УДК 517. 95

М. М. Симотюк

ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Введено поняття $(+\infty,+\infty)$ - і $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ -коректності двоточкової задачі для псевдодиференціальних рівнянь. Встановлено критерій $(+\infty,+\infty)$ - коректності задачі і для $(+\infty,+\infty)$ -коректної задачі побудовано її розв'язувальний оператор. Встановлено зв'язок між $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ -коректністю задачі та існуванням неперервного замикання її розв'язувального оператора. Знайдено умови, при яких розв'язувальний оператор $(+\infty,+\infty)$ -коректної задачі допускає неперервне замикання. Доведено метричні теореми про виконання таких умов для майже всіх (стосовно міри Лебега) значень вузлів інтерполяції задачі.

1. Основні позначення. Через $G(k)$ будемо позначати таку додатну функцію $G(k):\mathbb{Z}^p \to \mathbb{R}_+$, що:

1) $\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad G(k) \ge 1$; 2) $\lim\limits_{|k|\to\infty} G(k) = +\infty$.

Будемо говорити, що функція $G(k):\mathbb{Z}^p \to \mathbb{R}_+$ справджує умову (λ,μ) (тут λ, μ − деякі невід'ємні сталі, які одночасно не дорівнюють нулю), якщо ряд $\sum\limits_{|k|\ge 0} G^{-\lambda}(k)\exp(-\mu G(k))$ є збіжним. Наприклад, функція $G(k) \equiv (1+|k|)$ справджує умову (λ,μ) для довільних $\lambda \ge 0$ і $\mu > 0$ або для довільних $\lambda > p$ і $\mu \ge 0$; функція $G(k) \equiv \ln(3+|k|)$ справджує умову (λ,μ) для довільних $\lambda \ge 0$ і $\mu > p$ або для довільних $\lambda > 0$ і $\mu \ge p$.

За функцією $G(k):\mathbb{Z}^p \to \mathbb{R}_+$ означимо простори $W_{\alpha,\beta}(G)$, які отримуються внаслідок поповнення простору $\mathcal{T}$ (див. [1, розд. 2, § 6.2]) скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \varphi_k \exp(ik,x)$ за нормою

$$\left\|\varphi(x); W_{\alpha,\beta}(G)\right\| = \sqrt{\sum_{|k|\ge 0} |\varphi_k|^2 G^{2\alpha}(k)\exp(2\beta G(k))}\,.$$

Через $C^n([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$ позначимо простір функцій $u(t,x)$ таких, що для кожного $t\in[0,T]$ похідні $\partial^j u(t,x)/\partial t^j$, $0 \le j \le n$, належать до простору $W_{\alpha,\beta}(G)$ і неперервно змінюються у цьому просторі при $t\in[0,T]$. Норму в просторі $C^n([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$ задамо формулою

$$\left\|u(t,x); C^n([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))\right\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\|\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}; W_{\alpha,\beta}(G)\right\|.$$

Через $C^n([0,T];S(G))$, $n=0,1,\ldots$, позначимо множину псевдодиференціальних операцій $A(t,D)$, $D=(-i\partial/\partial x_1,\ldots,-i\partial/\partial x_p)$, дія яких на функцію $u(t,x) = \sum\limits_{|k|\ge 0} u_k(t)\exp(ik,x)$ задається формулою

$$A(t,D)u(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} A(t,k)u_k(t)\exp(ik,x),$$

де $A(t,k)\in C^n([0,T];\mathbb{C})$, $k\in\mathbb{Z}^p$, причому $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\left\{\dfrac{\left\|A(t,k);C^n[0,T]\right\|}{G(k)}\right\} < \infty$. Функції $A(t,k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, називатимемо амплітудами псевдодиференціальної операції $A(t,D)$. Символом $C^n_{\mathbb{R}}([0,T];S(G))$, $n = 0,1,\dots$, будемо позначати множину тих псевдодиференціальних операцій $A(t,D) \in C^n([0,T];S(G))$, усі амплітуди яких є дійснозначними функціями. Зазначимо, що для довільних α,β псевдодиференціальна операція $A(t,D) \in C^n([0,T];S(G))$ неперервно відображає простір $C^n([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$ у простір $C^n([0,T];W_{\alpha-1,\beta}(G))$.

2. Постановка задачі. Розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)u(t,x) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_1(t,D)\frac{\partial u}{\partial t} + A_2(t,D)u = 0, \qquad (t,x) \in Q_p^T, \quad (1)$$

$$u(t_1,x) = \varphi_1(x), \quad u(t_2,x) = \varphi_2(x), \quad x \in \Omega_p, \quad 0 \le t_1 < t_2 \le T, \qquad (2)$$

де $A_1(t,D)$, $A_2(t,D)$ − псевдодиференціальні операції, які належать до класу $C([0,T];S(G))$; $Q_p^T = (0,T) \times \Omega_p$, Ω_p − p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$.

Означення 1. Задачу (1), (2) будемо називати $(+\infty,+\infty)$-*коректною*, якщо для довільних $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathcal{T}$ у просторі $C^2([0,T];\mathcal{T})$ існує єдиний розв'язок $u(t,x)$ цієї задачі, який неперервно залежить від $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathcal{T}$ у такому сенсі: з того, що послідовності $\{\varphi_1^m(x)\}_{m=1}^\infty$, $\{\varphi_2^m(x)\}_{m=1}^\infty$ збігаються у $\mathcal{T}$ до $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ відповідно, випливає, що послідовність $\{u^m(t,x)\}_{m=1}^\infty$ розв'язків задач

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)u^m(t,x) = 0, \quad u^m(t_1,x) = \varphi_1^m(x), \quad u^m(t_2,x) = \varphi_2^m(x), \quad m \in \mathbb{N},$$

збігається в $C^2([0,T];\mathcal{T})$ до $u(t,x)$.

Означення 2. Нехай $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\beta_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha_1 \ge \alpha$, $\alpha_2 \ge \alpha$, $\beta_1 \ge \beta$, $\beta_2 \ge \beta$. Задачу (1), (2) будемо називати $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$-*коректною*, якщо для довільних $\varphi_1(x) \in W_{\alpha_1,\beta_1}(G)$, $\varphi_2(x) \in W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$ у просторі $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$ існує єдиний розв'язок $u(t,x)$ цієї задачі такий, що

$$\left\| L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)u(t,x); C([0,T];W_{\alpha-1,\beta}(G)) \right\| = 0,$$

$$\left\| u(t_1,x) - \varphi_1(x); W_{\alpha_1,\beta_1}(G) \right\| = 0, \qquad \left\| u(t_2,x) - \varphi_2(x); W_{\alpha_2,\beta_2}(G) \right\| = 0,$$

причому виконується оцінка

$$\left\| u(t,x); C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G)) \right\| \le C\left(\left\| \varphi_1(x); W_{\alpha_1,\beta_1}(G) \right\| + \left\| \varphi_2(x); W_{\alpha_2,\beta_2}(G) \right\| \right),$$

де стала $C > 0$ не залежить від вибору $\varphi_1(x) \in W_{\alpha_1,\beta_1}(G)$, $\varphi_2(x) \in W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$.

