УДК 517.9

А. К. Прикарпатський[1,2], О. Г. Бігун[3,4]

ПРО ОДНУ КОНСТРУКЦІЮ СКІНЧЕННОВИМІРНИХ РЕДУКЦІЙ НА ФУНКЦІОНАЛЬНИХ МНОГОВИДАХ

Сформульовано основні засади схеми скінченновимірних редукцій у термінах сучасної математичної мови з використанням математичних об'єктів джет-аналізу, встановлено основні властивості цієї схеми та проілюстровано її на прикладі конкретних застосувань.

Оскільки в основі фактично кожного методу скінченновимірних редукцій нелінійних задач із частинними похідними лежить певна математична об'єктно-орієнтована схема, то розкриття її змісту як предмету сучасної математики й математичної фізики викликає природний інтерес. Схема класичного підходу до побудови скінченновимірних редукцій нелінійних еволюційних рівнянь із частинними похідними була запропонована ще у 19 ст. класиками математики й математичної фізики та доповнена в 70-х роках минулого століття такими математиками, як П. Д. Лакс, С. П. Новіков, А. Виноградов, Б. Купершмідт, Н. Ібрагімов, Л. В. Овсяніков, А. Б. Шабат, В. Соколов, В. І. Фущич, П. Олвер, А. Фокас та іншими (див. бібліографію у [8]). У цій статті зупинимося на формулюванні основних засад схеми скінченновимірних редукцій у термінах сучасної математичної мови, використовуючи математичні об'єкти так званого джет-аналізу, встановимо основні властивості цієї схеми та проілюструємо її на прикладі конкретних застосувань.

1. Нехай еволюційну систему рівнянь задано у вигляді

$$\frac{du}{dt} = K[u]\,, \tag{1}$$

де $[u] \in J^{(k)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ є точкою джет-многовиду $J^{(k)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ порядку $|k| \in \mathbb{Z}_+$ [6] та $|k| = \max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} k_i$ з базою $\mathbb{R}^n$, визначеного як топологічна сума всіх можливих орбіт $Or(x_0,[u_0^{(k)}],g_{(k)})$, заданих рівняннями

$$\begin{aligned} \frac{du^{(i)}}{dx_j} &= u^{(i+1_j)}, \qquad && i_j < k_j\,, \\ \frac{du^{(i)}}{dx_j} &= g^j_{(k)}([u^{(k)}]), && i_j = k_j\,, \end{aligned} \tag{2}$$

де $i_m = \overline{0,k_m}$ $\forall m \in \{1,\ldots,n\} : m \ne j$, $j = \overline{1,n}$, $1_j = \{\delta_{ij}\}_{i=\overline{1,n}}$, з початковими умовами

$$[u^{(k)}]\big|_{x=x_0} = [u_0^{(k)}]\,,$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $i = (i_1,\ldots,i_n)$ – мультиіндекс, $[u_0^{(k)}] = (u^{(0,\ldots,0)},\ldots,u^{(k_1,\ldots,k_n)}) \in \otimes^{(m)}\mathbb{R}^p$ та $p = \prod\limits_{j=1}^{n}(k_j+1)$. Орбіти $Or(x_0,[u_0^{(k)}],g_{(k)})$ підсумовуємо як топологічні простори векторних полів, залежних від параметра $x \in \mathbb{R}^n$, за усіма початковими умовами $[u_0^{(k)}]$ і відображеннями $g^j_{(k)} \in C^\infty(\otimes^{(m)}\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^m)$, $j = \overline{1,n}$, вибраними так, щоб орбіта $Or(x_0,[u_0^{(k)}],g_{(k)})$ була компактною і за параметром $x \in \mathbb{R}^n$ – глобальною. Отже, отримуємо скінченновимірний джет-многовид $J^{(k)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, який за своєю побудовою гомеоморфний скінченновимірному функціональному підпростору $M^{pm} \subset M$ многовиду M, щільно та неперервно вкладеного в $C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. Повний джет-многовид $J(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ визначається, як інверсна границя $J(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) = \operatorname{inv}\lim\limits_{(k)\in\mathbb{Z}_+^n} J^{(k)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. Легко бачити, що побудований таким способом повний джет-многовид $J(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ локально дифеоморфний звичайному нескінченновимірному функціональному многовиду $M \subset C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. З огляду на це систему (1) можна розглядати як векторне поле d/dt на нескінченновимірному многовиді M з параметром еволюції $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, на M задані також стандартні векторні поля d/dx_j, $j = \overline{1,n}$, які діють на точки $[u] \in J^{(s)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ джет-многовиду як звичайне диференціювання: $\frac{d}{dx_j} u^{(s)} = u^{(s+1_j)} \in J^{(s+1)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. Очевидно, що всі ці векторні поля апріорі комутують: $\left[\frac{d}{dt}, \frac{d}{dx_j}\right] = 0$, $j = \overline{1,n}$.

