УДК 519.1

Н. М. Дяків, Р. А. Заторський

ДО F-ПАРАВИЗНАЧНИКІВ І F-ПАРАПЕРМАНЕНТІВ ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ

Доведено, що F-паравизначники та F-параперманенти є частковим випадком відповідно паравизначників і параперманентів [2]. *Встановлено деякі твердження для F-параперманентів, аналогічні до тверджень про F-паравизначники, розглянутих в* [1], *а також твердження про взаємозв'язок між верхніми та нижніми F-паравизначниками та верхніми й нижніми F-параперманентами.*

Задачі балотування і математичної статистики та задачі про випадкові блукання на решітках зводяться до підрахунку числа траєкторій на цілочислових решітках. Частковим класом таких задач є загальна задача про підрахунок найкоротших траєкторій [3] на похилих діаграмах. У роботі [1] для розв'язання цієї задачі використовують F-паравизначники та F-параперманенти.

1. Нехай задано трикутну матрицю вигляду

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix} \right\|_n . \qquad (1)$$

Кожному елементу a_{ij}, $i \le j$, матриці (1) поставимо у відповідність $i - j + 1$ елементів a_{ik}, $k = j, \ldots, i$, які називаються *похідними елементами* матриці, породженими *ключовим елементом* a_{ij} [3]. Ключовий елемент одночасно є і його похідним елементом. Добуток усіх похідних елементів, породжених ключовим елементом a_{ij}, позначимо через $\{a_{ij}\}$ і назвемо *факторіальним добутком ключового елемента* a_{ij}, тобто

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik} .$$

Набір ключових елементів матриці (1) називають *нормальним набором* цієї матриці, якщо вони породжують множину похідних елементів потужності n, кожні два з яких не містяться в одному стовпці цієї матриці.

Кожному нормальному набору a ключових елементів припишемо знак $(-1)^{\varepsilon(a)}$, де $\varepsilon(a)$ – сума всіх індексів ключових елементів цього набору. Через $\mathcal{P}(n)$ позначимо множину всіх упорядкованих розбиттів $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ натурального числа n.

Паравизначником і параперманентом трикутної матриці (1) називають [2] відповідно числа

$$\operatorname{ddet}(A) = \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_n = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in\mathcal{P}(n)} (-1)^{\varepsilon(a)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{i(s),j(s)}\} ,$$

$$\operatorname{pper}(A) = \left[\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix} \right]_n = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in\mathcal{P}(n)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{i(s),j(s)}\} ,$$

де $a_{i(s),j(s)}$ – ключовий елемент, що відповідає s-й компоненті розбиття $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathcal{P}(n)$.

Прямокутну таблицю елементів матриці (1) назвемо *вписаною* у цю матрицю, якщо одна її вершина збігається із елементом a_{n1}, а протилежна до неї – з елементом a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$. Цю таблицю позначимо через $T(i)$.

Якщо в таблиці $T(i)$ покласти $i = 1$ або $i = n$, то прямокутна таблиця вироджується відповідно у перший стовпець чи n-й рядок.

Верхнім і нижнім F*-паравизначниками* матриці (1) називають відповідно числа [1]

$$\operatorname{ddet}^0(A) = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in\mathcal{P}(n)} (-1)^{\varepsilon(a)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{i_s,j_s}\}^0 ,$$

$$\operatorname{ddet}_0(A) = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in\mathcal{P}(n)} (-1)^{\varepsilon(a)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{i_s,j_s}\}_0 ,$$

де a_{i_s,j_s} – ключовий елемент, що відповідає s-й компоненті розбиття α;

$$\{a_{ij}\}^0 = \frac{a_{ij}^{\overline{i-j+1}}}{(i-j+1)!} = \frac{a_{ij}(a_{ij}+1)\cdot\ldots\cdot(a_{ij}+i-j)}{(i-j+1)!} ,$$

$$\{a_{ij}\}_0 = \frac{a_{ij}^{\underline{i-j+1}}}{(i-j+1)!} = \frac{a_{ij}(a_{ij}-1)\cdot\ldots\cdot(a_{ij}-i+j)}{(i-j+1)!}$$

– відповідно верхній і нижній факторіальні добутки ключового елемента a_{ij}; множник $(-1)^{\varepsilon(a)}$ визначає знак нормального набору a ключових елементів.