Основною метою цієї роботи є встановлення умов, при виконанні яких задача (1), (2) є $(+\infty,+\infty)$-коректною та $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$-коректною, а також доведення тверджень про можливість виконання таких умов для майже всіх (стосовно міри Лебега) значень вузлів інтерполяції. Робота продовжує дослідження, проведені в [6], де розглянуто задачу з умовами (2) для рівняння (1), у якому $A_1(t,D), A_2(t,D) \in C_{\mathbb{R}}([0,T]; S(G))$, $G(k) \equiv 1+|k|$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Критерій $(+\infty,+\infty)$-коректності двоточкової задачі, необхідна умова $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$-коректності задачі. З того, що псевдодиференціальні операції $A_1(t,D), A_2(t,D)$ належать до класу $C([0,T];S(G))$ випливає, що звичайне диференціальне рівняння $L\left(\frac{d}{dt}, k\right) f(t) = 0,\ k \in \mathbb{Z}^p$, має таку фундаментальну систему розв'язків $f_1(t,k),\ f_2(t,k) \in C^2[0,T],\ k \in \mathbb{Z}^p$, що $f_1(0,k) = f_2'(0,k) = 1,\ f_1'(0,k) = f_2(0,k) = 0$. Позначимо:

$$H_k(t,\tau) = f_1(t,k) f_2(\tau,k) - f_1(\tau,k) f_2(t,k), \qquad t,\tau \in [0,T], \tag{3}$$

$$\Delta(k,t_1,t_2) = \begin{vmatrix} f_1(t_1,k) & f_2(t_1,k) \\ f_1(t_2,k) & f_2(t_2,k) \end{vmatrix}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{4}$$

Теорема 1. *Нехай псевдодиференціальні операції* $A_1(t,D),\ A_2(t,D)$ *належать до класу* $C([0,T]; S(G))$. *Тоді для* $(+\infty,+\infty)$*-коректності задачі* (1), (2) *необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \qquad \Delta(k,t_1,t_2) \neq 0. \tag{5}$$

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Якщо $\Delta(k^0,t_1,t_2) = 0$ для деякого $k^0 \in \mathbb{Z}^p$, то лінійна система

$$C_{1,k^0} f_1(t_1,k^0) + C_{2,k^0} f_2(t_1,k^0) = 0,$$

$$C_{1,k^0} f_1(t_2,k^0) + C_{2,k^0} f_2(t_2,k^0) = 0$$

має ненульовий розв'язок $(C_{1,k^0}, C_{2,k^0}) \neq (0,0)$. Тоді функція

$$u_0(t,x) = \left(C_{1,k^0} f_1(t_2,k^0) + C_{2,k^0} f_2(t_2,k^0)\right) \exp(ik^0,x) \in C^2([0,T],\mathcal{T})$$

є ненульовим розв'язком рівняння (1) і справджує умови (2), в яких $\varphi_1(x) = 0,\ \varphi_2(x) = 0$. Це суперечить $(+\infty,+\infty)$-коректності задачі (1), (2).

Достатність. Нехай в умовах (2) $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x) \in \mathcal{T}$. Тоді існує таке $N \in \mathbb{N}$, що правильними є наступні зображення:

$$\varphi_1(x) = \sum_{|k|\le N} \varphi_{1,k} \exp(ik,x), \qquad \varphi_2(x) = \sum_{|k|\le N} \varphi_{2,k} \exp(ik,x), \tag{6}$$

де $\varphi_{1,k}, \varphi_{2,k} \in \mathbb{C},\ |k| \le N$. Якщо функція $u(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} u_k(t) \exp(ik,x)$ належить до простору $C^2([0,T];\mathcal{T})$ і є розв'язком задачі (1), (2), то з рівностей (6) випливає, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ функція $u_k(t)$ є розв'язком рівняння $L\left(\frac{d}{dt}, k\right) u_k(t) = 0$ і справджує такі умови:

$$u_k(t_1) = 0, \qquad u_k(t_1) = 0, \qquad |k| > N,$$

$$u_k(t_2) = \varphi_{1,k}, \qquad u_k(t_2) = \varphi_{2,k}, \qquad |k| \le N.$$

Таким чином,

$$u_k(t,x) = C_{1,k} f_1(t,k) + C_{2,k} f_2(t,k), \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{7}$$

де сталі $C_{1,k},\ C_{2,k}$ є розв'язками систем рівнянь

$$\begin{matrix} C_{1,k} f_1(t_1,k) + C_{2,k} f_2(t_1,k) = 0, \\ C_{1,k} f_1(t_2,k) + C_{2,k} f_2(t_2,k) = 0, \end{matrix} \qquad |k| > N, \tag{8}$$

$$\begin{matrix} C_{1,k} f_1(t_1,k) + C_{2,k} f_2(t_1,k) = \varphi_{1,k}, \\ C_{1,k} f_1(t_2,k) + C_{2,k} f_2(t_2,k) = \varphi_{2,k}, \end{matrix} \qquad |k| \le N. \tag{9}$$

Оскільки виконується умова (5), то система (8) має тільки нульовий розв'язок $(C_{1,k}, C_{2,k}) = (0,0)$, $|k| > N$, а система (9) має єдиний розв'язок

$$C_{1,k} = \frac{\varphi_{1,k} f_2(t_2,k) - \varphi_{2,k} f_2(t_1,k)}{\Delta(k,t_1,t_2)}, \qquad |k| \le N,$$

$$C_{2,k} = \frac{\varphi_{2,k} f_1(t_1,k) - \varphi_{1,k} f_1(t_2,k)}{\Delta(k,t_1,t_2)}, \qquad |k| \le N. \tag{10}$$

Із формул (7), (10) випливає, що при виконанні умови (5) задача (1), (2), у якій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \in \mathcal{T}$ визначені рівностями (6), має єдиний розв'язок

$$u(t,x) = \sum_{|k|\le N} \frac{\exp(ik,x)}{\Delta(k,t_1,t_2)} \big(\varphi_{1,k} H_k(t,t_2) - \varphi_{2,k} H_k(t,t_1)\big) \in C^2([0,T],\mathcal{T}). \tag{11}$$

Доведемо, що при виконанні умови (5) отриманий розв'язок (11) неперервно залежить від $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ у сенсі означення 1. Припустимо, що послідовності $\{\varphi_1^m(x)\}_{m=1}^{\infty}$, $\{\varphi_2^m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ збігаються в $\mathcal{T}$ до $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ відповідно. Це означає, що існує $N_1 \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $m \in \mathbb{N}$

$$\varphi_1^m(x) = \sum_{|k|\le N_1} \varphi_{1,k}^m \exp(ik,x), \qquad \varphi_2^m(x) = \sum_{|k|\le N_1} \varphi_{2,k}^m \exp(ik,x), \tag{12}$$

і для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ $\exists \lim\limits_{m\to\infty} \varphi_{1,k}^m = \varphi_{1,k}$, $\exists \lim\limits_{m\to\infty} \varphi_2^m = \varphi_{2,k}$. Оскільки виконується умова (5), то для кожного $m \in \mathbb{N}$ задача

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right) u^m(t,x) = 0, \ u^m(t_1,x) = \varphi_1^m(x), \ u^m(t_2,x) = \varphi_2^m(x),$$

має єдиний розв'язок $u^m(t,x) = \sum\limits_{|k|\le N_1} u_k^m(t) \exp(ik,x)$. Із формул (11), (12) дістаємо, що

$$u^m(t,x) = \sum_{|k|\le N} \frac{\exp(ik,x)}{\Delta(k,t_1,t_2)} \big(\varphi_{1,k}^m H_k(t,t_2) - \varphi_{2,k}^m H_k(t,t_1)\big), \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Покладемо для зручності

$$u_k^m(t) \equiv 0, \quad \varphi_{1,k}^m = 0, \quad \varphi_{2,k}^m = 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \text{якщо} \quad |k| > N_1,$$
$$u_k(t) \equiv 0, \quad \varphi_{1,k} = 0, \quad \varphi_{2,k} = 0, \quad \text{якщо} \quad |k| > N.$$

Тоді з формул (11), (13) випливає, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ і для довільного $t \in [0,T]$ виконуються нерівності

$$\left| \frac{d^j u_k^m(t)}{dt^j} - \frac{d^j u_k(t)}{dt^j} \right| = \left| \frac{H_k^{(j)}(t,t_2)(\varphi_{1,k}^m - \varphi_{1,k}) - H_k^{(j)}(t,t_1)(\varphi_{2,k}^m - \varphi_{2,k})}{\Delta(k,t_1,t_2)} \right| \le$$

$$\le \max_{\substack{0\le t\le T,\\ 0\le\tau\le T}} \left| \frac{H_k^{(j)}(t,t_2)}{\Delta(k,t_1,t_2)} \right| \left(\left|\varphi_{1,k}^m - \varphi_{1,k}\right| + \left|\varphi_{2,k}^m - \varphi_{2,k}\right| \right), \quad j = 0,1,2, \quad m \in \mathbb{N},$$

з яких отримуємо, що $\exists \lim\limits_{m\to\infty} \left\| u_k^m(t) - u_k(t); C^2[0,T] \right\| = 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$. Отже, послідовність $\{u^m(t,x)\}_{m=1}^{\infty}$ збігається у просторі $C^2([0,T];\mathcal{T})$ до $u(t,x)$. ◊

Теорема 2. *Нехай псевдодиференціальні операції* $A_1(t,D)$, $A_2(t,D)$ *належать до класу* $C([0,T];S(G))$ *і нехай* $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\beta_2)$, *де* $\min\{\alpha_1,\alpha_2\} \ge \alpha$, $\min\{\beta_1,\beta_2\} \ge \beta$. *Тоді для* $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$*-коректності задачі* (1), (2) *необхідно, щоб виконувалась умова* (5).