2. Метод редукції векторного поля (1) до скінченновимірної задачі на M полягає або (***а***) в існуванні додаткового векторного поля $du/d\tau = \alpha[u]$, $[u] \in J^{(r)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ на функціональному многовиді M як елемента дотичного простору $T(M)$ до M, або (***б***) в існуванні певного елемента $\varphi[u] \in T^*(M)$, $[u] \in J^{(r)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, де $|r| \in \mathbb{Z}_+$ є скінченним, таких, що залишають інваріантними відносно (1) підмноговид

$$M_\alpha := \{u \in M : \alpha[u] = 0\} \tag{3}$$

чи відповідно підмноговид

$$M_\varphi := \{u \in M : \varphi[u] = 0\}. \tag{4}$$

Тоді класичний принцип скінченновимірної редукції полягає у тому, що вихідне векторне поле (1), тобто розглядувану задачу, можна інваріантно та при цьому «точно» зредукувати до відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь на підмноговид M_α, заданий (3), у випадку (***а***), та M_φ, заданий (4), у випадку (***б***). Легко бачити, що многовиди (3) і (4) є скінченновимірними. Таким чином, обмежуємо функціональний клас можливих розв'язків (1), проте не втрачаємо їх точності з огляду на інваріантність відповідних підмноговидів M_α та M_φ.

Результатом такої редукції є система звичайних диференціальних рівнянь на M_α чи на M_φ, яка тепер стає основним об'єктом аналізу та джерелом знаходження точних, хоча й часткових, розв'язків вихідного рівняння (1). Таким чином, задача скінченновимірної редукції рівняння (1) зводиться до аналізу умов, що ґарантують існування підмноговидів M_α та M_φ, і способів їх побудови.

Відповідь на ці питання дали С. Лі, Е. Ньотер і Е. Картан: треба знайти відповідні розв'язки рівнянь Ньотер $L_K\alpha = 0$ або $L_K\varphi = 0$, де L_K − похідна Лі [2], вздовж векторного поля (1) як гладкого відображення $K : M \to T(M)$. Ці рівняння мають відповідно наступний явний вигляд:

$$\frac{d\alpha}{dt} - K'[u]\alpha = 0\,, \tag{5}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} - K'^{*}[u]\varphi = 0\,, \tag{6}$$

де K' − похідна Фреше, K'^{*} − її формальне спряження відносно стандартної білінійної форми на $T^{*}(M) \times T(M)$ [1].

Оскільки ці рівняння лінійні відносно невідомих елементів, то з умови $\alpha[u] = 0$ або $\varphi[u] = 0$ при $t = 0$ випливає, що $\alpha[u] = 0$ або відповідно $\varphi[u] = 0$ для усіх $t \in \mathbb{R}$, а це й означає інваріантність підмноговидів M_α чи M_φ відповідно.

3. Є різні способи пошуків симетрій $\alpha[u] \in T(M)$ чи $\varphi[u] \in T^{*}(M)$. Зокрема, П. Д. Лакс [7] і С. П. Новіков [5] (див. також [4]) запропонували таку просту схему пошуку інваріантного підмноговиду M_φ: знайти який-небудь функціональний інваріант $\gamma : M \to \mathbb{R}$ на M для векторного поля (1), тобто такий вираз

$$\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \gamma[u]\, dx, \qquad [u] \in J^{(r)}(\ ^n;\ \mathbb{R}^m)], \tag{7}$$

що задовольняє рівняння $\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{u_t = K[u]} = 0$. Тоді величина $\operatorname{grad}\gamma[u] =: \varphi[u] \in T^{*}(M)$ задовольняє (з огляду на лему П. Д. Лакса [7]) тотожно умову Картана − Ньотер $\frac{\partial\varphi}{dt} + L_K\varphi = 0$. Цим методом П. Д. Лакс, С. П. Новіков та інші описали всі так звані багатосолітонні та скінченнозонні розв'язки нелінійних рівнянь типу Кортевега − де Фріза ще в 70-х роках минулого століття.

