – R3, No. 7. – P. 105–129.
8. *Polishchuk A. D.* An integral equation solution of the Dirichlet and Neuman problems for the Laplacian in $\mathbb{R}^3$ // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED-2003): Proc. 8th Int. Seminar/Workshop, Lviv, Sept. 23–25, 2003. – Lviv, 2003. – P. 98–101.
9. *Polishchuk A. D.* Simple and double layer potential in the Hilbert spaces // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED-2003): Proc. 8th Int. Seminar/Workshop, Lviv, Sept. 23–25, 2003. – Lviv, 2003. – P. 94–97.

РЕШЕНИЕ ДВУСТОРОННИХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ – НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В $\mathbb{R}^3$ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Установлены условия корректной разрешимости двусторонних задач Дирихле – Неймана для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$ *и эквивалентных им систем интегральных уравнений для суммы потенциалов простого и двойного слоя в гильбертовых пространствах функций, которые, как и их нормальные производные, имеют скачок при переходе через границу области.*

SOLUTION OF BILATERAL DIRICHLET – NEUMANN PROBLEMS FOR THE LAPLACIAN IN $\mathbb{R}^3$ BY POTENTIAL THEORY METHODS

The conditions of correct solvability of bilateral Dirichlet –Neumann problems for the Laplacian in $\mathbb{R}^3$ *and equivalent to them integral equation systems for simple and double potentials sum are determined in the Hilbert spaces, the elements of which, as well as their normal derivatives, have a jump through the boundary surface.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
14.07.04