Д о в е д е н н я теореми **2** проводиться аналогічно до доведення необхідності умови (5) у теоремі **1**. ◊

Приклад 1. Нехай у рівнянні (1) оператор $L(\partial_t, D)$ має такий вигляд:

$$L(\partial_t, D) \equiv (\partial_t - B_2(t,D))(\partial_t - B_1(t,D)),$$

де $B_2(t,D) \in C_{\mathbb{R}}([0,T]; S(G))$, $B_1(t,D) \in C^1_{\mathbb{R}}([0,T]; S(G))$. У цьому випадку визначник $\Delta(k, t_1, t_2)$ згідно з теоремою Пойя (див. [7, с. 87]) є відмінним від нуля для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ і для всіх $t_1, t_2 \in [0,T]$ таких, що $t_1 < t_2$. ⊳

4. Побудова розв'язувального оператора $(+\infty, +\infty)$**-коректної задачі.** Надалі будемо вважати, що умова (5) виконується. Означимо лінійні псевдодиференціальні оператори $R_1(t,D) : \mathcal{T} \to C^2([0,T]; \mathcal{T})$, $R_2(t,D) : \mathcal{T} \to$ $\to C^2([0,T]; \mathcal{T})$ за правилами

$$R_1(t,D) \exp(ik,x) = R_1(t,k) \exp(ik,x), \quad R_1(t,k) = \frac{H_k(t,t_2)}{\Delta(k,t_1,t_2)}, \tag{14}$$

$$R_2(t,D) \exp(ik,x) = R_2(t,k) \exp(ik,x), \quad R_2(t,k) = -\frac{H_k(t,t_1)}{\Delta(k,t_1,t_2)}, \tag{15}$$

де $k \in \mathbb{Z}^p$, і на основі рівностей (14), (15) дію операторів $R_1(t,D)$, $R_2(t,D)$ поширимо за лінійністю на весь простір $\mathcal{T}$. Введемо оператор

$$R(t,D) : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to C^2([0,T]; \mathcal{T}) \tag{16}$$

за допомогою рівності

$$R(t,D)(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = R_1(t,D)\varphi_1(x) + R_2(t,D)\varphi_2(x),$$

де $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathcal{T}$. Запроваджений оператор $R(t,D)$ має такий зв'язок із задачею (1), (2): якщо виконується умова (5), то для довільних $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in$ $\in \mathcal{T}$ функція $R(t,D)(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ належить до простору $C^2([0,T]; \mathcal{T})$ і справджує рівності

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right) R(t,D)(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = 0,$$

$$R(t,D)(\varphi_1(x), \varphi_2(x))\Big|_{t=t_1} = \varphi_1(x), \qquad R(t,D)(\varphi_1(x), \varphi_2(x))\Big|_{t=t_2} = \varphi_2(x),$$

тобто $R(t,D)(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ є розв'язком задачі (1), (2), єдиним з огляду на умову (5). Враховуючи вказаний зв'язок, оператор (16) називатимемо *розв'язувальним* оператором задачі (1), (2). Зауважимо також, що при доведенні теореми **1** встановлено, що оператор (16) неперервно відображає $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ в $C^2([0,T]; \mathcal{T})$, якщо виконується умова (5). Нас цікавитиме відповідь на питання, чи допускає введений оператор $R(t,D)$ неперервне продовження з простору $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ у «ширший» простір. Наведемо необхідні означення.

Означення 3. Нехай $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Будемо говорити, що розв'язувальний оператор (16) допускає *неперервне замикання*

$$R^{\alpha,\beta}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t,D) : W_{\alpha_1,\beta_1}(G) \times W_{\alpha_2,\beta_2}(G) \to C^2([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G)),$$

якщо виконуються наступні умови:

1°) для довільної пари $(\varphi_1, \varphi_2) \in W_{\alpha_1,\beta_1}(G) \times W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$ і для довільної послідовності $\{(\varphi_1^m, \varphi_2^m)\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ такої, що

$$\lim_{m\to\infty} \left(\left\| \varphi_1^m - \varphi_1; W_{\alpha_1,\beta_1}(G) \right\| + \left\| \varphi_2^m - \varphi_2; W_{\alpha_2,\beta_2}(G) \right\| \right) = 0,$$

послідовність $\{R(t,D)(\varphi_1^m,\varphi_2^m)\}_{m=1}^{\infty} \subset C^2([0,T];\mathcal{T})$ має в $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$ границю $u(t,x)$:

$$\lim_{m\to\infty} \left\| R(t,D)(\varphi_1^m,\varphi_2^m) - u(t,x); C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G)) \right\| = 0\,,$$

яка не залежить від вибору послідовності $\{(\varphi_1^m,\varphi_2^m)\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}\times\mathcal{T}$, тобто якщо послідовність $\{(\psi_1^m,\psi_2^m)\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}\times\mathcal{T}$ є такою, що

$$\lim_{m\to\infty} \left(\left\| \psi_1^m - \varphi_1; W_{\alpha_1,\beta_1}(G) \right\| + \left\| \psi_2^m - \varphi_2; W_{\alpha_2,\beta_2}(G) \right\| \right) = 0\,,$$

то $\lim\limits_{m\to\infty} \left\| R(t,D)(\varphi_1^m,\varphi_2^m) - R(t,D)(\psi_1^m,\psi_2^m); C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G)) \right\| = 0$;

2°) значення $R_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}^{\alpha,\beta}(t,D)(\varphi_1,\varphi_2) \in C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$, де $\varphi_1 \in W_{\alpha_1,\beta_1}(G)$, $\varphi_2 \in W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$, знаходимо за таким правилом:

$$R_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}^{\alpha,\beta}(t,D)(\varphi_1,\varphi_2) = \lim_{m\to\infty} R(t,D)(\varphi_1^m,\varphi_2^m) \quad \text{в} \quad C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G)), \tag{17}$$

де $\{(\varphi_1^m,\varphi_2^m)\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}\times\mathcal{T}$ – будь-яка послідовність така, що $\varphi_1 = \lim\limits_{m\to\infty}\varphi_1^m$ в $W_{\alpha_1,\beta_1}(G)$ і $\varphi_2 = \lim\limits_{m\to\infty}\varphi_2^m$ в $W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$.

Зауважимо, що означена рівністю (17) дія оператора $R_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}^{\alpha,\beta}(t,D)$ є коректно заданою: існування послідовності $\{(\varphi_1^m,\varphi_2^m)\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}\times\mathcal{T}$, яка апроксимує $(\varphi_1,\varphi_2) \in W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\times W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$, випливає зі щільності вкладень $\mathcal{T} \subset \subset W_{\alpha_1,\beta_1}(G)$, $\mathcal{T} \subset W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$, а незалежність границі (17) від вибору послідовності $\{(\varphi_1^m,\varphi_2^m)\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}\times\mathcal{T}$, яка апроксимує $(\varphi_1,\varphi_2) \in W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\times W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$, випливає з умови *1°* означення 3.

