УДК 517.927

С. М. Ментинський

ДВОСТОРОННІ НАБЛИЖЕННЯ ДО ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Побудовано та досліджено новий двосторонній аналог чисельно-аналітичного методу послідовних наближень А. М. Самойленка для визначення періодичних розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь. Конструкція послідовних наближень та умови їх збіжності до розв'язку задачі ґрунтуються на властивості B-монотонності (за Ю. В. Покорним) правих частин відповідних рівнянь.

Чисельно-аналітичний метод А. М. Самойленка [3] належить до важливих засобів практичного розв'язання граничних задач, зокрема, періодичної задачі для диференціальних рівнянь із звичайними похідними. Поєднання ідей цього методу з ідеями двосторонніх наближених методів (див. [1]) призводить до можливості отримання методів, що охоплюють переваги чисельно-аналітичного і двосторонніх методів (див., наприклад, [1, 4, 5]). Пропоноване дослідження ґрунтується на результатах із [1, 4, 5] і використовує підхід із [6] щодо принципів побудови двосторонніх методів для рівнянь із недиференційовними операторами.

Робота присвячена дослідженню двостороннього алгоритму для наближеного відшукання розв'язків системи

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{1}$$

які задовольняють умову

$$x(t) = x(t+T), \qquad a \le x(t) \le b, \qquad t \in (-\infty, +\infty). \tag{2}$$

Тут $f(t,x) : (-\infty, +\infty) \times [a, b] \to \mathcal{E}$ – неперервна за сукупністю аргументів, періодична за t з періодом T функція; $a, b \in \mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ – напівупорядкований банахів простір). Зручні оцінки зверху і знизу шуканого розв'язку, які дають змогу якісно охарактеризувати його поведінку, оправдовують доцільність дослідження двосторонніх модифікацій чисельно-аналітичного методу А. М. Самойленка [3] у застосуванні до задачі (1), (2) та інших крайових задач. Методика пропонованого дослідження близька до методики із [1], де основним є припущення, що праву частину рівняння (1) можна подати у вигляді неперервної за сукупністю аргументів неспадної за y незростаючої за z і періодичної за t з періодом T функції $F(t, y, z)$, для якої

$$f(t, x) \equiv F(t, x, x).$$

Використання в пропонованій роботі дещо загальніших припущень покликане розширити клас рівнянь, до яких застосовні аналоги двосторонніх методів із [1, 4, 5]. Постульовані дальше властивості функції $F(t, y, z)$ є близькими до поняття B-монотонності, запровадженого та дослідженого в [2].

Вважатимемо функцію $F(t, y, z)$ неперервною за сукупністю аргументів в області $D = [0, T] \times [a, b] \times [a, b]$ періодичною за t з періодом T і такою, що справджуються припущення.

1°. Задано матриці $A_1(t, y, z) = \{a_{ij}^{(1)}(t, y, z)\}$, $B_2(t, y, z) = \{b_{ij}^{(2)}(t, y, z)\}$, $i, j = \overline{1, N}$, неперервних за сукупністю аргументів незростаючих щодо y неспадних щодо z додатних при $t \in [0, T]$, $y, z \in [a, b]$ дійсних функцій, для яких зі співвідношень $y \le z$, $t \in [0, T]$, $y, z \in [a, b]$, випливають нерівності

$$-A_1(t, y, z)(z - y) \le F(t, z, x) - F(t, y, x),$$

$$F(t, x, z) - F(t, x, y) \le B_2(t, y, z)(z - y).$$

2°. При $t \in [0,T]$, $y,z \in [a,b]$ правдиві співвідношення

$$m \le F(t,y,z) - \big(A_1(t,y,z) + B_2(t,y,z)\big)(z-y) \le M\,,$$

$$m \le F(t,y,z) + \big(A_1(t,y,z) + B_2(t,y,z)\big)(z-y) \le M\,.$$

3°. Задано матриці $A_2(t,y,z) = \{a_{ij}^{(2)}(t,y,z)\}$, $B_1(t,y,z) = \{b_{ij}^{(1)}(t,y,z)\}$ неперервних за сукупністю аргументів незростаючих за y неспадних за z додатних при $t \in [0,T]$, $y,z \in [a,b]$ дійсних функцій, тобто задано лінійні неперервні додатні щодо w оператори $A_2(t,y,z)w$, $B_1(t,y,z)w$, для яких зі співвідношень $y \le z$, $t \in [0,T]$ випливають нерівності

$$F(t,z,x) - F(t,y,x) \le B_1(t,y,z)(z-y)\,,$$

$$-A_2(t,y,z)(z-y) \le F(t,x,z) - F(t,x,y)\,.$$

4°. Функцію $F(t,y,z)$ можна подати у вигляді

$$F(t,y,z) = H(t,y,z) - Kz\,,$$

де K – стала матриця така, що $K \ge \theta$, $K^{-1} \ge \theta$, і функція $H(t,y,z)$ задовольняє в області D співвідношення

$$m_1 \le H(t,y,z) - \big(A_1(t,y,z) + B_2(t,y,z) + K\big)(z-y) \le M_1\,,$$

$$m_1 \le H(t,y,z) + \big(A_1(t,y,z) + B_2(t,y,z) + K\big)(z-y) \le M_1\,,$$

а, крім цього, має місце нерівність

$$a + K^{-1}M_1 + \frac{5}{12}T(M-m) \le b + K^{-1}m_1 - \frac{5}{12}T(M-m)\,. \ \triangleright$$

