УДК 517.946

І. Д. Пукальський

## ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

*У просторах класичних функцій зі степеневою вагою доведено існування і єдиність розв'язку задачі Коші для сингулярних параболічних рівнянь без обмежень на степеневий порядок виродження коефіцієнтів. Встановлено оцінки розв'язку задачі у відповідних просторах.*

Об'єктом дослідження пропонованої роботи є задача Коші для нерівномірно параболічного рівняння зі степеневими особливостями за часовою і просторовими змінними довільного порядку. Одержаний результат є продовженням досліджень крайових задач, наведених у [3, 4].

**1. Постановка задачі та основний результат**. Розглянемо в області $\Pi = [0,T) \times \mathbb{R}^n$ задачу Коші для параболічного рівняння з дійсними коефіцієнтами

$$(Lu)(t,x) \equiv \left[ D_t - \sum_{|k| \le 2b} A_k(t,x) D_x^k \right] u(t,x) = f(t,x)\,, \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x)\,, \tag{2}$$

$$D_x^k = D_{x_1}^{k_1} \ldots D_{x_n}^{k_n}\,, \qquad |k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n\,.$$

Порядок особливості коефіцієнтів оператора $L$ будуть характеризувати функції:

$$s_1(q_1,t) = \begin{cases} |t - t^{(0)}|^{q_1}, & |t - t^{(0)}| \le 1, \\ 1, & |t - t^{(0)}| \ge 1, \end{cases} \qquad s_2(q_2,x) = \begin{cases} |x - y|^{q_2}, & |x - y| \le 1, \\ 1, & |x - y| \ge 1, \end{cases}$$

$$|x - y| = \min_{y \in \bar{\mathcal{D}}} \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}, \ \mathcal{D} \ - \text{обмежена область}, \ \bar{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Нехай $\bar{\Omega}$ – довільна замкнута підобласть $\Pi$; $\bar{\mathcal{D}} \subset \Omega$; $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(2)})$, $H_i(t^{(1)},x^{(2)})$ – довільні точки з $\bar{\Omega}$, $i = \overline{1,n}$; $x^{(1)} = (x_1^{(1)},\ldots,x_i^{(1)}\ldots,\ldots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)},\ldots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)},x_{i+1}^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$.

Позначимо через $C^m(\gamma,\beta;q;\Pi)$ множину функцій $u(t,x)$, які визначені в $\bar{\Omega}$, мають неперервні частинні похідні в області $\Omega_1 \equiv \bar{\Omega} \setminus \{((t^{(0)},x),\ t^{(0)} \in [0,T),\ \ x \in (\mathbb{R}^n \cap \bar{\Omega}) \setminus \bar{\mathcal{D}}) \cup ((t,x),\ \ t \in [0,T),\ \ x \in \bar{\mathcal{D}})\}$ вигляду $D_t^j D_x^k u$, $2bj + |k| \le 2b$, для яких є скінченною норма

$$\left\| u;\gamma,\beta;q;\Pi \right\|_m \equiv \left\| u;\gamma,\beta;q;\Pi \right\|_{[m]} + [\![ u;\gamma,\beta;q;\Pi ]\!]_m \equiv$$

$$\equiv \sup_{P \in \bar{\Omega}} \sum_{2bj + |k| \le [m]} s\big((2bj + q)\gamma + (k,\gamma - \beta);P\big) \left| D_t^j D_x^k u(P) \right| +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left[ \sup_{P_1,H_i \in \bar{\Omega}} \sum_{2bj + |k| = [m]} s\big((2bj + q)\gamma + (k,\gamma - \beta) + \{m\}(\gamma - \beta_i);\tilde{P}_1\big) \times \right.$$

$$\times \left| x_i^{(1)} - x_i^{(2)} \right|^{-\{m\}} \left| D_t^j D_x^k u(P_1) - D_t^j D_x^k u(H_i) \right| +$$

$$+\sup_{P_2,H_i\in\bar\Omega}\sum_{2bj+|k|=[m]} s\big((2bj+q+\{m\})\gamma+(k,\gamma-\beta);\tilde P_2\big)\times$$

$$\times\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\{m/(2b)\}}\left|D_t^j D_x^k u(H_i)-D_t^j D_x^k u(P_2)\right|\Bigg],$$

$$\| u;\gamma,\beta;0;\Pi\|_0\equiv\sup_{P\in\bar\Omega}|u(P)|\equiv\| u\|_\Pi .$$