5. Зв'язок між $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$-коректністю задачі та існуванням неперервного замикання $R_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}^{\alpha,\beta}(t,D)$ її розв'язувального оператора. Якщо виконується умова (5), то питання про $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$-коректність задачі (1), (2) рівносильне питанню про існування неперервного замикання

$$R_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}^{\alpha,\beta}(t,D) : W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\times W_{\alpha_2,\beta_2}(G) \to C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$$

розв'язувального оператора $R(t,D) : \mathcal{T}\times\mathcal{T} \to C^2([0,T];\mathcal{T})$. На це вказує наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай псевдодиференціальні операції* $A_1(t,D)$, $A_2(t,D)$ *належать до класу* $C([0,T];S(G))$ *і виконується умова* (5). *Задача* (1), (2) є $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$-*коректною* ($\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2)\in\mathbb{R}^2$) *тоді й тільки тоді, коли розв'язувальний оператор*

$$R(t,D) : \mathcal{T}\times\mathcal{T} \to C^2([0,T];\mathcal{T})$$

допускає неперервне замикання

$$R_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}^{\alpha,\beta}(t,D) : W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\times W_{\alpha_2,\beta_2}(G) \to C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G)).$$

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай задача (1), (2) є $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$-коректною. Нехай $(\varphi_1,\varphi_2) \in W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\times W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$. Виберемо послідовність $\{(\varphi_1^m,\varphi_2^m)\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}\times\mathcal{T}$ таку, що $\varphi_1 = \lim\limits_{m\to\infty}\varphi_1^m$ в $W_{\alpha_1,\beta_1}(G)$, $\varphi_2 = \lim\limits_{m\to\infty}\varphi_2^m$ в

$W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$. Через $u^m(t,x) \in C^2([0,T];\mathcal{T})$, $m \in \mathbb{N}$, позначимо розв'язок рівняння (1), що справджує умови (2), праві частини в яких відповідно дорівнюють φ_1^m, φ_2^m (внаслідок виконання умови (5) такий розв'язок існує і є єдиним). Згідно з побудовою розв'язувального оператора (16) маємо $u^m(t,x) = R(t,D)(\varphi_1^m,\varphi_2^m)$, $m \in \mathbb{N}$. Послідовність $\{u^m(t,x)\}_{m=1}^{\infty}$ є фундаментальною у $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$. Дійсно, для довільних $m,n \in \mathbb{N}$ функція $(u^m - u^n) \in C^2([0,T];\mathcal{T})$ є розв'язком задачі (1), (2) з даними $(\varphi_1^m - \varphi_1^n)$, $(\varphi_2^m - \varphi_2^n)$ відповідно. Із $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$-коректності задачі (1), (2) випливає, що

$$\forall m,n \in \mathbb{N} \qquad \left\| u^m - u^n; C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G)) \right\| \le$$
$$\le C_1\left(\left\| \varphi_1^m - \varphi_1^n; W_{\alpha_1,\beta_1}(G) \right\| + \left\| \varphi_2^m - \varphi_2^n; W_{\alpha_2,\beta_2}(G) \right\| \right), \tag{18}$$

де стала $C_1 > 0$ не залежить від m,n. Зі збіжності послідовності $\{\varphi_1^m\}_{m=1}^{\infty}$ у просторі $C^2([0,T];W_{\alpha_1,\beta_1}(G))$ і збіжності послідовності $\{\varphi_2^m\}_{m=1}^{\infty}$ у просторі $C^2([0,T];W_{\alpha_2,\beta_2}(G))$ випливає їх фундаментальність там. Тоді з нерівності (18) дістаємо фундаментальність послідовності $\{u^m(t,x)\}_{m=1}^{\infty}$ у просторі $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$. Отже, існує границя

$$u(t,x) = \lim_{m\to\infty} u^m(t,x) = \lim_{m\to\infty} R(t,D)(\varphi_1^m,\varphi_2^m).$$

Нехай $\{(\psi_1^m,\psi_2^m)\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}\times\mathcal{T}$ – інша послідовність, яка збігається до (φ_1,φ_2) в $W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\times W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$ і нехай $\{v^m(t,x)\}_{m=1}^{\infty} \subset C^2([0,T];\mathcal{T})$ – відповідна їй послідовність розв'язків задач (1), (2) з даними ψ_1^m, ψ_2^m, $m \in \mathbb{N}$. Тоді функції $w^m(t,x) = (u^m(t,x) - v^m(t,x)) \in C^2([0,T];\mathcal{T})$, $m \in \mathbb{N}$, є розв'язками задачі (1), (2) з даними $(\varphi_1^m - \psi_1^m)$, $(\varphi_2^m - \psi_2^m)$, $m \in \mathbb{N}$. З $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$-коректності задачі (1), (2) випливає, що

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \left\| w^m; C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G)) \right\| \le$$
$$\le C_2\left(\left\| \varphi_1^m - \psi_1^m; W_{\alpha_1,\beta_1}(G) \right\| + \left\| \varphi_2^m - \psi_2^m; W_{\alpha_2,\beta_2}(G) \right\| \right), \tag{19}$$

де стала $C_2 > 0$ не залежить від m. Оскільки $(\varphi_1^m - \psi_1^m) \to 0$ в $W_{\alpha_1,\beta_1}(G)$ при $m \to \infty$, а $(\varphi_2^m - \psi_2^m) \to 0$ в $W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$ при $m \to \infty$, то з (19) випливає, що $w^m(t,x) \to 0$ в просторі $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$ при $m \to \infty$. Згідно з означенням розв'язувального оператора $w^m(t,x) = R(t,D)(\varphi_1^m - \psi_1^m, \varphi_2^m - \psi_2^m)$. Враховуючи лінійність $R(t,D)$, дістаємо, що в просторі $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$ існує границя $\lim\limits_{m\to\infty} R(t,D)(\psi_1^m,\psi_2^m)$, яка співпадає з $\lim\limits_{m\to\infty} R(t,D)(\varphi_1^m,\varphi_2^m)$. Отже, для довільної пари $(\varphi_1,\varphi_2) \in W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\times W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$ і для довільної послідовності $\{(\varphi_1^m,\varphi_2^m)\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}\times\mathcal{T}$, яка збігається до (φ_1,φ_2) у просторі $W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\times W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$, послідовність $\{R(t,D)(\varphi_1^m,\varphi_2^m)\}_{m=1}^{\infty} \subset C^2([0,T];\mathcal{T})$ має границю, яка не залежить від вибору послідовності $\{(\varphi_1^m,\varphi_2^m)\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}\times\mathcal{T}$.

Це означає, що оператор (16) допускає замикання до неперервного оператора з простору $W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\times W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$ у простір $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$.

Достатність. Нехай $R^{\alpha,\beta}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t,D)$ − неперервне замикання розв'язувального оператора $R(t,D)$. Доведемо, що задача (1), (2) є $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$-коректною. Нехай $(\varphi_1,\varphi_2)\in W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\times W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$. Із того, що оператор $R^{\alpha,\beta}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t,D)$ неперервно діє з простору $W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\times W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$ у простір $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$, випливає, що

$$\left\| R^{\alpha,\beta}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t,D)(\varphi_1,\varphi_2);C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))\right\|\le$$
$$\le C_3\left(\left\|\varphi_1;W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\right\|+\left\|\varphi_2;W_{\alpha_2,\beta_2}(G)\right\|\right),\qquad(20)$$

де стала $C_3>0$ не залежить від вибору $\varphi_1\in W_{\alpha_1,\beta_1}(G)$, $\varphi_2\in W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$. Нехай $\{(\varphi_1^m,\varphi_2^m)\}_{m=1}^{\infty}\subset\mathcal{T}\times\mathcal{T}$ − довільна така послідовність, що $(\varphi_1^m,\varphi_2^m)\to$ $\to(\varphi_1,\varphi_2)$ у $W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\times W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$ при $m\to\infty$. Із того, що псевдодиференціальні операції $A_1(t,D)$, $A_2(t,D)$ належать до класу $C([0,T];S(G))$, випливає, що $L(\partial/\partial t,D)$ неперервно відображає простір $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$ у простір $C([0,T];W_{\alpha-1,\beta}(G))$. Оскільки згідно з означенням розв'язувального оператора