Побудуємо двосторонній ітераційний процес за формулами

$$y_{n+1}(t) = \underline{x}_n^{(0)} + G_y(t,y_n,z_n)\,,$$

$$z_{n+1}(t) = \overline{x}_n^{(0)} + G_z(t,y_n,z_n)\,, \tag{3}$$

$$\underline{x}_n^{(0)} = \frac{1}{T}\int_0^T \big\{K^{-1}\big[(A_1(t,y_n,z_n) + B_2(t,y_n,z_n) + K)(y_n - z_n) + {} + H(t,y_n,z_n)\big] - G_z(t,y_n,z_n)\big\}\,dt\,,$$

$$\overline{x}_n^{(0)} = \frac{1}{T}\int_0^T \big\{K^{-1}\big[(A_1(t,y_n,z_n) + B_2(t,y_n,z_n) + K)(z_n - y_n) + {} + H(t,z_n,y_n)\big] - G_y(t,y_n,z_n)\big\}\,dt\,, \tag{4}$$

де

$$G_y(t,y_n,z_n) = L\big[\big(A_1(t,y_n,z_n) + B_2(t,y_n,z_n)\big)(y_n - z_n) + F(t,y_n,z_n);\ (A_1(t,y_n,z_n) + B_2(t,y_n,z_n))(z_n - y_n) + F(t,y_n,z_n)\big]\,,$$

$$G_z(t,y_n,z_n) = L\big[\big(A_1(t,y_n,z_n) + B_2(t,y_n,z_n)\big)(z_n - y_n) + F(t,y_n,z_n);\ (A_1(t,y_n,z_n) + B_2(t,y_n,z_n))(y_n - z_n) + F(t,y_n,z_n)\big]\,,$$

$$L[\varphi(t);\ \psi(t)] = \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \varphi(s)\,ds - \frac{t}{T}\int_t^T \psi(s)\,ds\,. \tag{5}$$

Початкові наближення визначимо за формулами

$$y_0(t) = K^{-1}m - \frac{1}{T}\left(Tt - t^2 + \frac{1}{6}T^2\right)(M-m)\,,$$

$$z_0(t) = K^{-1}M + \frac{1}{T}\left(Tt - t^2 + \frac{1}{6}T^2\right)(M - m), \qquad (6)$$

а $\underline{x}_0^{(0)}$ та $\overline{x}_0^{(0)}$ отримуємо за допомогою (4).

Можна переконатися, що для послідовних наближень, визначених за формулами (3)–(6), за правдивості умов ***1°, 2°, 4°*** справджуються співвідношення

$$y_n \le y_{n+1} \le z_{n+1} \le z_n,$$

$$\underline{x}_n^{(0)} \le \underline{x}_{n+1}^{(0)} \le \overline{x}_{n+1}^{(0)} \le \overline{x}_n^{(0)}, \qquad n = 0, 1, \ldots .$$

Означимо матрицю $M_{AB} = \{m_{ij}\}$ за допомогою формул

$$m_{ij} = \max_{\substack{t\in[0,T]\\ y,z\in[a,b]}} \left[2\left(a_{ij}^{(1)}(t,y,z) + b_{ij}^{(2)}(t,y,z)\right) + a_{ij}^{(2)}(t,y,z) + b_{ij}^{(1)}(t,y,z)\right].$$

Теорема. *Нехай в області $\mathcal{D}$ справджуються умови* ***1° – 4°*** *і співвідношення $\|Q\| = q < 1$, де $Q = K^{-1}M_{AB} + E + TM_{AB}$. Тоді в області $\mathcal{D}$ існує єдиний розв'язок $x^*(t)$ задачі* (1), (2), *до якого рівномірно щодо $t \in [0, T]$ збігаються послідовності $\{y_n(t)\}, \{z_n(t)\}$, визначені за формулами* (3)–(6). *При цьому справджуються співвідношення*

$$y_n(t) \le y_{n+1}(t) \le x^*(t) \le z_{n+1}(t) \le z_n(t), \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

і має місце оцінка

$$\| z_n(t) - y_n(t) \| \le q^n \left(\frac{5T}{6} \left\| (M - m) + K^{-1}(M_1 - m_1) \right\| \right).$$