Тут позначено: $s(q;P)=s_1(q_1,t)\cdot s_2(q_2,x)$; $s((k,\gamma-\beta);P)=s_1\big((k,\gamma^{(1)}-\beta^{(1)}),t\big)\times$ $\times s_2\big((k,\gamma^{(2)}-\beta^{(2)}),x\big)$; $(k,\gamma^{(\nu)}-\beta^{(\nu)})=\sum_{i=1}^n k_i(\gamma^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)})$, $\nu=1,2$, $s(q;\tilde P_\nu)=$ $=\min\big(s(q;H_i),s(q;P_\nu)\big)$; $\{m\}=m-[m]$, де $[m]$ – ціла частина числа $m$; $\gamma^{(\nu)}\ge 0$, $\beta_i^{(\nu)}\in(-\infty,\infty)$, $i=\overline{1,n}$, $q=(q_1,q_2)$;

$C^\alpha(\mu(|k|),\Pi)$ – множина функцій $v_k(t,x)$, визначених в $\bar\Omega$, для яких є скінченною норма

$$\| v_k;\mu(|k|);\Pi\|_\alpha=\sup_{P\in\bar\Omega}\big[s\big((k,\mu(|k|))+\delta(|k|)\mu(0);P\big)|v_k(P)|\big]+$$

$$+\sum_{i=1}^n\Big[\sup_{P_1,H_i\in\bar\Omega}s\big((k,\mu(|k|))+\delta(|k|)\mu(0);\tilde P_1\big)s_2(\alpha,\tilde x)\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|^{-\alpha}\times$$

$$\times|v_k(P_1)-v_k(H_i)|+\sup_{P_2,H_i\in\bar\Omega}s\big((k,\mu(|k|))+\delta(|k|)\mu(0);\tilde P_2\big)\times$$

$$\times s_1\left(\frac{\alpha}{2b},\tilde t\right)\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\alpha/2b}|v_k(P_2)-v_k(H_i)|,$$

де $(k,\mu^{(\nu)}(|k|))=\sum_{i=1}^n k_i\mu_i^{(\nu)}(|k|)$, $\mu_i^{(\nu)}(|k|)\ge 0$, $\nu=1,2$; $\delta(0)=1$, $\delta(|k|)=0$, якщо $|k|\ne 0$, $\alpha\in(0,1)$.

Нехай для задачі (1), (2) виконуються такі умови:

**1°.** Коефіцієнти рівняння $A_k(t,x)\in C^\alpha(\mu(|k|),\Pi)$, якщо $|k|\le 2b-1$, $A_k(t,x)\in C^\alpha(\beta,\Pi)$, якщо $|k|=2b$, $\alpha\in(0,1)$, і виконується умова рівномірної параболічності [5, с. 9] для рівняння

$$\Big[D_t-\sum_{|k|=2b}s((k,\beta);P)A_k(P)D_x^k\Big]u(t,x)\equiv f_1(t,x).$$

**2°.** $f(t,x)\in C^\alpha(\gamma,\beta;2b;\Pi)$, $\varphi(x)\in C^{2b+\alpha}(\tilde\gamma,\tilde\beta;0;\mathbb{R}^n)$,

$$\tilde\gamma=(0,\gamma^{(2)}),\qquad \tilde\beta_i=(0,\beta_i^{(2)})\quad i\in\overline{1,n},$$

$$\gamma^{(\nu)}=\max_{i=\overline{1,n}}\left\{1+\beta_i^{(\nu)},\ \max\frac{\mu_i^{(\nu)}(|k|)-(k,\beta^{(\nu)})}{2b-|k|}\right\},\quad \nu=1,2.$$

Справджується така

**Теорема 1.** *Нехай для задачі* (1), (2) *виконуються умови* **1°**, **2°**. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *для якого справджується нерівність*

$$\| u;\gamma,\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha}\le C\Big(\| f;\gamma,\beta;2b;\Pi\|_\alpha+\|\varphi;\tilde\gamma,\tilde\beta;0;\mathbb{R}^n\|_{2b+\alpha}\Big),\qquad(3)$$

*де* $C$ *залежить від* $n$, $\alpha$, $T$ *і норми коефіцієнтів оператора* $L$.

Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати у вигляді

$$u(t,x) = \varphi(x) + v(t,x)\,, \tag{4}$$

де функція $v(t,x)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$(Lv)(t,x) \equiv \left[ D_t - \sum_{|k|\le 2b} A_k(t,x) D_x^k \right] v(t,x) =$$

$$= f(t,x) - (L\varphi)(x) \equiv \psi(t,x)\,, \tag{5}$$

і початкову умову

$$v(0,x) = 0\,. \tag{6}$$

**Оцінка розв'язку задачі Коші з гладкими коефіцієнтами**. Позначимо через $\Pi_m = \Pi \bigcap \left\{ (t,x) \in \Pi,\ s_1(1,t) \ge m_1^{-1},\ s_2(1,x) \ge m_2^{-1},\ m_1 > 1,\ m_2 > 1 \right\}$ зростаючу послідовність областей, яка при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ збігається до $\Pi$, $Q_m = \left\{ x,\ x \in \mathbb{R}^n,\ s_2(1,x) \ge m_2^{-1} \right\}$, $\Gamma_m = [0,T) \times \partial Q_m$.

Розглянемо задачу Коші для параболічного рівняння:

$$(L_1 v_m)(t,x) \equiv \left[ D_t - \sum_{|k|\le 2b} a_k(t,x)\, D_x^k \right] v_m(t,x) = F(t,x)\,, \tag{7}$$

$$v_m(0,x) = 0\,. \tag{8}$$

Тут $a_k(t,x) = A_k^{(1)}(t,x)$, $F(t,x) = \psi^{(1)}(t,x)$, якщо $(t,x) \in \Pi_m$. Для $(t,x) \in \Pi \setminus \left( [0,T) \times Q_m \right)$ коефіцієнти $a_k(t,x)$ і функція $F(t,x)$ є розв'язками внутрішньої задачі Діріхле

$$D_t u - \Delta u = 0, \quad u(0,x) = 0, \quad u\Big|_{\Gamma_m} = g(t,x)\,,$$

де для $a_k(t,x)$, наприклад, беремо $g(t,x) = A_k^{(1)}(t,x)\Big|_{\Gamma_m}$, для функції $F(t,x)$ беремо $g(t,x) = \psi^{(1)}(t,x)\Big|_{\Gamma_m}$. Функції $A_k^{(1)}(t,x)$ і $\psi^{(1)}(t,x)$ в області $\Pi^{(0)} = \left\{ (t,x) \in \Pi,\ s_1(1,t) \le m_1^{-1},\ x \in Q_m \right\}$ визначаються таким чином. Якщо $|k| \le 2b-1$ або $\left(k, \beta^{(1)}\right) \ge 0$ при $|k| = 2b$, то $A_k^{(1)}(t,x) = \min\left( A_k(t,x),\ A_k(m_1^{-1},x) \right)$ для $t^{(0)} \in [0, m_1^{-1}]$, $x \in Q_m$ і $A_k^{(1)}(t,x) = \min\left( A_k(t,x),\ \dfrac{m_1(t^{(0)} - t) + 1}{2} A_k\left(t^{(0)} - m_1^{-1}, x\right) + \dfrac{m_1(t - t^{(0)}) + 1}{2} A_k\left(t^{(0)} + m_1^{-1}, x\right) \right)$ для $t^{(0)} \ge m_1^{-1}$, $x \in Q_m$.

У випадку, коли $\left(k, \beta^{(1)}\right) < 0$ для $|k| = 2b$, для $t^{(0)} \in [0, m_1^{-1}]$, $x \in Q_m$ беремо $A_k^{(1)}(t,x) = \max\left( A_k(t,x),\ A_k(m_1^{-1},x) \right)$, а для $t^{(0)} \ge m_1^{-1}$, $x \in Q_m$ беремо $A_k^{(1)}(t,x) = \max\left( A_k(t,x),\ \dfrac{m_1(t^{(0)} - t) + 1}{2} A_k\left(t^{(0)} - m_1^{-1}, x\right) + \dfrac{m_1(t - t^{(0)}) + 1}{2} A_k\left(t^{(0)} + m_1^{-1}, x\right) \right)$.

Функція $\psi^{(1)}(t,x) = \min\left( \psi(t,x),\ \psi(m_1^{-1},x) \right)$ для $t^{(0)} \in [0, m_1^{-1}]$, $x \in Q_m$ і $\psi^{(1)}(t,x) = \min\left( \psi(t,x),\ \dfrac{m_1(t^{(0)} - t) + 1}{2} \psi\left(t^{(0)} - m_1^{-1}, x\right) + \dfrac{m_1(t - t^{(0)}) + 1}{2} \psi\left(t^{(0)} + m_1^{-1}, x\right) \right)$ для $t^{(0)} \ge m_1^{-1}$, $x \in Q_m$.