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},D\right)R(t,D)(\varphi_1^m,\varphi_2^m)=0,\quad m\in\mathbb{N},\quad \text{у просторі } C^2([0,T];\mathcal{T}),$$
$$R(t,D)(\varphi_1^m,\varphi_2^m)\Big|_{t=t_1}=\varphi_1^m,\qquad R(t,D)(\varphi_1^m,\varphi_2^m)\Big|_{t=t_2}=\varphi_2^m,$$

то, враховуючи, що $R^{\alpha,\beta}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t,D)(\varphi_1,\varphi_2)=\lim\limits_{m\to\infty}R(t,D)(\varphi_1^m,\varphi_2^m)$ в просторі $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$, дістанемо

$$\left\|L\left(\frac{\partial}{\partial t},D\right)R^{\alpha,\beta}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t,D)(\varphi_1,\varphi_2);C([0,T];W_{\alpha-1,\beta}(G))\right\|=$$
$$=\left\|L\left(\frac{\partial}{\partial t},D\right)\lim_{m\to\infty}R(t,D)(\varphi_1^m,\varphi_2^m);C([0,T];W_{\alpha-1,\beta}(G))\right\|=$$
$$=\lim_{m\to\infty}\left\|L\left(\frac{\partial}{\partial t},D\right)(R(t,D)(\varphi_1^m,\varphi_2^m));C([0,T];W_{\alpha-1,\beta}(G))\right\|=0,\quad(21)$$

$$\left\|R^{\alpha,\beta}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t,D)(\varphi_1,\varphi_2)\Big|_{t=t_j}-\varphi_j;C^2([0,T];W_{\alpha_j,\beta_j}(G))\right\|=$$
$$=\lim_{m\to\infty}\left\|R(t,D)(\varphi_1^m,\varphi_2^m)\Big|_{t=t_j}-\varphi_j;C^2([0,T];W_{\alpha_j,\beta_j}(G))\right\|=$$
$$=\lim_{m\to\infty}\left\|\varphi_j^m-\varphi_j;C^2([0,T];W_{\alpha_j,\beta_j}(G))\right\|,\qquad j=1,2.\qquad(22)$$

Отримані рівності (21), (22) та оцінка (20) показують, що для довільних $\varphi_1\in W_{\alpha_1,\beta_1}(G)$, $\varphi_2\in W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$ задача (1), (2) з даними $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ має у просторі $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$ єдиний розв'язок $u(t,x)=R^{\alpha,\beta}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t,D)(\varphi_1,\varphi_2)$, для якого виконуються умови означення 2. ◊

Наведемо приклад задачі, розв'язувальний оператор $R(t,D)$ якої не допускає неперервного замикання $R^{\alpha,\beta}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t,D)$.

Приклад 2. Розглянемо задачу (1), (2), у якій кількість p просторових змінних дорівнює 1, а оператор $L(\partial_t, D)$ має такий вигляд:

$$L(\partial_t, D) = (\partial_t - iB_2(t, -i\partial_x))(\partial_t - iB_1(t, -i\partial_x)),$$

де $B_1(t, -i\partial_x) \in C^1_{\mathbb{R}}([0,T]; S(G))$, $B_2(t, -i\partial_x) \equiv B_1(t, -i\partial_x) - 2i\partial_x$. Для цієї задачі визначник $\Delta(k, t_1, t_2)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, зображається формулою

$$\Delta(k, t_1, t_2) = \frac{\sin(k(t_2 - t_1))}{k}, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

З теореми Хінчина (див. [8, с. 48]) випливає, що існує таке число $\theta > 0$, $\theta / \pi \notin \mathbb{Q}$, для якого нерівність $|\sin(k\theta)| < |k| \exp(-G^2(k))$ виконується для нескінченної множини K ненульових цілих чисел k. Якщо вузли t_1, t_2 в задачі (1), (2) є такими, що $t_1 = 0$, $t_2 = \theta$, то розв'язувальний оператор $R(t, D)$ такої задачі не допускає неперервного замикання

$$R^{\alpha,\beta}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t, D) : W_{\alpha_1,\beta_1}(G) \times W_{\alpha_2,\beta_2}(G) \to C^2([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G))$$

при жодних $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ таких, що $\alpha \geq \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\beta \geq \max\{\beta_1, \beta_2\}$. Дійсно, враховуючи формули (3), (14)–(16), дістанемо

$$\forall k \in K \qquad \left\| R(t, D)\left(0, \frac{\exp(ikx)}{G^\alpha(k)\exp(\beta G(k))}\right); C^2([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G)) \right\| \geq$$

$$\geq \left\| \frac{f_2'(0,k)}{\Delta(k,0,\theta)} \cdot \frac{\exp(ikx)}{G^\alpha(k)\exp(\beta G(k))}; W_{\alpha,\beta}(G) \right\| \geq \exp(G^2(k)).$$

Оскільки $G(k) \to \infty$ при $|k| \to \infty$, то обмежену в просторі $W_{\alpha_1,\beta_1}(G) \times W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$ послідовність $\left\{\left(0, \dfrac{\exp(ikx)}{G^\alpha(k)\exp(\beta G(k))}\right) : k \in K\right\}$ оператор $R(t, D)$ переводить у необмежену в просторі $C^2([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G))$ послідовність. Це означає, що оператор $R(t, D)$ не допускає неперервного замикання $R^{\alpha,\beta}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t, D)$, якщо $\alpha \geq \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\beta \geq \max\{\beta_1, \beta_2\}$. ▷

6. Достатні умови існування неперервного замикання $R^{\alpha,\beta}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t, D)$ розв'язувального оператора задачі. Встановимо достатні умови існування неперервного замикання $R^{\alpha,\beta}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t, D)$ розв'язувального оператора задачі.

Теорема 4. *Нехай псевдодиференціальні операції* $A_1(t, D)$, $A_2(t, D)$ *належать до класу* $C([0,T]; S(G))$ *і справджується умова* (5). *Якщо існують такі* $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, *що для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k, t_1, t_2)| \geq G^{-\gamma}(k) \exp(-\delta G(k)), \tag{23}$$

то оператор (16) *допускає неперервне замикання*

$$R^{\alpha,\beta}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t, D) : W_{\alpha_1,\beta_1}(G) \times W_{\alpha_2,\beta_2}(G) \to C^2([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G)),$$

де $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$, $\alpha_j \geq \alpha + \gamma + 1$, $\beta_j \geq \beta + \delta + (AT + a_1 t_j)$, $j = 1, 2$,

$$A = \sup_{k\in\mathbb{Z}^p}\left\{ \left(1 + \max_{t\in[0,T]}|A_1(t,k)|^2 + \max_{t\in[0,T]}|A_2(t,k)|^2\right)^{1/2} G^{-1}(k) \right\},$$

$$a_1 = -\min\left\{ 0; \inf_{k\in\mathbb{Z}^p}\min_{t\in[0,T]} \frac{\operatorname{Re} A_1(t,k)}{G(k)} \right\}.$$

Д о в е д е н н я. Із формул (3) видно, що для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ функції $H_k(t,t_1)$, $H_k(t,t_2)$ є розв'язками таких задач Коші:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},k\right)H_k(t,t_1) = 0, \quad H_k(t_1,t_1) = 0, \quad H_k'(t_1,t_1) = -W(t_1,k), \tag{24}$$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},k\right)H_k(t,t_2) = 0, \quad H_k(t_2,t_2) = 0, \quad H_k'(t_2,t_2) = -W(t_2,k), \tag{25}$$