З іншого боку, у працях П. Олвера, А. Фокаса, Н. Ібрагімова, А. Б. Шабата, А. Михайлова та інших у 80-х роках минулого століття розвинуто аналогічний підхід, започаткований ще Беклундом у 19-му столітті, який базується на явному конструюванні інваріантних підмноговидів (3) на основі симетрій Лі − Беклунда, які, зокрема, знаходили за допомогою техніки символів псевдодиференціальних операторів і відповідного узагальнення методу рядів Фур'є.

4. Аналогічний до попереднього аналіз можна провести і для випадку векторного поля (1), заданого на джет-многовиді $J(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. А саме, маємо природним чином задані векторні поля $d/dt,\ d/dx_j,\ j = \overline{1,n}$, на $J(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, де за означенням $du^{(j)}/dx_s := u^{(j+1_s)}$, $\quad du^{(j+1_s)}/dt = d/dx_s K_j[u]$ для всіх $j \in \mathbb{Z}_+^n$ та $s = \overline{1,n}$. Розглянемо тепер додатково деяку умову скінченновимірної редукції на скінченновимірний джет-підмноговид $J_\xi(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, де за означенням

$$J_\xi := \left\{ [u] \in J(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) : \xi^{s}_{(r+1_s)}[u^{(r)}] = u^{(r+1_s)},\ s = \overline{1,n} \right\}. \tag{8}$$

Це означає, що векторні поля, задані на $M \simeq J(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, треба інваріантно редукувати на джет-підмноговид $J_\xi \subset J(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. А саме, маємо природним чином задані векторні поля d/dt і $d/dx_j,\ j = \overline{1,n}$, означені на повному джет-многовиді $J(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, які можна зредукувати на скінченновимірний джет-підмноговид $J^{(r)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \simeq J_\xi$ таким чином:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du^{(j)}}{dx_s} &= u^{(j+1_s)}, \qquad j_s < r_s, \\ \frac{du^{(j)}}{dx_s} &= \xi^s_{(r+1_s)}[u^{(r)}], \quad j_s = r_s, \end{aligned}\right\} = D_s^{(\xi)}, \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{du^{(0)}}{dt} &= K_0^{(\xi)}[u^{(r)}], \\ \frac{du^{(j+1_s)}}{dt} &= \frac{d}{dx_s} K_j^{(\xi)}[u^{(r)}], \end{aligned}\right\} = D_t^{(\xi)}, \tag{10}$$

де $K_j^{(\xi)}[u^{(r)}]$ визначено рекурсивно співвідношенням

$$K_{j+1_s}^{(\xi)}[u^{(r)}] = \frac{d}{dx_s} K_j^{(\xi)}[u^{(r)}]\Big|_{J_\xi}, \qquad K_0^{(\xi)}[u^{(r)}] = K[u]\Big|_{J_\xi}.$$

Оскільки редукція на джет-підмноговид $J_\xi \subset J(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ має бути інваріантною, то отримані векторні поля $D_s^{(\xi)}$ та $D_t^{(\xi)}$ на $J^{(r)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ повинні комутувати: $[D_s^{(\xi)},\ D_t^{(\xi)}] = 0$, що означає звичайну незалежність на $J^{(r)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ змінних $x_s \in \mathbb{R}$, $s = \overline{1,n}$, та змінної еволюції $t \in \mathbb{R}$. При цьому, очевидно, повинні також комутувати між собою векторні поля $D_s^{(\xi)}$, $s = \overline{1,n}$, тобто $[D_s^{(\xi)},\ D_j^{(\xi)}] = 0$ для всіх $s, j = \overline{1,n}$. Всі ці умови є необхідними для того, щоб існувала скінченновимірна редукція на $J^{(r)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ векторного поля (1), розглянутого на джет-многовиді $J(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, яка задана джет-співвідношенням (8), і на яке при виконанні всіх згаданих умов треба накласти відповідні аналітичні обмеження та їх розв'язати.

