УДК 513.88

Г. М. Піпа

ПРО РЕЗОЛЬВЕНТУ ЗБУРЕННЯ, ЯКЕ ЗМІНЮЄ ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСНОГО РОЗШИРЕННЯ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНОГО ОПЕРАТОРА

Встановлено зв'язок між резольвентами деякого власного розширення даного додатно визначеного оператора в гільбертовому просторі (це розширення розглядається як незбурений оператор) і деяким іншим оператором, який розглядається як збурений. При цьому згадані оператори мають різні області визначення.

Резольвента оператора – одне з найважливіших понять у теорії операторів. За допомогою резольвенти можна не тільки розв'язувати відповідні операторні рівняння, а й досліджувати певні спектральні характеристики розглядуваного оператора. Задача про побудову резольвенти є надзвичайно актуальною у теорії збурень. Дійсно, знаючи зв'язок між резольвентами незбуреного та збуреного операторів, а також спектральні властивості першого з них, можна отримати певну інформацію про відповідні властивості другого (асимптотику власних значень, повноту системи власних елементів, характер спектра тощо).

Зазначимо, що у випадку адитивних збурень такий зв'язок реалізується за допомогою відомих формул типу Вайнштейна – Ароншайна [5], а у випадку, коли збурений і незбурений оператори є самоспряженими розширеннями даного симетричного оператора, – формулами М. Г. Крейна [1]. Умови резольвентної порівнюваності максимально дисипативних розширень такого оператора наведено в [4] (див. також [2]).

З другого боку, започатковане А. М. Краллом (див. [11] і цитовану там літературу) систематичне дослідження диференціально-граничних операторів з некласичними крайовими умовами стимулювало появу нових теоретико-операторних моделей теорії збурень, які змінюють не тільки закон дії оператора, а і його область визначення. Одна з таких моделей – теорія споріднених операторів – запропонована В. Е. Лянце [6]. Зокрема, в [6] встановлено зв'язок між резольвентами споріднених операторів. Однак у цій теорії розглядається ситуація, коли:

– збурений і незбурений оператори мають спільне скінченновимірне звуження;

– області визначення збуреного оператора та спряженого з ним складаються з «достатньо гладких» елементів.

Природно виникає питання про побудову більш загальної теорії. Таку теорію частково побудовано в [7], де суттєво послаблено перше з наведених обмежень, а також у [8], де (за певних обмежень) послаблено друге з них.

Мета цієї роботи – перенести викладені в [7, 8] результати, що стосуються резольвенти збуреного оператора, на більш загальну ситуацію і частково посилити ці результати.

Перш ніж переходити до конкретної постановки задачі, зазначимо, що нижче систематично використовуються такі позначення: $D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ – відповідно область визначення, область значень і многовид нулів (лінійного) оператора T; $\mathcal{B}(X,Y)$ – сукупність лінійних неперервних операторів $A : X \to Y$ таких, що $D(A) = X$; $\mathcal{B}(X) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{B}(X,X)$; $\mathbf{1}_X$ – тотожне перетворення простору X; $A \mid E$ – звуження оператора A на множину E; $\mathcal{C}(X)$ – клас замкнених щільно визначених лінійних операторів в просторі X; $\rho(T)$ – резольвента оператора T; T^* – оператор, спряжений до оператора T.

Роль вихідного об'єкта відіграє додатно визначений оператор $L_0 \in \mathcal{C}(H)$, де H – фіксований комплексний гільбертів простір зі скалярним добутком $(.\,|\,.)$. Через L_F позначаємо розширення за Фрідріхсом оператора L_0, через H_e та $(.\,|\,.)_e$ – його енергетичний простір та енергетичний скалярний добуток (деталі див. у [9]), а через $\mathcal{P}$ – проектор $\mathcal{H}_e \dotplus \ker L \to H_e$ паралельно до $\ker L$ (тут і далі $L \overset{\text{def}}{=} L_0^*$).