Аналогічно до F-паравизначника вводяться поняття *верхнього і нижнього* F*-парaперманента*:

$$\operatorname{pper}^0(A) = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in\mathcal{P}(n)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{i_s,j_s}\}^0 ,$$

$$\operatorname{pper}_0(A) = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in\mathcal{P}(n)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{i_s,j_s}\}_0 .$$

Кожному елементу a_{ij} матриці (1) ставимо у відповідність трикутну таблицю елементів цієї матриці з елементом a_{ij} у лівому нижньому куті (її називають [2] *рогом матриці* (1) і позначають через R_{ij}). Очевидно, що ріг R_{ij} є матрицею ($i-j+1$)-го порядку. У ріг R_{ij} входять тільки ті елементи a_{rs} матриці (1), індекси яких задовольняють співвідношення $j \le s \le$ $\le r \le i$. Вважатимемо, що

$$\operatorname{ddet}(R_{01}) = \operatorname{ddet}(R_{n,n+1}) = \operatorname{pper}(R_{01}) = \operatorname{pper}(R_{n,n+1}) = 1 .$$

Алгебричним доповненням P_{ij} до факторіального добутку ключового елемента a_{ij} матриці (1) називають число

$$P_{ij} = \operatorname{pper}(R_{j-1,1})\operatorname{pper}(R_{n,i+1}) ,$$

де $R_{j-1,1}$ і $R_{n,i+1}$ – роги матриці (1).

2. Доведемо теорему про зв'язок F-паравизначників і F-параперманентів із паравизначниками та параперманентами.

Теорема 1. *Якщо* A *− трикутна матриця* (1), *то справджуються такі тотожності*:

$$\operatorname{ddet}^0(A) \equiv \operatorname{ddet}\left(\frac{(i-j+\delta_{ij})!}{(i-j+1)!} \cdot \frac{a_{ij}^{\overline{i-j+1}}}{a_{i,j+1}^{\overline{i-j}}} \right)_n , \tag{2}$$

$$\operatorname{ddet}_0(A) \equiv \operatorname{ddet}\left(\frac{(i-j+\delta_{ij})!}{(i-j+1)!} \cdot \frac{a_{ij}^{\underline{i-j+1}}}{a_{i,j+1}^{\underline{i-j}}} \right)_n , \tag{3}$$

$$\operatorname{pper}^0(A) \equiv \operatorname{pper}\left(\frac{(i-j+\delta_{ij})!}{(i-j+1)!} \cdot \frac{a_{ij}^{\overline{i-j+1}}}{a_{i,j+1}^{\overline{i-j}}} \right)_n , \tag{4}$$

$$\operatorname{pper}_0(A) \equiv \operatorname{pper}\left(\frac{(i-j+\delta_{ij})!}{(i-j+1)!} \cdot \frac{a_{ij}^{\underline{i-j+1}}}{a_{i,j+1}^{\underline{i-j}}} \right)_n , \tag{5}$$

де δ_{ij} *− символ Кронекера.*

Д о в е д е н н я. Щоб довести тотожність (2), доведемо, що верхній факторіальний добуток елемента a_{ij}, $1 \le j \le i \le n$, F-паравизначника $\operatorname{ddet}^0(A)$ і факторіальний добуток паравизначника $\operatorname{ddet}\left(\frac{(i-j+\delta_{ij})!}{(i-j+1)!} \cdot \frac{a_{ij}^{\overline{i-j+1}}}{a_{i,j+1}^{\overline{i-j}}} \right)_n$ співпадають. Дійсно,

$$\left\{ \frac{(i-j+\delta_{ij})!}{(i-j+1)!} \cdot \frac{a_{ij}^{\overline{i-j+1}}}{a_{i,j+1}^{\overline{i-j}}} \right\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik} =$$

$$= \prod_{k=j}^{i} \frac{(i-k+\delta_{ik})!}{(i-k+1)!} \cdot \frac{a_{ik}^{\overline{i-k+1}}}{a_{i,k+1}^{\overline{i-k}}} = \begin{cases} a_{ii}, & j = i, \\ \dfrac{a_{ij}^{\overline{i-j+1}}}{(i-j+1)!}, & j \ne i, \end{cases} = \{a_{ij}\}^0 .$$

Аналогічно можна довести тотожності (3)−(5). ◊

Зауваження. Коефіцієнти $\frac{(i-j+\delta_{ij})!}{(i-j+1)!}$ елементів паравизначника $\operatorname{ddet}\left(\frac{(i-j+\delta_{ij})!}{(i-j+1)!} \cdot \frac{a_{ij}^{\overline{i-j+1}}}{a_{i,j+1}^{\overline{i-j}}} \right)_n$ можна записати також у вигляді $\frac{1-\delta_{ij}}{i-j+1} + \delta_{ij}$.

