УДК 519.614

Б. М. Подлевський

ВАРІАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОПАРАМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ

Для двопараметричної спектральної задачі в скінченновимірному дійсному гільбертовому просторі на основі градієнтної процедури запропоновано чисельний метод знаходження її власних значень і власних векторів.

Подібно, як класичні задачі на власні значення $Ax = \lambda x$, узагальнені задачі

$$T(\Lambda)x = 0,$$

де $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}^n$ – набір спектральних параметрів, а операторнозначна функція $T: \mathbb{C} \to X(H)$ (тут $X(H)$ – множина лінійних обмежених операторів) нелінійно залежить від Λ, мають своїм джерелом класичний аналіз. Зокрема, вони виникають у різних крайових задачах для звичайних диференціальних рівнянь, аналогічно до задачі Штурма – Ліувілля, яка є одним з багатьох джерел класичних спектральних задач. Важливий клас узагальнених задач на власні значення утворюють лінійні багатопараметричні спектральні задачі, зокрема, двопараметричні, які й розглядаються нижче.

Нехай H – дійсний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$, а A, B_1, B_2 – обмежені лінійні оператори з H в H. Двопараметрична лінійна спектральна задача, яка асоціюється з цими операторами, полягає у знаходженні такого набору спектральних параметрів $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\} \in \mathbb{R}^2$, при якому існує нетривіальний розв'язок рівняння

$$A x = \lambda_1 B_1 x + \lambda_2 B_2 x. \tag{1}$$

Нехай $\bar{x}$ – власний вектор, якому відповідає власний набір спектральних параметрів $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$. Отже,

$$A \bar{x} = \lambda_1 B_1 \bar{x} + \lambda_2 B_2 \bar{x}. \tag{2}$$

Якщо помножити скалярно обидві частини рівняння (2) на $B_i\bar{x}$, $i = 1,2$, то отримаємо систему лінійних рівнянь відносно Λ:

$$\alpha_i(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{2} \beta_{ij}(\bar{x})\lambda_j, \qquad i = 1,2. \tag{3}$$

Надалі будемо вважати, що $\beta^{-1}(\bar{x})$ існує для будь-якого $\bar{x}$ (це еквівалентно тому, що для $\forall\, \bar{x} \in H \setminus \{0\}$ вектори $B_i\bar{x}$, $i = 1,2$, є лінійно незалежними). Цим ми виключаємо вироджений випадок, коли $A\bar{x} = 0$ і будь-який набір скалярів $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ є власним для $\forall\, \bar{x} \in H \setminus \{0\}$. Отже, для власного вектора $\bar{x}$ набір власних значень $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ визначається однозначно з системи (3).

Оскільки A, B_1, B_2 – обмежені оператори, то $\beta^{-1}(x)$ існує для всіх x з деякого околу власного вектора $\bar{x}$.

Зроблене припущення дозволяє для x, близьких до $\bar{x}$, обчислити

$$\alpha_i(x) = (Ax, B_i x), \quad i = 1,2, \quad \text{і} \quad \beta_{i,j}(x) = (B_i x, B_j x), \quad i,j = 1,2,$$

і за $\alpha_i(x)$, $i = 1,2$, та $\beta_{ij}(x)$, $i,j = 1,2$, побудувати відповідно вектор

$\alpha(x) = \{\alpha_1(x),\ \alpha_2(x)\}$ і матрицю $\beta(x) = \{\beta_{i,j}(x)\}_{i,j=1}^{2}$, а набір власних значень $\Lambda(x) = \{\lambda_1(x),\ \lambda_2(x)\}$ визначити як розв'язок системи

$$\alpha(x) = \beta(x) \cdot \Lambda(x), \tag{4}$$

тобто

$$\Lambda(x) = \beta^{-1}(x) \cdot \alpha(x). \tag{5}$$

Розглянемо тепер функціонал

$$F(x) = \frac{1}{2}\left\| Ax - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i(x) B_i x \right\|^2 \qquad \forall\, x \in H \setminus \{0\}. \tag{6}$$

Легко переконатися, що $F(x) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $\nabla F(x) = 0$. І, очевидно, $F(x) = 0$ тоді й тільки тоді, коли x і $\Lambda(x)$ − власний вектор і власне значення задачі (1), тобто справджується таке твердження.

Лема. *Кожний власний вектор задачі* (1) *є стаціонарною точкою функціонала* (6) *і, навпаки, кожна стаціонарна точка функціонала* (6) *є власним вектором задачі* (1).