Також вважаємо заданими крайові пари $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H},\ \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2)$, $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H},\ \tilde{\mathcal{U}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{U}}_2)$ для (L, L_0) такі, що $\forall y, z \in D(L)$ $(Ly \,|\, z) - (y \,|\, Lz) = (\mathcal{U}_1 y \,|\, \tilde{\mathcal{U}}_2 z)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{U}_2 y \,|\, \tilde{\mathcal{U}}_1 z)_{\mathcal{H}}$ (див. [7]), і деякі оператори $\Phi_i \in \mathcal{B}(H, \mathcal{H})$, $\Psi_i \in \mathcal{B}(H_e, G_i)$, де G_i – замкнений лінійний підпростір простору $\mathcal{H}$, $i = 1, 2$. При цьому припускаємо, що

$$R(\Psi_i^\bullet) \cap D(L_F) = \{0\}, \qquad R(\Psi_i) = R(\Psi_i \,|\, D(L_0)) = G_i,$$

$$\ker L \dotplus R(\Psi_i^\bullet) \qquad \text{замкнена в} \quad H, \tag{1}$$

а оператори $\Psi_i^\bullet \in \mathcal{B}(G_i, H_e)$ визначаємо за допомогою співвідношень

$$\forall u \in H_e, \quad \forall g_i \in G_i \qquad (\Psi_i u \,|\, g_i)_{\mathcal{H}} = (u \,|\, \Psi_i^\bullet g_i)_e .$$

Нехай $D_i \overset{\text{def}}{=} D(L) \dotplus R(\Psi_i^\bullet)$. Позначимо через $\mathcal{U}_j^{(2)}$ ($\tilde{\mathcal{U}}_j^{(1)}$) продовження за лінійністю оператора $\mathcal{U}_j$ ($\tilde{\mathcal{U}}_j$) на D_2 (D_1), яке анулюється на $R(\Psi_2^\bullet)$ ($R(\Psi_1^\bullet)$), $i, j = 1, 2$. Далі, якщо $x \in D(L)$, $h_i \in G_i$, то оператор $\Gamma_3^{(i)}$ визначимо з умови

$$\Gamma_3^{(i)}(x + \Psi_i^\bullet h_i) = -\,h_i, \qquad i = 1, 2,$$

а оператори χ_i, $\chi_i^\bullet$ – за допомогою рівностей

$$\chi_i \overset{\text{def}}{=} \Psi_i \mathcal{P} + \Phi_i, \qquad \chi_i^\bullet \overset{\text{def}}{=} (\chi_i \,|\, H_e)^\bullet \ \ (= \Psi_i^\bullet + L_F^{-1} \Phi_i^*).$$

Основним об'єктом дослідження є оператор T, визначений за допомогою співвідношень

$$D(T) = \{\, y \in D(L) + R(\chi_2^\bullet) : y + \chi_2^\bullet \mathcal{U}_2^{(2)} y \in D(L), \quad \mathcal{U}_1^{(2)} y = \chi_1 y \,\}, \tag{2}$$

$$\forall y \in D(T) \qquad Ty = L(y + \chi_2^\bullet \mathcal{U}_2^{(2)} y). \tag{3}$$

При цьому припускаємо, що

$$R((\mathcal{U}_1^{(2)} - \chi_1) \oplus (P_{\psi_2} \mathcal{U}_2^{(2)} - \Gamma_3^{(2)})) = \mathcal{H} \oplus G_2, \tag{4}$$

$$R((\tilde{\mathcal{U}}_1^{(1)} - \chi_2) \oplus (\Gamma_3^{(1)} - P_{\psi_1} \tilde{\mathcal{U}}_2^{(1)})) = \mathcal{H} \oplus G_1, \tag{5}$$

тут P_{ψ_i} – ортопроектор $\mathcal{H} \to G_i$, $i = 1, 2$.

На підставі результатів, викладених в [7, 10], неважко показати, що, коли справджуються умови (1), (4), (5), то $T \in \mathcal{C}(H)$.

Розглянемо задачу про побудову резольвенти оператора (2), (3), зазначивши попередньо, що у випадку, коли $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$, ця задача розв'язана в [7], а у випадку, коли $\dim \mathcal{H} < \infty$ (щоправда, в дещо іншій формі), – у [8]. Для цього введемо такі позначення: $U_1 = \mathcal{U}_1$, $U_2 = P_2 \mathcal{U}_2$, де P_2 – ортопроектор $\mathcal{H} \to \overline{R(\chi_2)}$; $L_1 = L \,|\, \ker U_1$; $\forall \lambda \in \rho(L_1)$ $L_\lambda = (L_1 - \lambda \mathbf{1}_H)^{-1}$, $N_\lambda = (\tilde{\mathcal{U}}_2 L_\lambda^*)^*$. Відомо [7], що $N_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, H)$, $U_2 N_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$R(N_\lambda) = \ker(L - \lambda \mathbf{1}_H), \qquad U_1 N_\lambda = -\mathbf{1}_H . \tag{6}$$