Зауважимо, що в розглядуваному випадку, на жаль, немає простого апріорного співвідношення на породжуючий вираз у (8), яке би справджувалося для цього виразу стосовно вихідного векторного поля (1) і давало змогу знайти інваріантний підмноговид (8) у явній або наближеній формі.

5. У найпростішому випадку, $n = 1$, $m = 2$, співвідношення (8) можна подати, наприклад, у такому вигляді:

$$\left.\begin{aligned} u_1^{(r_1+1)} &= \xi_1[x,t;u], \\ u_2^{(r_2+1)} &= \xi_2[x,t;u], \end{aligned}\right\} \Rightarrow J_\xi \subset J(\mathbb{R};\mathbb{R}^2), \tag{11}$$

де $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_+$ фіксовані. Умова комутативності $[D_s^{(\xi)},\ D_t^{(\xi)}] = 0$ буде певним набором співвідношень-обмежень, що реалізують умови їх сумісності.

Тут цей момент можна додатково проаналізувати з точки зору попереднього аналізу класичної схеми редукції векторного поля (1) на інваріантний підмноговид $M_\alpha \subset M$. Нехай існує деякий елемент $\alpha[u] \in T(M)$ такий, що задовольняє умову інваріантності Картана – Ньотер $\dfrac{\partial\alpha}{\partial t} + L_K\alpha = 0$. Цьому елементу на функціональному многовиді M відповідає деяке векторне поле $d/d\tau$ на повному джет-многовиді $J(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, для якого рекурентним чином знаходимо

$$\left.\begin{aligned} \frac{du^{(j+1_s)}}{d\tau} &= \frac{d}{dx_s}\alpha_j[u] := \alpha_{(j+1_s)}[u], \\ \frac{du^{(j)}}{d\tau} &= \alpha_j[u], \qquad j \in \mathbb{Z}^n, \end{aligned}\right\} =: D_\tau. \tag{12}$$

Оскільки векторні поля d/dt та $d/d\tau$ на M комутують, тобто є незалежними, то вони, очевидно, повинні комутувати і на локально дифеоморфному до нього джет-многовиді $J(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, тобто $[D_t,\ D_\tau]=0$. Якщо одночасно сконструювати векторні поля $D_\tau^{(\xi)}$, $D_t^{(\xi)}$, що відповідають умові інваріантності $\alpha[u]=0$ для підмноговиду $M_\alpha\subset M$, то вони, очевидно, будуть апріорі комутувати між собою та з відповідними векторними полями $D_s^{(\xi)}, s=\overline{1,n}$, на результуючому джет-многовиді $J^{(r)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, побудованому на основі локально дифеоморфного йому підмноговиду $M_\alpha\subset M$. Отже, логічним є підхід, що ґрунтується на прямій побудові функціональних розв'язків вихідних рівнянь Картана – Ньотер $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+L_K\varphi=0$ або $\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}+L_K\alpha=0$, де $\alpha\in T(M)$, $\varphi\in T^*(M)$, і де, наприклад, у випадку $n=1$, $m=2$ можна шукати їх розв'язки у такій формі:

$$\alpha[u]=\left(\alpha_1[x,t;u],\alpha_2[x,t;u]\right)^\top\in T(M),\qquad [u]\in J^{(r)}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2),\tag{13}$$

або

$$\varphi[u]=\left(\varphi_1[x,t;u],\varphi_2[x,t;u]\right)^\top\in T^*(M),\qquad [u]\in J^{(r)}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2).\tag{14}$$

Очевидно, що наведені вирази (13), (14) для елементів $\alpha[u]\in T(M)$ і $\varphi[u]\in T^*(M)$ можуть служити для конструктивного алгоритму їх знаходження у явному вигляді.

Розвинутими є також «прямі» методи пошуку можливих класів розв'язків визначальних рівнянь Картана – Ньотер, що ґрунтуються на модифікованому асимптотичному методі малого параметра та асоційованому з ним методі перетворень Фур'є [3, 8].