Введемо в просторі $C^{2b+\alpha}(\Pi)$ норму $\| v_m; \gamma, \beta; q; \Pi \|_{2b+\alpha}$, еквівалентну при кожному фіксованому $m_1, m_2$ гельдеровій нормі, яка визначається, як $\| u; \gamma, \beta; q; \Pi \|_{2b+\alpha}$, тільки замість функції $s_1(q_1, t)$, $s_2(q_2, x)$ беремо відповідно $d_1(q_1, t)$, $d_2(q_2, x)$: $d_1(q_1, t) = \max\left(s_1(q_1, t), m_1^{-q_1}\right)$ при $q_1 > 0$ і $d_1(q_1, t) = = \min\left(s_1(q_1, t), m_1^{-q_1}\right)$ при $q_1 < 0$; $d_2(q_2, x) = \max\left(s_2(q_2, x), m_2^{-q_2}\right)$ при $q_2 > 0$ і $d_2(q_2, x) = \min\left(s_2(q_2, x), m_2^{-q_2}\right.$ при $q_2 < 0$; $d((k, \gamma - \beta); P) = d_1\left((k, \gamma^{(1)} - \beta^{(1)}), t\right) \times \times d_2\left((k, \gamma^{(2)} - \beta^{(2)}), x\right)$.

За накладених умов на гладкість коефіцієнтів оператора $L_1$ і функції $f(t, x)$, $\varphi(x)$ існує єдиний розв'язок задачі (7), (8), який належить до простору $C^{2b+\alpha}(\Pi)$ і має при кожному фіксованому $m_1, m_2$ скінченну норму $\| v_m; \gamma, \beta; q; \Pi \|_{2b+\alpha}$ [5, с. 269, теорема 4.3]. Знайдемо оцінку цієї норми $\| v_m; \gamma, \beta; q; \Pi \|_{2b+\alpha}$.

**Теорема 2**. *Якщо виконуються умови* **1°**, **2°**, *то для розв'язку задачі* (7), (8) *справджується нерівність*

$$\| v_m; \gamma, \beta; 0; \Pi \|_{2b+\alpha} \leq C\left( \| F_m; \gamma, \beta; 2b; \Pi \|_{\alpha} + \| v_m \|_{\Pi} \right), \tag{9}$$

*де стала* $C$ *не залежить від* $m_1, m_2$.

Д о в е д е н н я. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності [5, с. 176], маємо

$$\| v_m; \gamma, \beta; 0; \Pi \|_{2b+\alpha} \leq (1 + \varepsilon^{\alpha}) [\![ v_m; \gamma, \beta; 0; \Pi ]\!]_{2b+\alpha} + c(\varepsilon) \| v_m \|_{\Pi}. \tag{10}$$

Тому достатньо оцінити півнорму $[\![ v_m; \gamma, \beta; 0; \Pi ]\!]_{2b+\alpha}$. Із означення півнорми випливає існування в $\Pi$ точок $P_1, P_2$ і $H_i$, для яких виконується одна з нерівностей

$$\frac{1}{2} [\![ u_m; \gamma, \beta; 0; \Pi ]\!]_{2b+\alpha} \leq E_1 \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{2bj+|k|=2b} d\left((k, \gamma - \beta) + 2bj\gamma + \alpha(\gamma - \beta_i); \tilde{P}_1\right) \left| x_i^{(1)} - x_i^{(2)} \right|^{-\alpha} \times$$

$$\times \left| D_t^j D_x^k v_m(P_1) - D_t^j D_x^k v_m(H_i) \right|, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2} [\![ v_m; \gamma, \beta; 0; \Pi ]\!]_{2b+\alpha} \leq E_2 \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{2bj+|k|=2b} d\left((k, \gamma - \beta) + (2bj + \alpha)\gamma; \tilde{P}_2\right) \left| t^{(1)} - t^{(2)} \right|^{-\alpha/2b} \times$$

$$\times \left| D_t^j D_x^k v_m(P_2) - D_t^j D_x^k u_m(H_i) \right|. \tag{12}$$

Якщо $\left| x_i^{(1)} - x_i^{(2)} \right| \geq \rho d(\gamma - \beta_i; \tilde{P}_1) \equiv T_1$, $\rho \in (0, 1)$, то, використовуючи інтерполяційні нерівності, маємо

$$E_1 \leq \varepsilon^{\alpha} [\![ v_m; \gamma, \beta; 0; \Pi ]\!]_{2b+\alpha} + c(\varepsilon) \| v_m \|_{\Pi}.$$

Вибираючи $\varepsilon = 16^{-1/\alpha}$, з нерівності (11) знаходимо

$$[\![ v_m; \gamma, \beta; 0; \Pi ]\!]_{2b+\alpha} \leq c \| v_m \|_{\Pi}. \tag{13}$$