Безпосередньо з (6) випливає, що

$$\forall \lambda \in \rho(L_1) \qquad (\mathbf{1}_H + \lambda L_\lambda) L_F^{-1} = L_\lambda - N_\lambda U_1 L_F^{-1} . \tag{7}$$

Лема 1.

$$\forall \lambda \in \rho(L_1) \qquad (\mathbf{1}_H + \lambda L_\lambda)\chi_2^\bullet = (\chi_2 L_\lambda^*)^* - N_\lambda U_1^{(2)} \chi_2^\bullet . \tag{8}$$

Доведення. На підставі (7) маємо

$$(\mathbf{1}_H + \lambda L_\lambda)\Phi_2^\bullet = (\mathbf{1}_H + \lambda L_\lambda) L_F^{-1}\Phi_2^* = (L_\lambda - N_\lambda U_1 L_F^{-1})\Phi_2^* =$$

$$= (\Phi_2 L_\lambda^*)^* - N_\lambda U_1 \Phi_2^\bullet . \tag{9}$$

Крім цього,

$$(\mathbf{1}_H + \lambda L_\lambda)\Psi_2^\bullet = (\Psi_2 \mathcal{P} L_\lambda^*)^* . \tag{10}$$

Дійсно, $\forall y \in H$, $\forall h \in \mathcal{H}$

$$(y \mid (\Psi_2 \mathcal{P} L_\lambda^*)^* h) = (\Psi_2 \mathcal{P} L_\lambda^* y \mid h)_{\mathcal{H}} =$$

$$= (\mathcal{P} L_\lambda^* y \mid \Psi_2^\bullet h)_e = (L_F \mathcal{P} L_\lambda^* y \mid \Psi_2^\bullet h) = (L L_\lambda^* y \mid \Psi_2^\bullet h) =$$

$$= \big([(L_1^* - \bar\lambda \mathbf{1}_H) + \bar\lambda \mathbf{1}_H] L_\lambda^* y \mid \Psi_2^\bullet h \big) = (y + \bar\lambda L_\lambda^* y \mid \Psi_2^\bullet h) =$$

$$= (y \mid \Psi_2^\bullet h) + (y \mid \lambda L_\lambda \Psi_2^\bullet h) = (y \mid (\mathbf{1}_H + \lambda L_\lambda)\Psi_2^\bullet h) .$$

Беручи до уваги (9), (10), отримуємо

$$(\mathbf{1}_H + \lambda L_\lambda)\chi_2^\bullet = (\mathbf{1}_H + \lambda L_\lambda)\Psi_2^\bullet + (\mathbf{1}_H + \lambda L_\lambda)\Phi_2^\bullet =$$

$$= (\Psi_2 \mathcal{P} L_\lambda^*)^* + (\Phi_2 L_\lambda^*)^* - N_\lambda U_1 \Phi_2^\bullet = (\chi_2 L_\lambda^*)^* - N_\lambda U_1^{(2)} \chi_2^\bullet$$

(нагадаємо, що $U_1^{(2)} \Psi_2^\bullet = 0$). ◊

***Зауваження* 1**. З леми **1** випливає, що

$$\forall b \in \overline{R(\chi_2)} \qquad U_1^{(2)} (\chi_2 L_\lambda^*)^* b = 0 .$$

Покладемо

$$\forall \lambda \in \rho(L_1) \qquad Q(\lambda) = \begin{pmatrix} \chi_1 N_\lambda & \chi_1 (\chi_2 L_\lambda^*)^* \\ U_2 N_\lambda & U_2^{(2)} (\chi_2 L_\lambda^*)^* \end{pmatrix}, \tag{11}$$

де $U_2^{(2)} = P_2 \mathcal{U}_2^{(2)}$. Легко бачити, що $Q(\lambda) \in \mathcal{B}\big(\mathcal{H} \oplus \overline{R(\chi_2)}\big)$.