Д о в е д е н н я. Нехай $T_\Lambda(x) = Ax - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i(x) B_i x$, тоді $F(x) = \frac{1}{2}\| T_\Lambda(x) \|^2$. Диференціал від $F(x)$ запишемо у вигляді

$$dF(x,h) = \left(T_\Lambda x,\ \left[T_\Lambda h - \sum_{i=1}^{2} d\lambda_i(x,h) B_i x \right] \right). \tag{7}$$

Оскільки

$$(B_i x, T_\Lambda x) = \alpha_i(x) - \sum_{j=1}^{2} \lambda_i(x)\beta_{ij}(x) = 0,$$

то звідси випливає, що

$$dF(x,h) = (T_\Lambda x,\ T_\Lambda h),$$

а тому для градієнта функціонала (6) отримуємо зображення

$$\operatorname{grad} F(x) \equiv \nabla F(x) = T_\Lambda^* T_\Lambda x.$$

Отже,

$$(\nabla F(x), x) = 2F(x),$$

так що

$$\nabla F(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) = 0. \qquad \Diamond$$

Цей результат дозволяє побудувати градієнтну процедуру як метод чисельного знаходження власного вектора у вигляді

$$x_{k+1} = x_k - \gamma(x_k)\nabla F(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{8}$$

де константа $\gamma(x_k)$ на кожному кроці визначається з умови мінімуму функціонала (6) у напрямку (8). Таким чином, з необхідної умови мінімуму функціонала $\frac{\partial F}{\partial \gamma} = 0$ знаходимо, що

$$\gamma(x_k) = \frac{(\nabla F(x_k), \nabla F(x_k))}{(T_\Lambda \nabla F(x_k), T_\Lambda \nabla F(x_k))} = \frac{\| \nabla F(x_k) \|^2}{\| T_\Lambda \nabla F(x_k) \|^2}.$$

Отже, ітераційний процес реалізується за допомогою формул:

$$y_{k+1} = x_k - \gamma(x_k)\nabla F(x_k), \qquad k = 0,1,2,\dots , \tag{9}$$

$$x_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\| y_{k+1} \|}, \tag{10}$$

$$\gamma(x_k) = \begin{cases} \dfrac{\| \nabla F(x_k) \|^2}{\| T_\Lambda \nabla F(x_k) \|^2}, & \nabla F(x_k) \neq 0, \\ 0, & \nabla F(x_k) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

При виборі початкового наближення, у певному сенсі близького до власного вектора, зокрема, з власного підпростору, ітераційний процес (9)–(11) збігається до власного вектора $\bar{x}$, а власне значення $\Lambda(x)$ визначається однозначно зі співвідношення (5) для $x = \bar{x}$.

Зазначимо, що до задачі (1) в дійсному гільбертовому просторі H можна звести задачу

$$Ax = \lambda Bx \tag{12}$$

з комплексними матрицями A і B, яка досить добре досліджена в літературі (див., наприклад, [1–6]). Це доцільно робити в тих випадках, коли нема програм для комплексних матриць, або комплексні арифметичні операції реалізовані неефективно. Потрібно зауважити також, що такий підхід є дуже доречним для тестування запропонованого алгоритму та його програмної реалізації.

Щоб проводити обчислення в дійсному просторі, переформулюємо задачу (12). Нехай

$$A = A_R + iA_I, \quad B = B_R + iB_I,$$

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2, \qquad x = x_1 + ix_2, \quad i^2 = -1.$$

Легко переконатися, що задача (12) еквівалентна дійсній двопараметричній задачі

$$\tilde{A}\tilde{x} = \lambda_1\tilde{B}_1\tilde{x} + \lambda_2\tilde{B}_2\tilde{x}, \qquad \tilde{x} = (x_1, x_2)^\top \in \tilde{H}, \tag{13}$$

де

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} A_R & -A_I \\ A_I & A_R \end{Vmatrix}, \quad \tilde{B}_1 = \begin{Vmatrix} B_R & -B_I \\ B_I & B_R \end{Vmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = \begin{Vmatrix} -B_I & -B_R \\ B_R & -B_I \end{Vmatrix}.$$

Якщо A, B – дійсні: $A = A_R$, $B = B_R$, тоді

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} A_R & 0 \\ 0 & A_R \end{Vmatrix}, \quad \tilde{B}_1 = \begin{Vmatrix} B_R & 0 \\ 0 & B_R \end{Vmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & -B_R \\ B_R & 0 \end{Vmatrix}.$$

Наведемо приклади деяких обчислень, які дають уявлення про кількість ітерацій і збіжність алгоритму.

Виберемо спочатку несиметричну матрицю з дійсними коефіцієнтами

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{14}$$

власні значення і власні вектори якої є відомими (див., наприклад, [2]) і дорівнюють

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i \qquad \text{та} \qquad \bar{x}_{1,2} = \{1, -1 \pm i\}^\top.$$

Зведемо задачу на власні значення (12) для матриці (14) ($B = I$) до двопараметричної спектральної задачі (13), відповідні матриці якої мають вигляд

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \tilde{B}_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

і проведемо числові експерименти, використовуючи різні початкові наближення для власного вектора.