Використовуючи інтерполяційні нерівності та нерівність (12), у випадку $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right| \geq \rho^{2b} d(2b\gamma;\tilde{P}_2) \equiv T_2$ дістаємо

$$\llbracket v_m;\gamma,\beta;0;\Pi \rrbracket_{2b+\alpha} \leq c \,\| v_m \|_{\Pi}. \tag{14}$$

Розглянемо випадок, коли $\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right| \leq T_1$ або $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right| \leq T_2$. Будемо вважати, що $\min\{d(\gamma;\tilde{P}_1),\ d(\gamma;\tilde{P}_2)\} = d(\gamma;P_1)$. Запишемо задачу (7), (8) у вигляді

$$D_t v_m - \sum_{|k|=2b} a_k(P_1) D_x^k v_m = \sum_{|k|=2b} \left[a_k(P)-a_k(P_1)\right] D_x^k v_m +$$

$$+ \sum_{|k|\leq 2b-1} a_k(P) D_x^k v_m + F(t,x) \equiv F_1(t,x), \tag{15}$$

$$v_m(0,x)=0. \tag{16}$$

Нехай $V_1 \in \Pi$, $V_r = \{(t,x),\ \left|t-t^{(1)}\right| \leq r^{2b} T_1,\ t \geq 0,\ \left|x_i - x_i^{(1)}\right| \leq r T_2,\ i \in \overline{1,n}\}$. Виконавши у задачі (15), (16) заміну $v_m(t,x)=\omega_m(t,y)$, $y_i = d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})\, d_2(\beta_i^{(2)},x^{(1)}) x_i \equiv d(\beta_i;P_1)x_i$, $i=\overline{1,n}$, одержимо

$$(L_2\omega_m)(t,y) \equiv \left[D_t - \sum_{|k|=2b} d((k,\beta);P_1) a_k(P_1) D_y^k \right] \omega_m(t,y) =$$

$$= F_1\left(t, d^{-1}(\beta;P_1)\, y\right) \equiv F_2(t,Y),$$

$$\omega_m(0,y)=0,$$

де $Y = \left(d^{-1}(\beta_1;P_1)\, y_1,\dots, d^{-1}(\beta_n;P_1)\, y_n\right)$.

Позначимо $y_i^{(1)} = d(\beta_i;P_1)x_i^{(1)}$, $N_r = \{(t,y),\ \left|t-t^{(1)}\right| \leq r^{2b} T_2,\ t\geq 0,\ \left|y_i - y_i^{(1)}\right| \leq r\rho d(\gamma;P_1),\ i=\overline{1,n}\}$ і виберемо $2b+1$ разів диференційовну функцію $\mu(t,y)$, яка задовольняє такі умови:

$$0 \leq \mu(t,y) \leq 1,$$

$$\mu(t,y) = \begin{cases} 1, & (t,y) \in N_{1/4}, \\ 0, & (t,y) \notin N_{3/4}, \end{cases}$$

$$\left|D_t^j D_y^k \mu(t,y)\right| \leq c_{jk} d^{-1}\left((2bj+|k|)\,\gamma;P_1\right).$$

Тоді функція $Z_m(t,y)=\omega_m(t,y)\,\mu(t,y)$ є розв'язком задачі Коші

$$(L_2 Z_m)(t,y) = \sum_{|k|=2b} d((k,\beta);P_1) a_k(P_1) \sum_{|\lambda|\leq |k|-1} C_{|k|}^{|\lambda|} D_y^{k-\lambda}\mu \cdot D_y^{\lambda}\omega_m +$$

$$+ \omega_m D_t \mu + F_2(t,Y)\,\mu(t,y) \equiv F_3(t,y),$$

$$Z_m(0,y)=0. \tag{17}$$

Зазначимо, що коефіцієнти рівняння (17) згідно з умовою **1°** обмежені сталими, що не залежать від точки $P_1$. Тому на підставі теореми 4.1 з [2, с. 41] для довільних точок $M_1(\tau^{(1)},\xi^{(1)})$ і $M_2(\tau^{(2)},\xi^{(2)}) \in N_{1/4}$ справджується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)\left| D_\tau^j D_\xi^k \omega_m(M_1) - D_\tau^j D_\xi^k \omega_m(M_2)\right| \leq c \,\| F_3 \|_{C^{\alpha}(N_{3/4})}. \tag{18}$$

Тут $d(M_1, M_2)$ – параболічна віддаль між точками $M_1$ і $M_2$, $2bj + |k| = 2b$.