Твердження 1. *Нехай* $\lambda \in \rho(L_1)$, $f \in H$. *Рівняння* $Ty - \lambda y = f$ *має розв'язок тоді й тільки тоді, коли існують* $a \in \mathcal{H}$, $b \in \overline{R(\chi_2)}$ *такі, що*

$$(\mathbf{1} + Q(\lambda)) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \chi_1 L_\lambda f \\ U_2 L_\lambda f \end{pmatrix} \tag{12}$$

(*тут і далі* $\mathbf{1} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{1}_{\mathcal{H} \oplus \overline{R(\chi_2)}}$). *При цьому*

$$y = L_\lambda f + N_\lambda a + (\chi_2 L_\lambda^*)^* b . \tag{13}$$

Доведення. Нехай $Ty - \lambda y = f$. Це означає, що

$$y + \chi_2^\bullet U_2^{(2)} y \in D(L), \qquad L(y + \chi_2^\bullet U_2^{(2)} y) - \lambda y = f \tag{14}$$

і y задовольняє умови (2). Вкажемо загальний розв'язок рівняння (14). Для цього покладемо

$$U_2^{(2)} y = -\, b \tag{15}$$

і, підставивши (15) у (14), отримаємо

$$L(y - \chi_2^\bullet b) - \lambda y = f, \qquad L(y - \chi_2^\bullet b) - \lambda(y - \chi_2^\bullet b) = f + \lambda \chi_2^\bullet b\,.$$

Зі співвідношення (6) випливає, що існує $\tilde{a} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}$ таке, що

$$y - \chi_2^\bullet b = L_\lambda f + \lambda L_\lambda \chi_2^\bullet b + N_\lambda \tilde{a} \quad \Rightarrow \quad y = L_\lambda f + (\mathbf{1}_H + \lambda L_\lambda)\chi_2^\bullet b + N_\lambda \tilde{a}$$

або

$$y = L_\lambda f + \left(\chi_2 L_\lambda^*\right)^* b - N_\lambda U_1^{(2)} \chi_2^\bullet b + N_\lambda \tilde{a}\,.$$

Прийнявши $a \overset{\text{def}}{=} \tilde{a} - U_1^{(2)} \chi_2^\bullet b$, отримуємо

$$y = L_\lambda f + N_\lambda a + \left(\chi_2 L_\lambda^*\right)^* b\,.$$

Таким чином, розв’язок рівняння (14) має вигляд (13), (15), а, отже, розв’язок рівняння $Ty - \lambda y = f$ має вигляд (13), причому y задовольняє умови (2), (15). Підставивши (13) у (2) і (15), отримаємо

$$U_1 L_\lambda f + U_1 N_\lambda a + U_1^{(2)} \left(\chi_2 L_\lambda^*\right)^* b - \chi_1 L_\lambda f - \chi_1 N_\lambda a - \chi_1 \left(\chi_2 L_\lambda^*\right)^* b = 0\,,$$

$$U_2 L_\lambda f + U_2 N_\lambda a + U_2^{(2)} \left(\chi_2 L_\lambda^*\right)^* b + b = 0\,.$$

Враховуючи зауваження 1, цю систему можна переписати таким чином:

$$-\, a - \chi_1 L_\lambda f - \chi_1 N_\lambda a - \chi_1 \left(\chi_2 L_\lambda^*\right)^* b = 0\,,$$

$$U_2 L_\lambda f + U_2 N_\lambda a + U_2^{(2)} \left(\chi_2 L_\lambda^*\right)^* b + b = 0\,.$$

Оскільки ця система рівносильна рівнянню (12), то необхідність умов твердження доведено. Достатність доводиться аналогічно. ◊

Лема 2.

(***i***) *$y \in \ker(T - \lambda \mathbf{1}_H)$ тоді й тільки тоді, коли існують $a \in \boldsymbol{\mathcal{H}}$, $b \in R(U_2)$ такі, що*

$$(\mathbf{1} + Q(\lambda)) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$y = N_\lambda a + \left(\chi_2 L_\lambda^*\right)^* b\,; \tag{17}$$

(***ii***) *відображення*

$$\ker(\mathbf{1} + Q(\lambda)) \ni (a, b) \to y = N_\lambda a + \left(\chi_2 L_\lambda^*\right)^* b \in \ker(T - \lambda \mathbf{1}_H)$$

є бієкцією, при цьому

$$a = -\, U_1^{(2)} y, \qquad b = -\, U_2^{(2)} y\,,$$

тобто $\dim\ker(\mathbf{1} + Q(\lambda)) = \dim\ker(T - \lambda \mathbf{1}_H)$.

Доведення. Правильність твердження (***i***) випливає безпосередньо з твердження **1**. Звідси ж випливає сюр’єктивність відображення, про яке йде мова у твердженні (***ii***). Покажемо ін’єктивність цього відображення.