де $W(t,k) = \det\left\| f_q^{(j-1)}(t,k)\right\|_{j,q=1}^2$, $k\in\mathbb{Z}^p$, − вронскіан функцій $f_1(t,k)$, $f_2(t,k)$. Із формули Ліувілля для вронскіана випливає, що

$$|W(t_1,k)| \le \exp(a_1 t_1 G(k)), \qquad |W(t_2,k)| \le \exp(a_1 t_2 G(k)), \quad k\in\mathbb{Z}^p.$$

Тоді з (24), (25) і теореми про оцінки розв'язку задачі Коші [2, с. 29] випливає, що

$$\max_{t\in[0,T]}\left|H_k^{(j)}(t,t_1)\right| \le C_4 G(k)\exp((AT + a_1t_1)G(k)), \quad j = 0,1,2,$$

$$\max_{t\in[0,T]}\left|H_k^{(j)}(t,t_2)\right| \le C_4 G(k)\exp((AT + a_1t_2)G(k)), \quad j = 0,1,2. \tag{26}$$

Тоді із нерівностей (23), (26) і формул (14), (15) отримуємо, що для функцій $R_1(t,k)$, $R_2(t,k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, та їхніх похідних виконуються оцінки

$$\max_{t\in[0,T]}\left|R_1^{(j)}(t,k)\right| \le C_6 G^{1+\gamma}(k)\exp((\delta + (AT + a_1t_1))G(k)), \quad j = 0,1,2,$$

$$\max_{t\in[0,T]}\left|R_2^{(j)}(t,k)\right| \le C_7 G^{1+\gamma}(k)\exp((\delta + (AT + a_1t_2))G(k)), \quad j = 0,1,2. \tag{27}$$

Нехай (φ_1,φ_2) − впорядкована пара з простору $W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\times W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$. Виберемо послідовності $\{S^m(\varphi_1)\}_{m=1}^{\infty}\subset\mathcal{T}$, $\{S^m(\varphi_2)\}_{m=1}^{\infty}\subset\mathcal{T}$, як послідовності частинних сум рядів Фур'є для φ_1, φ_2 відповідно:

$$S^m(\varphi_1) = \sum_{|k|\le m}\varphi_{1,k}\exp(ik,x),$$

$$S^m(\varphi_2) = \sum_{|k|\le m}\varphi_{2,k}\exp(ik,x), \qquad m\in\mathbb{N}. \tag{28}$$

Відомо, що послідовності $\{S^m(\varphi_1)\}_{m=1}^{\infty}$, $\{S^m(\varphi_2)\}_{m=1}^{\infty}$ збігаються у просторах $W_{\alpha_1,\beta_1}(G)$, $W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$ до φ_1, φ_2 відповідно. Зауважимо, що внаслідок повноти просторів $W_{\alpha_1,\beta_1}(G)$, $W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$ збіжні в цих просторах послідовності $\{S^m(\varphi_1)\}_{m=1}^{\infty}$, $\{S^m(\varphi_2)\}_{m=1}^{\infty}$ є фундаментальними.

Покажемо спочатку, що послідовність $\{R(t,D)(S^m(\varphi_1),S^m(\varphi_2))\}_{m=1}^{\infty}$ є збіжною в $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$. Оскільки простір $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$ є повним, для цього досить довести, що послідовність $\{R(t,D)(S^m(\varphi_1),S^m(\varphi_2))\}_{m=1}^{\infty}$ є фундаментальною. Дійсно, для довільних $m,n\in\mathbb{N}$, $m>n$, з нерівностей (27), формул (28) і нерівності трикутника для норми випливає, що

$$\left\| R(t,D)\big(S^m(\varphi_1),S^m(\varphi_2)\big)-R(t,D)\big(S^n(\varphi_1),S^n(\varphi_2)\big);C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))\right\| \le$$
$$\le \left\| \sum_{|k|>n}^{m} R_1(t,k)\varphi_{1,k}\exp(ik,x);C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))\right\| +$$
$$+\left\| \sum_{|k|>n}^{m} R_2(t,k)\varphi_{2,k}\exp(ik,x);C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))\right\| \le$$
$$\le C_8\left\| \sum_{|k|>n}^{m} \varphi_{1,k}\exp(ik,x);W_{\alpha+\gamma+1,\beta+\delta+AT+a_1t_1}(G)\right\| +$$
$$+C_8\left\| \sum_{|k|>n}^{m} \varphi_{2,k}\exp(ik,x);W_{\alpha+\gamma+1,\beta+\delta+AT+a_1t_2}(G)\right\| \le$$
$$\le C_8\left(\left\| S^m(\varphi_1)-S^n(\varphi_1);W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\right\| + \left\| S^m(\varphi_2)-S^n(\varphi_2);W_{\alpha_2,\beta_2}(G)\right\|\right). \quad (29)$$

З оцінки (29) і фундаментальності послідовностей $\{S^m(\varphi_1)\}_{m=1}^{\infty}$, $\{S^m(\varphi_2)\}_{m=1}^{\infty}$ у просторах $W_{\alpha_1,\beta_1}(G)$, $W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$ відповідно випливає фундаментальність послідовності $\{R(t,D)\big(S^m(\varphi_1),S^m(\varphi_2)\big)\}_{m=1}^{\infty}$ у просторі $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$. Отже, послідовність $\{R(t,D)\big(S^m(\varphi_1),S^m(\varphi_2)\big)\}_{m=1}^{\infty}$ має границю в $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$. Нехай $u(t,x)=\lim_{m\to\infty}u^m(t,x)=\lim_{m\to\infty}R(t,D)\big(S^m(\varphi_1),S^m(\varphi_2)\big)$ – границя цієї послідовності в просторі $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$. Приймемо за означенням

$$R_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}^{\alpha,\beta}(t,D)(\varphi_1,\varphi_2):=\lim_{m\to\infty}R(t,D)\big(S^m(\varphi_1),S^m(\varphi_2)\big). \quad (30)$$

Оскільки $R_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}^{\alpha,\beta}(t,D)\Big|_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}}=R(t,D)\Big|_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}}$, то для завершення доведення теореми **4** достатньо встановити, що введений рівністю (30) оператор $R_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}^{\alpha,\beta}(t,D)$ неперервно відображає простір $W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\times W_{\alpha_2,\beta_2}(G)$ у простір $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$. Дійсно, з нерівностей (27) випливає, що існує стала $C_9>0$ така, що для довільних $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)\in\mathcal{T}$ виконується нерівність

$$\left\| R(t,D)(\psi_1,\psi_2);C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))\right\| \le$$
$$\le C_9\left(\left\| \psi_1,W_{\alpha+\gamma+1,\beta+\delta+AT+a_1t_1}(G)\right\| + \left\| \psi_2,W_{\alpha+\gamma+1,\beta+\delta+AT+a_1t_2}(G)\right\|\right).$$

Тоді для довільних $\alpha_j\ge\alpha+\gamma+1$, $\beta_j\ge\beta+\delta+(AT+a_1t_j)$, $j=1,2$,

$$\left\| R(t,D)\big(S^m(\varphi_1),S^m(\varphi_2)\big);C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))\right\| \le$$
$$\le C_9\left(\left\| S^m(\varphi_1),W_{\alpha+\gamma+1,\beta+\delta+AT+a_1t_1}(G)\right\| +\right.$$
$$\left.+\left\| S^m(\varphi_2),W_{\alpha+\gamma+1,\beta+\delta+AT+a_1t_2}(G)\right\|\right) \le$$
$$\le C_9\left(\left\| S^m(\varphi_1);W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\right\| + \left\| S^m(\varphi_2);W_{\alpha_2,\beta_2}(G)\right\|\right),$$

і, отже,

$$\left\| R_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}^{\alpha,\beta}(t,D)(\varphi_1(x),\varphi_2(x));C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))\right\| =$$
$$=\lim_{m\to\infty}\left\| R(t,D)(S^m(\varphi_1),S^m(\varphi_2));C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))\right\| \le$$
$$\le C_9\left(\left\| S^m(\varphi_1);W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\right\| + \left\| S^m(\varphi_2);W_{\alpha_2,\beta_2}(G)\right\|\right) \le$$
$$\le C_9(\| \varphi_1;W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\| + \| \varphi_2;W_{\alpha_2,\beta_2}(G)\|). \ \lozenge$$

7. Метричні теореми про виконання достатніх умов існування неперервного замикання розв'язувального оператора задачі. Дослідимо питання про можливість виконання нерівності (23).