Враховуючи властивості функції $\mu(t, y)$ і нерівність $d(\gamma; M) \geq \frac{1}{4} d(\gamma; P_1)$, для точок $M \in N_{3/4}$ маємо

$$\| F_3 \|_{C^\alpha(N_{3/4})} \leq c d^{-1}((2b+\alpha)\gamma; P_1) \big( \| F_2; \gamma, 0; 2b; N_{3/4} \|_\alpha +$$

$$+ \| \omega_m; \gamma, 0; 0; N_{3/4} \|_{2b} + \| \omega_m \|_{N_{3/4}} \big), \qquad (19)$$

Із означення простору $C^{2b+\alpha}(\gamma, \beta; 0; \Pi)$ випливає виконання нерівностей

$$c_1 \| \omega_m; \gamma, 0; 0; N_{3/4} \|_{2b+\alpha} \leq \| v_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4} \|_{2b+\alpha} \leq c_2 \| \omega_m; \gamma, 0; 0; N_{3/4} \|_{2b+\alpha}.$$

Підставляючи (19) у (18) і повертаючись до початкових змінних $(t, x)$, отримуємо нерівність

$$E_\nu \leq c \big( \| F_1; \gamma, \beta; 2b; V_{3/4} \|_\alpha + \| v_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4} \|_{2b} + \| v_m \|_{V_{3/4}} \big), \ \nu = 1, 2. \qquad (20)$$

Знайдемо оцінку норми $\| F_1; \gamma, \beta; 2b; V_{3/4} \|_\alpha$. Враховуючи інтерполяційні нерівності, досить оцінити півнорми кожного доданка функції $F_1(t, x)$. Наприклад, для $\| a_k D_x^k v_m; \gamma, \beta; 2b; V_{3/4} \|_\alpha \equiv T_3$ при $|k| \leq 2b - 1$ маємо

$$T_3 \leq \sum_{i=1}^{n} \sup_{B_1, K_i \in V_{3/4}} \big\{ \big[ d\big((k, \gamma - \beta) + \alpha(\gamma - \beta_i); \tilde{B}_1\big) \big| z_i^{(1)} - z_i^{(2)} \big|^{-\alpha} \big| D_z^k v_m(B_1) -$$

$$- D_z^k v_m(K_i) \big| \big] \big[ |a_k(B_1)| d\big(2b\gamma - (k, \gamma - \beta); \tilde{B}_1\big) \big] + \big[ |a_k(B_1) - a_k(K_i)| \times$$

$$\times \big| z_i^{(1)} - z_i^{(2)} \big|^{-\alpha} d\big(2b\gamma - (k, \gamma - \beta) + \alpha(\gamma - \beta_i); \tilde{B}_1\big) \big] \big[ d\big((k, \gamma -$$

$$- \beta); \tilde{B}_1\big) \big| D_z^k v_m(B_1) \big| \big] \big\} + \sum_{i=1}^{n} \sup_{K_i, B_2 \in V_{3/4}} \big\{ \big[ d\big((k, \gamma - \beta) + \alpha\gamma; \tilde{B}_2\big) \times$$

$$\times \big| \tau^{(1)} - \tau^{(2)} \big|^{-\alpha/(2b)} \big| D_z^k v_m(B_2) - D_z^k v_m(K_i) \big| \big] \big[ |a_k(K_i)| d\big(2b\gamma - (k, \gamma -$$

$$- \beta); \tilde{B}_2\big) \big] + \big[ |a_k(K_i) - a_k(B_2)| \big| \tau^{(1)} - \tau^{(2)} \big|^{-\alpha/(2b)} d\big(2b\gamma - (k, \gamma - \beta) +$$

$$+ \alpha\gamma; \tilde{B}_2\big) \big] \big[ d\big((k, \gamma - \beta); \tilde{B}_2\big) \big| D_z^k v_m(B_2) \big| \big] \big\} \leq$$

$$\leq c_3 \big( [\![ v_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4} ]\!]_{|k|+\alpha} + \| u_m \|_{V_{3/4}} \big).$$

Для оцінки півнорми $[\![ (a_k(B) - a_k(P_1)) D_x^k v_m; \gamma, \beta; 2b; V_1 ]\!]_\alpha \equiv T_4$ при $|k| = 2b$ маємо

$$T_4 \leq \sum_{i=1}^{n} \sup_{B_1, K_i \in V_{3/4}} \big\{ \big[ d\big((k, \gamma - \beta) + \alpha(\gamma - \beta_i); \tilde{B}_1\big) \big| z_i^{(1)} - z_i^{(2)} \big|^{-\alpha} \big| D_z^k v_m(B_1) -$$

$$- D_z^k v_m(K_i) \big| \big] \big[ d\big((k, \beta); \tilde{B}_1\big) |a_k(B_1) - a_k(P_1)| \big] + \big[ d\big((k, \beta) +$$