Сформулюємо теорему про кількість найкоротших шляхів на похилій діаграмі [1] у термінах паравизначників.

Теорема 2. *Нехай похилу діаграму* $\operatorname{diagr}(\lambda, \mu)$ [1] *задано деякими мультимножинами* $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s, 0, \ldots 0\}$, $s < n$, *причому* $\mu_i \le \lambda_i$, $i = 1, \ldots, s$. *Тоді кількість найкоротших траєкторій на цій діаграмі від крайньої південно-східної точки* A *до крайньої північно-західної точки* B *з рухом* $\operatorname{mot}(\uparrow, \leftarrow)$ *дорівнює значенню паравизначника*

$$\operatorname{ddet}\left(\left(\frac{1-\delta_{ij}}{i-j+1} + \delta_{ij} \right) \cdot \frac{(\lambda_i - \mu_j + j - i + 1)^{\overline{i-j+1}}}{(\lambda_i - \mu_{j+1} + j - i + 2)^{\overline{i-j}}} \right)_n . \tag{6}$$

Зауваження. Якщо для індексів паравизначника (6) виконується нерівність $\lambda_i - \mu_j + j - i + 1 \le 0$, то відповідний елемент цього паравизначника є нулем.

Доведемо теорему про зв'язок верхніх і нижніх F-паравизначників та зв'язок верхніх і нижніх F-параперманентів.

Теорема 3. *Якщо* A – *матриця* (1), *то виконуються рівності*

$$\mathrm{ddet}^0(a_{ij})_{1\le j\le i\le n} = (-1)^n \cdot \mathrm{ddet}_0(-a_{ij})_{1\le j\le i\le n}, \tag{7}$$

$$\mathrm{ddet}_0(a_{ij})_{1\le j\le i\le n} = (-1)^n \cdot \mathrm{ddet}^0(-a_{ij})_{1\le j\le i\le n}, \tag{8}$$

$$\mathrm{pper}^0(a_{ij})_{1\le j\le i\le n} = (-1)^n \cdot \mathrm{pper}_0(-a_{ij})_{1\le j\le i\le n}, \tag{9}$$

$$\mathrm{pper}_0(a_{ij})_{1\le j\le i\le n} = (-1)^n \cdot \mathrm{pper}^0(-a_{ij})_{1\le j\le i\le n}. \tag{10}$$

Д о в е д е н н я. Доведемо спочатку виконання рівностей

$$\{a_{ij}\}^0 = (-1)^{i-j+1} \cdot \{-a_{ij}\}_0, \tag{11}$$

$$\{a_{ij}\}_0 = (-1)^{i-j+1} \cdot \{-a_{ij}\}^0. \tag{12}$$

За означенням факторіального добутку елемента a_{ij} матриці A запишемо

$$(-1)^{i-j+1} \cdot \{-a_{ij}\}_0 = \frac{(-a_{ij})^{\underline{i-j+1}}}{(i-j+1)!} =$$

$$= (-1)^{i-j+1} \cdot \frac{(-a_{ij}) \cdot (-a_{ij} - 1) \cdot \ldots \cdot (-a_{ij} - (i-j))}{(i-j+1)!} =$$

$$= \frac{a_{ij} \cdot (a_{ij} + 1) \cdot \ldots \cdot (a_{ij} + i - j + 1)}{(i-j+1)!} = \{a_{ij}\}^0,$$

тобто рівність (11) справджується. Поклавши в рівності (11) замість елемента a_{ij} елемент $(-a_{ij})$ і помноживши отриману рівність на $(-1)^{i-j+1}$, дістанемо рівність (12).