Теорема 5. *Нехай псевдодиференціальні операції* $A_1(t,D)$, $A_2(t,D)$ *належать до класу* $C([0,T];S(G))$, *а для функції* $G(k):\mathbb{Z}^p\to\mathbb{R}_+$ *виконується умова* (λ,μ). *Тоді для довільного фіксованого* $t_1\in[0,T)$ *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_2\in[t_1,T]$ *нерівність* (23) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$ *при* $\gamma\ge\lambda+1$, $\delta\ge\mu+a_2t_1+3A(T-t_1)$, *де стала* A *означена в теоремі* **4**,

$$a_2=\max\left\{0;\sup_{k\in\mathbb{Z}^p}\max_{t\in[0,T]}\frac{\operatorname{Re}A_1(t,k)}{G(k)}\right\}.$$

Д о в е д е н н я. З формули (4) випливає, що для фіксованого $t_1\in\in[0,T)$ визначник $\Delta(k,t_1,t_2)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, як функція змінної $t_2\in[t_1,T]$ є розв'язком такої задачі Коші:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t_2},k\right)\Delta(k,t_1,t_2)=0,\qquad \Delta(k,t_1,t_2)\Big|_{t_2=t_1}=0,$$
$$\left.\frac{\partial\Delta(k,t_1,t_2)}{\partial t_2}\right|_{t_2=t_1}=W(t_1,k). \tag{31}$$

З теореми про оцінки розв'язку задачі Коші [2, с. 29] випливає, що в кожній точці $t_2\in[t_1,T]$ виконуються нерівності

$$\max\left\{|\Delta(k,t_1,t_2)|,\ \left|\frac{\partial\Delta(k,t_1,t_2)}{\partial t_2}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\Delta(k,t_1,t_2)}{\partial t_2^2}\right|\right\}\le$$
$$\le C_{10}G(k)|W(t_1,k)|\exp(A(T-t_1)G(k)),\qquad k\in\mathbb{Z}^p. \tag{32}$$

Із формули Ліувілля для вронскіана отримуємо, що

$$|W(t_1,k)|\ge\exp(-a_2t_1G(k)),\qquad k\in\mathbb{Z}^p. \tag{33}$$

Для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ розглянемо такі множини:

$$E_{\gamma,\delta}(k,t_1)=\{t_2\in[0,T]:|\Delta(k,t_1,t_2)|<G^{-\gamma}(k)\exp(-\delta G(k))\},\quad k\in\mathbb{Z}^p. \tag{34}$$

З нерівностей (32), (33), на основі леми 3 у [5], для мір запроваджених множин (34) при $\gamma\ge\lambda+1$, $\delta\ge\mu+a_2t_1+3A(T-t_1)$ отримуємо оцінки

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}E_{\gamma,\delta}(k,t_1)\le C_{11}G^{1-\gamma}(k)\exp((a_2t_1+3A(T-t_1)-\delta)G(k))\le$$
$$\le C_{12}G^{-\lambda}(k)\exp(-\mu G(k)),\qquad k\in\mathbb{Z}^p. \tag{35}$$

З оцінок (35) випливає, що при $\gamma\ge\lambda+1$, $\delta\ge\mu+a_2t_1+3A(T-t_1)$ ряд $\sum\limits_{|k|\ge0}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}E_{\gamma,\delta}(k,t_1)$ є збіжним. За лемою Бореля – Кантеллі [3, с. 13–14] міра Лебега в $\mathbb{R}$ множини тих чисел t_2, які належать до нескінченної кількості множин $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}E_{\gamma,\delta}(k,t_1)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, дорівнює нулеві. ◊

Аналогічними міркуваннями можна довести наступну теорему.

Теорема 6. *Нехай псевдодиференціальні операції* $A_1(t,D)$, $A_2(t,D)$ *належать до класу* $C([0,T];S(G))$, *а для функції* $G(k):\mathbb{Z}^p\to\mathbb{R}_+$ *виконується умова* (λ,μ). *Тоді для довільного фіксованого* $t_2\in(0,T]$ *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_1\in[0,t_2]$ *нерівність* (23) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$ *при* $\gamma\ge\lambda+1$, $\delta\ge\mu+(a_2+3A)t_2$, *де сталі* A, a_2 *означені в теоремах* **4, 5**.

Отримані в теоремах **5**, **6** результати можна посилити для випадку, коли амплітуди псевдодиференціальних операцій $A_1(t,D)$, $A_2(t,D)$ є дійсними, тобто, коли $A_1(t,D)$, $A_2(t,D) \in C_{\mathbb{R}}([0,T];S(G))$.

Теорема 7. *Нехай псевдодиференціальні операції* $A_1(t,D)$, $A_2(t,D)$ *належать до класу* $C_{\mathbb{R}}([0,T];S(G))$, *а для функції* $G(k):\mathbb{Z}^p \to \mathbb{R}_+$ *виконується умова* (λ,μ). *Тоді для довільного фіксованого* $t_1 \in [0,T)$ *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$ *) чисел* $t_2 \in [t_1,T]$ *нерівність* (23) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\gamma \ge \lambda+1$, $\delta \ge \mu + a_2 t_1 + A(T-t_1)$, *де сталі* A, a_2 *означені в теоремах* **4, 5**.

Д о в е д е н н я. Із того, що при фіксованому $t_1 \in [0,T)$ визначник $\Delta(k,t_1,t_2)$ як функція змінної $t_2 \in [t_1,T]$ є розв'язком задачі Коші (31), з теореми про оцінки розв'язку задачі Коші [2, с. 29] випливає, що в кожній точці $t_2 \in [t_1,T]$ для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність

$$\max\left\{|\Delta(k,t_1,t_2)|, \left|\frac{\partial\Delta(k,t_1,t_2)}{\partial t_2}\right|\right\} \ge C_{13}|W(t_1,k)|\exp(-A(T-t_1)G(k)). \quad (36)$$

Враховуючи нерівність (33) для вронскіана, з оцінки (36) отримаємо

$$\max\left\{|\Delta(k,t_1,t_2)|, \left|\frac{\partial\Delta(k,t_1,t_2)}{\partial t_2}\right|\right\} \ge$$
$$\ge C_{14}\exp(-(a_2 t_1 + A(T-t_1))G(k)), \quad k \in \mathbb{Z}^p. \quad (37)$$

Оцінимо зверху кількість t_2-нулів на відрізку $[t_1,T]$ (при фіксованому t_1) визначника $\Delta(k,t_1,t_2)$, яку позначимо через $N(k,[t_1,T])$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Оскільки $\Delta(k,t_1,t_2)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є нетривіальним (див. початкові умови в (31)) розв'язком рівняння $L\left(\frac{\partial}{\partial t_2},k\right)\Delta(k,t_1,t_2)=0$, то за теоремою Валле Пуссена [4, с. 157] функція $\Delta(k,t_1,t_2)$ може мати не більше одного t_2-нуля на довільному відрізку $I \subset [t_1,T]$, довжина якого не перевищує $h_0(k)$, де $h_0(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, – додатний корінь рівняння $AG(k)h^2 + 2AG(k)h - 2 = 0$. Для $h_0(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, виконується нерівність $h_0(k) \ge \frac{1}{(A+1)G(k)}$. З останньої нерівності випливає, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$

$$N(k,[t_1,T]) \le \left[(T-t_1)/h_0(k)\right] + 1 \le C_{15}G(k), \qquad C_{15} = C_{15}(T,A). \quad (38)$$

Застосовуючи лему з [6], із нерівностей (37), (38) дістаємо, що при $\gamma \ge \lambda+1$, $\delta \ge \mu + a_2 t_1 + A(T-t_1)$ для мір множин (34) виконуються оцінки

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E_{\gamma,\delta}(k,t_1) \le C_{16} N(k,[t_1,T]) \frac{G^{-\gamma}(k)\exp(-\delta G(k))}{\exp(-(a_2 t_1 + A(T-t_1))G(k))} \le$$
$$\le C_{17} G^{1-\gamma}(k)\exp((a_2 t_1 + A(T-t_1) - \delta)G(k)) \le C_{18} G^{-\gamma}(k)\exp(-\delta G(k)).$$

При $\gamma \ge \lambda+1$, $\delta \ge \mu + a_2 t_1 + A(T-t_1)$ ряд $\sum_{|k|\ge 0} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E_{\gamma,\delta}(k,t_1)$ є збіжним, і, отже, за лемою Бореля – Кантеллі міра Лебега множини тих чисел t_2, які належать до нескінченної кількості множин (34), дорівнює нулеві. ◊

Аналогічно доводиться така теорема.