Нехай y визначено згідно з (17). Тоді $U_1^{(2)} y = -\, a$ (див. (6), а також твердження **1**), $U_2^{(2)} y = -\, b$, оскільки друге з рівнянь системи (16) має такий вигляд:

$$U_2^{(2)} N_\lambda a + U_2^{(2)} \left(\chi_2 L_\lambda^*\right)^* b + b = 0$$

і, зокрема, якщо $y = 0$, то $a = 0,\ b = 0$. ◊

Наслідок 1. *Якщо* $\lambda \in \rho(L_1)$, *то* $\ker(T - \lambda \mathbf{1}_H) = \{0\}$ *тоді й тільки тоді, коли* $\ker(\mathbf{1} + Q(\lambda)) = \{0\}$.

Доведення. Нехай $\ker(\mathbf{1} + Q(\lambda)) = \{0\}$. Тоді з твердження **1** випливає, що $\ker(T - \lambda \mathbf{1}_H) = \{0\}$.

Навпаки, нехай $\ker(T - \lambda \mathbf{1}_H) = \{0\}, \quad a \in \boldsymbol{\mathcal{H}}, \quad b \in R(U_2)$,

$$(\mathbf{1} + Q(\lambda)) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тобто

$$(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} + \chi_1 N_\lambda) a + \chi_1 (\chi_2 L_\lambda^*)^* b = 0,$$

$$U_2 N_\lambda a + U_2^{(2)} (\chi_2 L_\lambda^*)^* b + b = 0.$$

Покладемо $y = N_\lambda a + (\chi_2 L_\lambda^*)^* b$. З (12) випливає, що $Ty - \lambda y = 0$, а, отже, $y = 0$. Таким чином, $N_\lambda a + (\chi_2 L_\lambda^*)^* b = 0$ або на підставі леми **1** запишемо

$$N_\lambda a + L_\lambda \Phi_2^* b + (\mathbf{1}_H + \lambda L_\lambda) \Psi_2^{\bullet} b = 0. \tag{18}$$

Подіявши на обидві частини рівності (18) спочатку оператором $U_1^{(2)}$, а потім оператором $(L_{\max} - \lambda \mathbf{1}_H)$, де $D(L_{\max}) = D_2$, $\forall y \in D_2 \;\; L_{\max} y = L\big(y - \Psi_2^{\bullet} \Gamma_3^{(2)} y\big)$, переконуємось, що $a = 0, \; b = 0$. ◊

Лема 3. *Нехай* $\lambda \in \rho(L_1)$,

$$R\big((U_1 - \chi_1) \oplus U_2\big) = \boldsymbol{\mathcal{H}} \oplus R(U_2). \tag{19}$$

$R(T - \lambda \mathbf{1}_H) = H$ *тоді й тільки тоді, коли* $R(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} + Q(\lambda)) = \boldsymbol{\mathcal{H}} \oplus R(U_2)$.

Доведення. З (12) випливає, що, коли $R(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} + Q(\lambda)) = \boldsymbol{\mathcal{H}} \oplus R(U_2)$, то $R(T - \lambda \mathbf{1}_H) = H$.

Навпаки, нехай $R(T - \lambda \mathbf{1}_H) = H$. З твердження **1** випливає, що $\forall f \in H$ $\exists a \in \boldsymbol{\mathcal{H}}, \; \exists b \in R(U_2)$ такі, що справджується (12), тобто

$$(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} + \chi_1 N_\lambda) a + \chi_1 (\chi_2 L_\lambda^*)^* b = -\, \chi_1 L_\lambda f,$$

$$U_2 N_\lambda a + (\mathbf{1}_2 + U_2^{(2)} (\chi_2 L_\lambda^*)^* b = -\, U_2 L_\lambda f \tag{20}$$

(тут і дальше $\mathbf{1}_2 = \mathbf{1}_{R(U_2)}$).

Розглянемо тепер систему

$$(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} + \chi_1 N_\lambda) a + \chi_1 (\chi_2 L_\lambda^*)^* b = h_1,$$

$$U_2 N_\lambda a + (\mathbf{1}_2 + U_2^{(2)} (\chi_2 L_\lambda^*)^* b = h_2, \tag{21}$$

де $h_1 \in \boldsymbol{\mathcal{H}}, \; h_2 \in R(U_2)$.