Доведемо рівність (7). На підставі означення F-паравизначника маємо

$$(-1)^n \cdot \mathrm{ddet}_0(-a_{ij})_{1\le j\le i\le n} = (-1)^n \cdot \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in\mathcal{P}(n)} (-1)^{\varepsilon(\alpha)} \prod_{s=1}^{r} \{-a_{i_s,j_s}\}_0 =$$

$$= (-1)^n \cdot \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in\mathcal{P}(n)} (-1)^{\varepsilon(\alpha)} \prod_{s=1}^{r} (-1)^{i_s - j_s + 1} \{a_{i_s,j_s}\}^0 =$$

$$= (-1)^n \cdot \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in\mathcal{P}(n)} (-1)^{\varepsilon(\alpha)} (-1)^n \cdot \prod_{s=1}^{r} \{a_{i_s,j_s}\}^0 =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in\mathcal{P}(n)} (-1)^{\varepsilon(\alpha)} \cdot \prod_{s=1}^{r} \{a_{i_s,j_s}\}^0 = \mathrm{ddet}^0(a_{ij})_{1\le j\le i\le n}.$$

Аналогічно можна довести рівності (8)–(10). ◊

Наступне твердження для F-параперманентів є аналогом тверджень для F-паравизначників [1] і дозволяє спростити їх обчислення.

Теорема 4. *Для трикутної матриці* (1) *виконуються рівності*

$$\mathrm{pper}^0(A) =$$

$$= \mathrm{pper}^0\left(A\begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix}\right) + \mathrm{pper}^0(R_{j-1,1}) \cdot \left(\mathrm{pper}^0(R_{n,j+1}) + \mathrm{pper}^0(R_{n,j+1/j})\right), \tag{13}$$

$$\mathrm{pper}_0(A) =$$

$$= \mathrm{pper}_0\left(A\begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix}\right) + \mathrm{pper}_0(R_{j-1,1}) \cdot \left(\mathrm{pper}_0(R_{n,j+1}) + \mathrm{pper}_0\left(R_{n,j+1/j}\begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right). \tag{14}$$

Д о в е д е н н я. Доведемо рівність (13) для $j = 1$:

$$\operatorname{pper}^0(A) =$$

$$= \operatorname{pper}^0\left(A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) + \operatorname{pper}^0(R_{0,1})\cdot\left(\operatorname{pper}^0(R_{n,2}) + \operatorname{pper}^0(R_{n,2/1})\right). \qquad (15)$$

Для цього розвинемо верхній параперманент $\operatorname{pper}^0(A)$ за елементами першого стовпця:

$$\operatorname{pper}^0(A) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{a_{r1}^{\overline{r}}}{r!}\cdot\operatorname{pper}^0(R_{n,r+1}) = \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{(a_{r1}-1)^{\overline{r}}}{r!} + \frac{a_{r1}^{\overline{r-1}}}{(r-1)!}\right)\cdot\operatorname{pper}^0(R_{n,r+1}) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n}\frac{(a_{r1}-1)^{\overline{r}}}{r!}\cdot\operatorname{pper}^0(R_{n,r+1}) + \sum_{r=1}^{n}\frac{a_{r1}^{\overline{r-1}}}{(r-1)!}\cdot\operatorname{pper}^0(R_{n,r+1}) =$$

$$= \operatorname{pper}^0\left(A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) + \operatorname{pper}^0(R_{n,2}) + \sum_{r=2}^{n}\frac{a_{r1}^{\overline{r-1}}}{(r-1)!}\cdot\operatorname{pper}^0(R_{n,r+1}).$$

Поклавши в останній сумі $r = s+1$, дістанемо

$$\operatorname{pper}^0(A) = \operatorname{pper}^0\left(A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) + \operatorname{pper}^0(R_{n,2}) + \sum_{s=1}^{n-1}\frac{a_{s+1,1}^{\overline{s}}}{s!}\cdot\operatorname{pper}^0(R_{n,s+2}) =$$

$$= \operatorname{pper}^0\left(A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) + \operatorname{pper}^0(R_{n,2}) + \operatorname{pper}^0(R_{n,2/1}),$$

тобто для $j = 1$ рівність (13) виконується.