Теорема 8. *Нехай псевдодиференціальні операції* $A_1(t,D)$, $A_2(t,D)$ *належать до класу* $C_{\mathbb{R}}([0,T];S(G))$, *а для функції* $G(k):\mathbb{Z}^p\to\mathbb{R}_+$ *виконується умова* (λ,μ). *Тоді для довільного фіксованого* $t_2\in(0,T]$ *і для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $t_1\in[0,t_2]$ *нерівність* (23) *виконується для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$ *при* $\gamma\ge\lambda+1$, $\delta\ge\mu+(a_2+A)t_2$, *де сталі* A, a_2 *означені в теоремах* **4, 5**.

8. Коректність двоточкової задачі для майже всіх значень вузлів інтерполяції.

Зауваження 1. Для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ визначник $\Delta(k,t_1,t_2)$ як функція змінної t_1 (при фіксованому t_2) може мати на $[0,T]$ не більш ніж скінченну кількість нулів. Тому для кожного фіксованого t_2 множина $E(t_2)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^p}\{t_1\in[0,T]:\Delta(k,t_1,t_2)=0\}$ має нульову міру Лебега. Аналогічно, й $F(t_2)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^p}\{t_2\in[0,T]:\Delta(k,t_1,t_2)=0\}$ є множиною нульової міри Лебега.

З теорем **4–8** і зауваження ***1*** випливають такі твердження.

Теорема 9. *Нехай псевдодиференціальні операції* $A_1(t,D)$, $A_2(t,D)$ *належать до класу* $C_{\mathbb{R}}([0,T];S(G))$, *а для функції* $G(k):\mathbb{Z}^p\to\mathbb{R}_+$ *виконується умова* (λ,μ). *Тоді для довільного фіксованого* $t_1\in[0,T)$ *і для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $t_2\in[t_1,T]$ *оператор* (16) *допускає неперервне замикання* $R^{\alpha,\beta}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t,D)$, *а, отже, задача* (1), (2) *є* $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$*-коректною, якщо* $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2)$, *де* $\alpha_j\ge\alpha+\lambda+2$, $j=1,2$, $\beta_1\ge\beta+\mu+a_2t_1+3A(T-t_1)+(AT+a_1t_1)$, $\beta_2\ge\beta+\mu+a_2t_1+3A(T-t_1)+(AT+a_1T)$, *а сталі* a_1,a_2,A *означені в теоремах* **4, 5**.

Теорема 10. *Нехай псевдодиференціальні операції* $A_1(t,D)$, $A_2(t,D)$ *належать до класу* $C([0,T];S(G))$, *а для функції* $G(k):\mathbb{Z}^p\to\mathbb{R}_+$ *виконується умова* (λ,μ). *Тоді для довільного фіксованого* $t_2\in(0,T]$ *і для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $t_2\in[0,t_2]$ *оператор* (16) *допускає неперервне замикання* $R^{\alpha,\beta}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t,D)$, *а, отже, задача* (1), (2) *є* $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$*-коректною, якщо* $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2)$, *де* $\alpha_j\ge\alpha+\lambda+2$, $j=1,2$, $\beta_1\ge\beta+\mu+(a_2+3A)t_2+(AT+a_1t_2)$, $\beta_2\ge\beta+\mu+(a_2+3A)t_2+(AT+a_1t_2)$, *а сталі* a_1, a_2,A *означені в теоремах* **4, 5**.

Теорема 11. *Нехай псевдодиференціальні операції* $A_1(t,D)$, $A_2(t,D)$ *належать до класу* $C_{\mathbb{R}}([0,T];S(G))$, *а для функції* $G(k):\mathbb{Z}^p\to\mathbb{R}_+$ *виконується умова* (λ,μ). *Тоді для довільного фіксованого* $t_1\in[0,T)$ *і для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $t_2\in[t_1,T]$ *оператор* (16) *допускає неперервне замикання* $R^{\alpha,\beta}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t,D)$, *а, отже, задача* (1), (2) *є* $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$*-коректною, якщо* $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2)$, *де* $\alpha_j\ge\alpha+\lambda+2$, $j=1,2$, $\beta_1\ge\beta+\mu+a_2T+A(T-t_1)+(AT+a_1t_1)$, $\beta_2\ge\beta+\mu+a_2T+A(T-t_1)+(AT+a_1T)$, *а сталі* a_1,a_2,A *означені в теоремах* **4, 5**.

Теорема 12. *Нехай псевдодиференціальні операції* $A_1(t,D)$, $A_2(t,D)$ *належать до класу* $C_{\mathbb{R}}([0,T];S(G))$, *а для функції* $G(k):\mathbb{Z}^p \to \mathbb{R}_+$ *виконується умова* (λ,μ). *Тоді для довільного фіксованого* $t_1 \in [0,T)$ *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_2 \in [t_1,T]$ *оператор* (16) *допускає неперервне замикання* $R^{\alpha,\beta}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t,D)$, *а, отже, задача* (1), (2) *є* $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$*-коректною, якщо* $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2)$, *де* $\alpha_j \ge \alpha+\lambda+2$, $j=1,2$, $\beta_1 \ge \beta+\mu+ +(a_2+A)t_2+(AT+a_1t_2)$, $\beta_2 \ge \beta+\mu+(a_2+A)t_2+(AT+a_1t_2)$, *а сталі* a_1, a_2, A *означені в теоремах* **4, 5**.

1. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
2. *Карташев А. П., Рождественский Б. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М.: Наука, 1980. – 288 с.
3. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
4. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: В 2 т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – Т. 1. – 346 с.
5. *Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 2. – С. 26–41.
6. *Симотюк М. М.* Задача з двоточковими умовами для рівняння з псевдодиференціальними операторами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 1. – С. 29–35.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
8. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112 с.

ДВУХТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введены понятия $(+\infty,+\infty)$*- и* $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$*-корректности двухточечной задачи для псевдодифференциальных уравнений. Установлен критерий* $(+\infty,+\infty)$*-корректности задачи и для* $(+\infty,+\infty)$*-корректной задачи построен ее разрешающий оператор. Найдена связь между* $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$*-корректностью задачи и существованием непрерывного замыкания ее разрешающего оператора. Установлены условия, при которых разрешающий оператор* $(+\infty,+\infty)$*-корректной задачи допускает непрерывное замыкание. Доказаны метрические теоремы о выполнимости таких условий для почти всех (в смысле меры Лебега) узлов интерполяции задачи.*

TWO-POINT PROBLEM FOR PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

The notions of $(+\infty,+\infty)$*- and* $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$*-correctness of the two-point problem for pseudo-differential equations are introduced. The criterion of* $(+\infty,+\infty)$*-correctness of this problem is proved. For the* $(+\infty,+\infty)$*-correct problem the solving operator is constructed. The relation between* $(\alpha,\beta;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$*-correctness of the problem and existence of continuous closure of its solving operator is obtained. The conditions of existence of continuous closure of its solving operator are established. The metric theorems about fulfilling theses conditions are proved.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
09.07.04