З (19) випливає, що існує $y \in D(L)$ таке, що

$$(U_1 - \chi_1) y = h_1, \qquad U_2 y = -\, h_2. \tag{22}$$

Далі, $D(L) = D(L_1) \dotplus \ker(L - \lambda \mathbf{1}_H)$ (див. [3]), тому існують $f \in H, \; \tilde{a} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}$ такі, що

$$y = L_\lambda f + N_\lambda \tilde{a}. \tag{23}$$

Враховуючи (22), (23), систему (21) перепишемо так:

$$(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} + \chi_1 N_\lambda)(a + \tilde{a}) + \chi_1\big(\chi_2 L_\lambda^*\big)^* b = -\,\chi_1 L_\lambda f\,,$$
$$U_2 N_\lambda (a + \tilde{a}) + (\mathbf{1}_2 + U_2^{(2)}\big(\chi_2 L_\lambda^*\big)^* b = -\,U_2 L_\lambda f\,. \qquad (24)$$

З існування розв'язку системи (20) випливає існування розв'язку системи (24), а, отже, й системи (21) для довільних $h_1 \in \mathcal{H}$, $h_2 \in R(U_2)$. ◊

Теорема. *Нехай* $\lambda \in \rho(L_1)$ *і справджуються умови* (1), (4), (5), (19).

$\lambda \in \rho(T)$ *тоді й тільки тоді, коли* $(\mathbf{1} + Q(\lambda))^{-1} \in \mathcal{B}\big(\mathcal{H} \oplus R(U_2)\big)$. *У цьому випадку*

$$\forall f \in H \qquad (T - \lambda\mathbf{1}_H)^{-1} f = L_\lambda f - \big(N_\lambda, (\chi_2 L_\lambda^*)^*\big)(\mathbf{1} + Q(\lambda))^{-1} \begin{pmatrix} \chi_1 L_\lambda f \\ U_2 L_\lambda f \end{pmatrix}. \qquad (25)$$

Доведення. Правильність першого твердження випливає безпосередньо з лем **2** і **3**, правильність рівності (25) – з твердження **1**. ◊

На завершення зазначимо, що, модифікуючи міркування, які застосовано в цій статті, можна отримати критерії нормальної розв'язності та фредгольмовості оператора $T - \lambda\mathbf{1}_H$, а тоді, коли $T = T^*$, встановити зв'язок між спектральними функціями збуреного та незбуреного операторів.

1. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 543 с.
2. *Брук В. М.* О расширениях симметрических отношений // Мат. заметки. – 1977. – **22**, № 6. – С. 825–834.
3. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1952. – **1.** – С. 187–246.
4. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л., Кочубей А. Н.* Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи для дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1989. – **41,** № 10. – С. 1299–1313.
5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
6. *Лянце В. Э.* О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1972. – Вып. 16. – С. 165–186.
7. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов. – Киев: Наук. думка, 1983. – 212 с.
8. *Мильо О. Я., Сторож О. Г.* Про один клас скінченновимірних збурень додатно визначеного оператора // Доп. НАН України. – 1996. – № 11. – С. 39–44.
9. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. – М.: Наука, 1968. – 576 с.
10. *Піпа Г. М., Сторож О. Г.* Напівгладкі звуження додатно визначеного оператора та їхні власні розширення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 2. – С. 84–89.
11. *Krall A. M.* The development of general differential and differential-boundary systems // Rocky Mountain J. Math. – 1975. – **5,** No. 4. – P. 493–542.

О РЕЗОЛЬВЕНТЕ ВОЗМУЩЕНИЯ, ИЗМЕНЯЮЩЕГО ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННОГО РАСШИРЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОГО ОПЕРАТОРА

Установлена связь между резольвентами некоторого собственного расширения заданного положительно определенного оператора в гильбертовом пространстве (это расширение рассматривается как невозмущенный оператор) и некоторым другим оператором, рассматриваемым как возмущенный. При этом области определения упомянутых операторов отличаются между собой.

ON RESOLVENT OF PERTURBATION CHANGING THE DOMAIN OF DEFINITION OF PROPER EXTENSION OF POSITIVELY DEFINED OPERATOR

The connection between the resolvents of proper extension of the given positively defined operator in the Hilbert space (this extension is interpreted as an unperturbated operator) and some other operator, which is interpreted as the perturbated one, is established. It should be noted that the mentioned operators have distinct domains of definition.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
25.02.04