$$+ \alpha(\gamma - \beta_i); \tilde{B}_1\big) |a_k(B_1) - a_k(K_i)| \big| z_i^{(1)} - z_i^{(2)} \big|^{-\alpha} \big] \big[ d\big((k, \gamma - \beta); \tilde{B}_1\big) \times$$

$$\times \big| D_z^k v_m(B_1) \big| \big] \big\} + \sum_{i=1}^{n} \sup_{K_i, B_2 \in V_{3/4}} \big\{ \big[ d\big((k, \gamma - \beta) + \alpha\gamma; \tilde{B}_2\big) \big| \tau^{(1)} - \tau^{(2)} \big|^{-\alpha/(2b)} \times$$

$$\times \big| D_z^k v_m(B_2) - D_z^k v_m(K_i) \big| \big] \big[ d\big((k, \beta); \tilde{B}_2\big) |a_k(B_2) - a_k(P_1)| \big] +$$

$$+\left[\left|a_k(K_i)-a_k(B_2)\right|\left|\tau^{(1)}-\tau^{(2)}\right|^{-\alpha/(2b)} d((k,\beta)+\alpha\gamma;\tilde{B}_2)\right]\times$$

$$\times\left[d((k,\gamma-\beta);\tilde{B}_2)\left|D_z^k v_m(B_2)\right|\right]\big\} \le$$

$$\le c_4(n^{2b}\rho^{\alpha}+\varepsilon^{\alpha}(n+2))[\![v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}]\!]_{2b+\alpha}+c_5\,\|v_m\|_{V_{3/4}},$$

де $\varepsilon\in(0,1)$, $\rho\in(0,1)$; $\varepsilon$, $\rho$ – довільні числа.

Зазначимо, що оцінку функції $F(t,x)$ одержуємо аналогічно. Таким чином,

$$\|F_1;\gamma,\beta;2b;V_{3/4}\|_{\alpha}\le c_4(n^{2b}\rho^{\alpha}+\varepsilon^{\alpha}(n+2))[\![v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}]\!]_{2b+\alpha}+$$

$$+c_6(\|v_m\|_{V_{3/4}}+\|F;\gamma,\beta;2b;V_{3/4}\|_{\alpha}). \tag{21}$$

Підставляючи (21) у (20), знаходимо

$$E_{\nu}\le cc_4(n^{2b}\rho^{\alpha}+\varepsilon^{\alpha}(n+2))[\![v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}]\!]_{2b+\alpha}+$$

$$+c_7(\|v_m\|_{V_{3/4}}+\|F;\gamma,\beta;2b;V_{3/4}\|_{\alpha}).$$

Отже, об'єднавши нерівності (11)–(14), (22) і вибираючи $\rho$ та $\varepsilon$ достатньо малими, дістанемо оцінку (9). ◊

Знайдемо оцінку $\|v_m\|_{\Pi}$. Правильна така теорема.

**Теорема 3**. *Якщо $v_m(t,x)$ – єдиний класичний розв'язок задачі* (7), (8) *і виконуються умови* **1°**, **2°**, *то для $v_m(t,x)$ справджується нерівність*

$$\|v_m\|_{\Pi}\le c\,\|Lv_m;\gamma,\beta;2b;\Pi\|_{\alpha}, \tag{23}$$

*де стала $c$ не залежить від $m_1$, $m_2$.*

Д о в е д е н н я. Використаємо методику доведення зауваження 2 з роботи [1, с. 79]. Нехай нерівність (23) не виконується. Тоді існує послідовність функцій $W_j\in C^{2b+\alpha}(\Pi)$ таких, що $\|W_j\|_{\Pi}=1$, $W_j(0,x)=0$, $L_1W_j$ прямує до нуля для відповідних $W_j$, коли $j\to\infty$. Із (9) випливає, що норми $\|W_j;\gamma,\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha}$ рівномірно обмежені. Тому існує підпослідовність $W_{n(j)}$, яка при $n(j)\to\infty$ збігається до розв'язку $W\in C^{2b+\alpha}(\Pi)$ однорідної задачі Коші. Оскільки розв'язок задачі Коші єдиний, то $W\equiv 0$, що суперечить рівності $\|W\|_{\Pi}=1$. ◊

Д о в е д е н н я  теореми **1**. Оскільки

$$\|L_1v_m;\gamma,\beta;2b;\Pi\|_{\alpha}=\|F_1;\gamma,\beta;2b;\Pi\|_{\alpha}\le$$

$$\le c(\|f;\gamma,\beta;2b;\Pi\|_{\alpha}+\|\varphi;\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;\mathbb{R}^n\|_{2b+\alpha}),$$