Д о в е д е н н я. Умови теореми забезпечують правдивість нерівностей

$$z_{n+1} - y_{n+1} \le \overline{x}_n^{(0)} - \underline{x}_n^{(0)} + L\big[(2(A_1(t,y_n,z_n) + B_2(t,y_n,z_n)) +$$

$$+ A_2(t,y_n,z_n) + B_1(t,y_n,z_n))(z_n - y_n); (2(A_1(t,y_n,z_n) +$$

$$+ B_2(t,y_n,z_n)) + A_2(t,y_n,z_n) + B_1(t,y_n,z_n))(y_n - z_n)\big],$$

$$\overline{x}_{n+1}^{(0)} - \underline{x}_{n+1}^{(0)} \le \frac{1}{T}\int_0^T \big\{K^{-1}(2(A_1(t,y_n,z_n) + B_2(t,y_n,z_n)) + A_2(t,y_n,z_n) +$$

$$+ B_1(t,y_n,z_n) + K)(z_n - y_n) + L\big[(2(A_1(t,y_n,z_n) + B_2(t,y_n,z_n)) +$$

$$+ A_2(t,y_n,z_n) + B_1(t,y_n,z_n))(z_n - y_n); (2(A_1(t,y_n,z_n) +$$

$$+ B_2(t,y_n,z_n)) + A_2(t,y_n,z_n) + B_1(t,y_n,z_n))(y_n - z_n)\big]\big\}dt,$$

$$\| z_{n+1} - y_{n+1} \| \le \left\| K^{-1}M_{AB} + E + TM_{AB} \right\| \cdot \| z_n - y_n \| = q \| z_n - y_n \|,$$

де $q = \|Q\|$. Звідси при $q < 1$ на підставі принципу Шаудера випливає існування спільних границь $x^*(t)$ та x_0^* послідовностей $\{y_n\}$ і $\{z_n\}$ та $\{\underline{x}_n^{(0)}\}$ і $\{\overline{x}_n^{(0)}\}$ відповідно. Оскільки при $n \to \infty$ з (3) і (4) отримуємо

$$x^*(t) = x_0^* + \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t f(s, x^*(s))\, ds - \frac{t}{T}\int_t^T f(s, x^*(s))\, ds,$$

$$x_0^* = \frac{1}{T}\int_0^T \left\{ K^{-1} f(t, x^*(t)) + x^*(t) - \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t f(s, x(s))\, ds + \frac{t}{T}\int_t^T f(s, x(s))\, ds \right\} dt,$$

отже,

$$x_0^* = \frac{1}{T}\int_0^T \{K^{-1}f(t, x^*(t)) + x_0^*\}\,dt,$$

то $x^*(t)$ є розв'язком задачі (1), (2). ◊

Зауважимо, що послідовності $y_n(t)$, $z_n(t)$ є наближеннями до розв'язку $x^*(t)$ задачі лише для відрізка $[0, T]$, за межами цього відрізка йдеться про періодичне продовження функцій $y_n(t)$, $z_n(t)$.

Отримані результати містять як часткові випадки відповідні результати з [1, 4, 5]. Зокрема, у випадку $A_1(t, y, z) \equiv B_2(t, y, z) \equiv \Theta$, $A_2(t, y, z) \equiv$ $\equiv B_1(t, y, z) \equiv K$, $K = \text{const}$, алгоритм (3), (4) співпадає з двостороннім ітераційним процесом, дослідженим у [4]. Перспективою подальших розвідок у цьому напрямку можна вважати поширення запропонованого способу побудови двосторонніх наближень на інші класи крайових задач, а також конкретизацію досліджень алгоритму з метою його реалізації за допомогою сучасних обчислювальних засобів.

1. *Курпель Н. С., Шувар Б. А.* Двусторонние операторные неравенства и их применения. – Киев: Наук. думка, 1980. – 268 с.
2. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Вища шк., 1976. – 180 с.
3. *Собкович Р. И.* Двусторонний метод исследования некоторых краевых задач с параметрами. – Киев, 1981. – 36 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 81.52.
4. *Собкович Р. И., Шувар Б. А.* Двусторонние приближения к периодическим решениям систем дифференциальных уравнений с параметрами // Нелинейные динамические процессы физики и механики. – Киев: Наук. думка, 1981. – С. 138–145.
5. *Шувар Б. А.* Двусторонние итерационные методы решения нелинейных уравнений в полуупорядоченных пространствах // II симп. по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации. – Таллин: Ин-т кибернетики АН ЭССР. – 1981. – Т. 1. – С. 68–73.
6. *Покорный Ю. В.* О B-положительности и B-монотонных операторах // Проблемы математического анализа сложных систем. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та. – 1967. – Вып. 1. – С. 58–63.

ДВУСТОРОННИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ К ПЕРИОДИЧЕСКИМ РЕШЕНИЯМ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Построен и исследован новый двусторонний аналог численно-аналитичесого метода последовательных приближений А. М. Самойленка в применении к отысканию периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Конструкция последовательных приближений и условия их сходимости к решению задачи базируются на свойстве B-монотонности (по Ю. В. Покорному) правых частей соответствующих уравнений.

BILATERAL APPROXIMATION TO PERIODIC SOLUTIONS OF SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

A new bilateral analogue of Samojlenko's numerical-analytical method of consecutive approaches for determining the periodic solutions of systems of ordinary differential equations is constructed and investigated. The consecutive approaches construction and conditions of their convergence to solutions of the problem are based on the property of B-monotonicity (by J. V. Pokorny) of the right parts of the respective equations.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
16.07.03