Доведемо рівність (13) для $1 \le j \le i \le n$. Для цього зростаючий F-параперманент $\operatorname{pper}^0\left(A\begin{pmatrix}j\\-1\end{pmatrix}\right)$ розкладемо за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(j)$:

$$\operatorname{pper}^0 A\begin{pmatrix}j\\-1\end{pmatrix} = \sum_{r=j}^{n}\sum_{s=1}^{j-1}\frac{a_{rs}^{\overline{r-s+1}}}{(r-s+1)!}P_{rs}^0 + \sum_{s=j}^{n}\frac{(a_{sj}-1)^{\overline{s-j+1}}}{(s-j+1)!}P_{sj}^0. \qquad (16)$$

Другий доданок рівності (16) відповідає розвиненню цього F-параперманента за елементами j-го стовпця. Позначимо першу суму через φ. Тепер розвинемо верхній F-параперманент $\operatorname{pper}^0(A)$ за елементами таблиці $T(j)$:

$$\operatorname{pper}^0 A = \varphi + \sum_{s=j}^{n}\frac{a_{sj}^{\overline{s-j+1}}}{(s-j+1)!}P_{sj}^0 = \varphi + \operatorname{pper}^0(R_{j-1,1})\cdot\operatorname{pper}^0(R_{nj}).$$

Подавши елементи першого стовпця рогу R_{nj} у вигляді $a_{sj} = (a_{sj}-1)+1$, $s = j,\ldots,n$, і використавши рівність (15) для першого стовпця, дістанемо таке співвідношення:

$$\operatorname{pper}^0(A) = \varphi +$$

$$+ \operatorname{pper}^0(R_{j-1,1})\cdot\left(\operatorname{pper}^0\left(R_{nj}\begin{pmatrix}j\\-1\end{pmatrix}\right) + \operatorname{pper}^0(R_{n,j+1}) + \operatorname{pper}^0(R_{n,j+1/j})\right) =$$

$$= \varphi + \operatorname{pper}^0(R_{j-1,1})\cdot\operatorname{pper}^0\left(R_{nj}\begin{pmatrix}j\\-1\end{pmatrix}\right) +$$

$$+ \operatorname{pper}^0(R_{j-1,1})\cdot\left(\operatorname{pper}^0(R_{n,j+1}) + \operatorname{pper}^0(R_{n,j+1/j})\right).$$

Враховуючи рівність [1]

$$\operatorname{pper}^0(R_{j-1,1}) \cdot \operatorname{pper}^0\left(R_{nj}\begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \sum_{s=j}^{n} \frac{(a_{sj}-1)^{\overline{s-j+1}}}{(s-j+1)!} P_{sj}^0 ,$$

а також (16), дістанемо рівність (13) для довільного j, що задовольняє нерівності $1 \le j \le i \le n$. Рівність (14) доводиться аналогічно. ◊

3. Таким чином, F-паравизначники та F-параперманенти є підкласом паравизначників і параперманентів, тому перші мають властивості останніх [2]. Однак вони мають властивості, притаманні тільки їм (теорема 4). Отже, зважаючи на важливі застосування F-паравизначників та F-параперманентів, актуальною є задача подальшого дослідження їхніх властивостей.

1. *Заторский Р. А.* Определители треугольных матриц и траектории на диаграммах Ферре // Мат. заметки. – 2002. **– 72**, № 6. – С. 46–54.
2. *Заторський Р. А.* Паравизначники та параперманенти трикутних матриць // Доп. НАН України. – 2002. – № 8. – С. 21–25.
3. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. – М.: Мир, 1969. – 472 с.

К F - ПАРАОПРЕДЕЛИТЕЛЯМ И F -ПАРАПЕРМАНЕНТАМ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

Доказано, что F-параопределители и F-параперманенты являются частным случаем параопределителей и параперманентов. Установлена связь между верхними и нижними F-параопределителями и верхними и нижними F-параперманентами, а также доказаны некоторые важные утверждения о F-параперманентах, аналогичные известным утверждениям о F-параопределителях.

ON F-PARADETERMINANTS AND F-PARAPERMANENTS OF TRIANGULAR MATRICES

It is proved that F-paradeterminants and F-parapermanents are particular cases of paradeterminants and parapermanents. The relation between the upper and lover F-paradeterminants and upper and lover F-parapermanents is established. Certain important statements on F-parapermanents, being counterparts of the known facts about F - parapermanents, are proved.

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ,
Прикарпат. ун-т
ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
21.03.03