то, враховуючи нерівності (9) і (23), маємо

$$\|v_m;\gamma,\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha}\le c(\|f;\gamma,\beta;2b;\Pi\|_{\alpha}+\|\varphi;\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;\mathbb{R}^n\|_{2b+\alpha}). \tag{24}$$

Таким чином, права частина нерівності (24) не залежить від $m_1$, $m_2$, а послідовності

$$W_{kj}^{(m)}=\left\{d(2bj\gamma+(k,\gamma-\beta);P)\left|D_t^jD_x^kv_m(P)\right|,\ 2bj+|k|\le 2b\right\}$$

рівномірно обмежені та рівностепенево неперервні в будь-якій замкненій області $\bar{\Omega}\subset\Pi$.

За теоремою Арцела існують підпослідовності $\{W_{kj}^{m(i)}\}$, рівномірно збіжні до $\{W_{kj}\}$ при $m(i) \to \infty$. Переходячи до границі при $m(i) \to \infty$ у задачі (7), (8), одержимо, що $v(t,x) \equiv W_{00}$ – єдиний розв'язок задачі (5), (6), $v(t,x) \in C^{2b+\alpha}(\gamma,\beta;0;\Pi)$. Враховуючи підстановку (4), дістанемо розв'язок задачі (1), (2). ◊

**Теорема 4**. *Нехай виконується умова* **1°** *і* $f(t,x) \in C^{\alpha}(\gamma,\beta;0;\Pi)$, $\varphi(x) \in C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;\mathbb{R}^n)$. *Тоді єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *у просторі* $C^{2b+\alpha}(\gamma,\beta;0;\Pi)$ *визначається інтегралами Стілтьєса з борелівською мірою*

$$u(t,x) = \int_{\Pi} \Gamma_1(t,x;d\tau,d\xi) f(\tau,\xi) + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_2(t,x;d\xi)\varphi(\xi). \qquad (25)$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $C^{\alpha}(\gamma,\beta;0;\Pi) \subset C^{\alpha}(\gamma,\beta;2b;\Pi)$, то для $f(t,x) \in C^{\alpha}(\gamma,\beta;0;\Pi)$ справджується нерівність

$$\| f;\gamma,\beta;2b;\Pi \|_{\alpha} \le c \| f;\gamma,\beta;0;\Pi \|_{\alpha}.$$

Враховуючи теорему **1**, для розв'язку задачі (1), (2) маємо оцінку

$$\| u;\gamma,\beta;0;\Pi \|_{2b+\alpha} \le c\left( \| f;\gamma,\beta;0;\Pi \|_{\alpha} + \| \varphi;\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;\mathbb{R}^n \|_{2b+\alpha} \right). \qquad (26)$$

Будемо розглядати $u(t,x)$ при фіксованих $(t,x)$ як лінійний неперервний функціонал $\Phi(f,\varphi)$ на нормованому просторі $C_{\alpha} = C^{\alpha}(\gamma,\beta;0;\Pi) \times C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;\mathbb{R}^n)$ з нормою, що дорівнює правій частині нерівності (26). Оскільки $C_{\alpha} \subset C(\Pi)$, то на підставі теореми Рісса можна вважати, що $u(t,x)$ породжує борелівську міру $\Gamma(t,x;Z)$, яка визначена на $\sigma$-алгебрі підмножин $Z$ області $\Pi$, включаючи і $\Pi$, і всі її відкриті підмножини такі, що значення функціоналу визначається формулою (25). ◊


1. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 208 с.
2. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – К.: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
3. *Пукальский И. Д.* Задача с косой производной для неравномерно параболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2001. – **37**, № 12. – С. 1637–1645.
4. *Пукальський І. Д.* Одностороння нелокальна крайова задача для сингулярних параболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 11. – С. 1521–1531.
5. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.


**ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**


*В пространствах классических функций со степенным весом доказаны существование и единственность решения задачи Коши для сингулярных параболических уравнений без ограничений на степенной порядок вырождения коэффициентов. Установлены оценки решения задачи в соответствующих пространствах.*


**CAUCHY PROBLEM FOR SINGULAR PARABOLIC EQUATIONS**


*The existence and uniqueness of solution to the Cauchy problem for singular parabolic equations without limitation on the power order of the coefficient degeneration, are proved in the spaces of classic functions with the power weight. Estimation of solutions to the problem in the corresponding spaces is determined.*



Чернів. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці



Одержано
07.04.03