Отримані результати обчислень наведено у табл. 1. Всі розрахунки проводилися з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$ за власним вектором. Для порівняння у перших трьох рядках наведено результати обчислень власного вектора $\bar{x}_1 = \{1, -1+i\}^{\top}$ та власного значення $\lambda_1 = 1+i$ матриці (14) для різних початкових наближень. У четвертому рядку наведено результати обчислень іншого власного вектора $\bar{x}_2 = \{1, -1-i\}^{\top}$ та власного значення $\lambda_2 = 1-i$.

Таблиця 1

Початкове наближення власного вектора	Кількість ітерацій	Власне значення $\lambda_i,\ i = 1,2$	Власний вектор $\bar{x}_i,\ i = 1,2$	Значення функціонала $F(x)$
1.0 1.0 -1.0 -1.0	25	1.0 1.0	1.0 -1.0 0.0 1.0	$1.01663 \cdot 10^{-12}$
-4.0 6.0 -8.0 10.0	7	1.0 1.0	1.0 -1.0 0.0 1.0	$1.25752 \cdot 10^{-14}$
0.001 0.0 -10.0 0.0	39	1.0 1.0	1.0 -1.0 0.0 1.0	$2.48006 \cdot 10^{-14}$
1.0 1.0 1.0 1.0	25	1.0 -1.0	1.0 -1.0 0.0 -1.0	$1.01663 \cdot 10^{-12}$

Для матриці з комплексними коефіцієнтами

$$A = \frac{1}{4} \begin{Vmatrix} 3+i & 3-i \\ -3+i & 3+i \end{Vmatrix}, \qquad (15)$$

власні значення та власні вектори якої є також відомими [2]:

$$\lambda_1 = 1+i, \quad \bar{x}_1 = \{1, i\}^{\top}, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}(1-i), \qquad \bar{x}_2 = \{1, -i\}^{\top},$$

числові результати тестування алгоритму наведено в табл. 2. Як і в попередньому випадку, всі обчислення проводилися з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$ за власним вектором. У перших двох рядках наведено результати обчислень власного вектора $\bar{x}_1 = \{1, i\}^{\top}$ та власного значення $\lambda_1 = 1+i$, а в наступних двох – результати обчислень другого власного вектора $\bar{x}_2 = \{1, -i\}^{\top}$ та власного значення $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1-i)$ матриці (15) для різних початкових наближень.

Таблиця 2

Початкове наближення власного вектора	Кількість ітерацій	Власне значення λ_i, $i = 1,2$	Власний вектор $\bar{x}_i$, $i = 1,2$	Значення функціонала $F(x)$
1.0 1.0 0.0 1.0	4	1.0 1.0	1.0 0.0 0.0 1.0	$2.81997 \cdot 10^{-15}$
0.5 -10.0 0.01 7.0	7	1.0 1.0	1.0 0.0 0.0 1.0	$7.41133 \cdot 10^{-15}$
1.0 10.0 20.0 30.0	5	0.5 -0.5	1.0 0.0 0.0 -1.0	$1.11022 \cdot 10^{-16}$
-1.0 100.0 20.0 30.0	5	0.5 -0.5	1.0 0.0 0.0 -1.0	$1.77390 \cdot 10^{-15}$

Відмітимо, що у проведених числових експериментах, зокрема і тих, які наведено вище, спостерігається швидка збіжність послідовності до власних векторів для різних початкових наближень (навіть досить далеких від власних векторів).

1. *Годунов С. К., Огнева И. И., Прокопов П.* О сходимости модифицированного метода наискорейшего спуска при расчете собственных значений // Дифференц. уравнения с частными производными. – М.: Наука, 1970. – С. 77–80.
2. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). – М.: Наука, 1968. – 504 с.
3. *Подлевский Б. М.* Некоторые градиентные методы в задаче о собственных значениях полиномиальных операторных пучков самосопряженных операторов // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1990. – Вып. 32. – С. 49–51.
4. *Приказчиков В. Г.* Скорейший спуск в спектральной задаче // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 7. – С. 1268–1271.
5. *Blum E. K., Rodrique G. H.* Solution of eigenvalue problems in Hilbert spaces by a gradient method // J. Comput. and System Sci. – 1974. – **2**. – P. 220–237.
6. *Peters G., Wilkinson J. H.* $Ax = \lambda Bx$ and the generalized eigenvalue problem // SIAM. J. Numer. Anal. – 1970. – **7**. – P. 479–492.

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Для двухпараметрической спектральной задачи в конечномерном действительном гильбертовом пространстве на базе градиентной процедуры предложен численный метод нахождения ее собственных значений и собственных векторов.

VARIATIONAL APPROACH TO SOLUTION OF TWO-PARAMETER EIGENVALUE PROBLEMS

On the basis of gradient procedure for two-parameter eigenvalue problem in the finite-dimensional real Hilbert space, the numerical method for determination of its eigenvalues and eigenvectors is proposed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
07.05.03