6. Щоб проілюструвати викладену вище схему скінченновимірних редукцій нелінійних еволюційних рівнянь, розглянемо як приклад модифіковане нелінійне рівняння Кортевега – де Фріза

$$u_t=K[u]=-6u^2u_x-u_{xxx},\tag{15}$$

де $u(t)\in M\subset C_\ell^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ є ℓ-періодичною функцією за змінною $x\in\mathbb{R}$, параметр еволюції $t\in\mathbb{R}$.

Оскільки оператор $K'^*=\partial^3+6u^2\partial$, то рівняння (6) у цьому випадку набуває вигляду

$$\varphi_t=-\varphi_{xxx}-6u^2\varphi_x,\tag{16}$$

де $\varphi\in T^*(M)\otimes\mathbb{C}$. Рівняння (16) допускає при $|\lambda|\to\infty$ асимптотичний розв'язок

$$\varphi(x,t;\lambda)=\exp\left[\lambda x-\lambda^3t+\int_{x_0}^{x}\sigma(x,t;\lambda)\,dx\right],\tag{17}$$

де $\lambda\in\mathbb{C}^1$, $x\in\mathbb{R}^1$. При $|\lambda|\to\infty$ для локального функціонала існує таке асимптотичне розвинення:

$$\sigma(x,t;\lambda)\simeq\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sigma_j[u]\lambda^{-j}.\tag{18}$$

Із формул (16), (17) та (18) можна отримати рекурентні співвідношення для локальних функціоналів $\sigma_j[u]$, $j\in\mathbb{Z}_+$, які дозволяють визначити всю їх ієрархію, перші елементи якої мають такий явний вигляд:

$$\sigma_0=0,\qquad\sigma_1=-2u^2,\qquad\sigma_2=4uu_x,\qquad\sigma_3=-2u_x^2-4uu_x-2u^4,$$

$$\sigma_4=4uu_x+4u_xu_{xx}+16u^3u_x.\tag{19}$$

Локальним функціоналам $\sigma_j[u],\ j \in \mathbb{Z}_+$, відповідають закони збереження $\gamma_i = \int\limits_{x_0}^{x_0+\ell} \sigma_j[u]\,dx,\ j \in \mathbb{Z}_+$. Як уже зазначалося у **п. 3**, якщо $\int\limits_{x_0}^{x_0+\ell} \gamma[u]\,dx = \gamma :$ $: M \to \mathbb{R}$ є функціональним інваріантом для векторного поля (15) на M, то величина $\operatorname{grad}\gamma[u] =: \psi[u] \in T^*(M)$ тотожно задовольняє умову Картана – Ньотер $\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + L_K\psi = 0$. Нагадаємо, що оператор $\operatorname{grad} : D(M) \to T^*(M)$, визначений на просторі $D(M)$ гладких за Фреше локальних функціоналів на M, діє за правилом $\operatorname{grad} F = \dfrac{\delta F}{\delta u}$, де $F \in D(M)$, а $\dfrac{\delta(\cdot)}{\delta u}$ є варіаційною похідною Ейлера, тобто

$$\frac{\delta(\cdot)}{\delta u} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{d}{dx}\right)^k \frac{\delta(\cdot)}{\delta u^{(k)}}. \tag{20}$$

За формулою (20) можемо тепер обчислити градієнти функціоналів, заданих виразами (19):

$$\operatorname{grad}\gamma_0 = \operatorname{grad}\gamma_2 = \operatorname{grad}\gamma_4 = 0,$$

$$\operatorname{grad}\gamma_1 = -\,4u, \qquad \operatorname{grad}\gamma_3 = 4u_{xx} - 8u^3.$$

Щоб побудувати інваріантний скінченновимірний підмноговид, заданий (4), відмінний від множини з одним лише нульовим елементом, виберемо $\psi =$ $= \operatorname{grad}\gamma_3 + c\operatorname{grad}\gamma_1 = 4u_{xx} - 8u^3 - 4cu$, де $c \in \mathbb{R}$ – довільна константа. Тоді $M_\psi = \{[u] \in J(\mathbb{R};\mathbb{R}) : u^{(2)} = 2(u^{(0)})^3 + cu^{(0)}\}$. Таким чином, знайдено породжуючий вираз для (8): $\xi_{(2)}[u^{(1)}] = \xi_{(2)}(u^{(0)}, u^{(1)}) = 2(u^{(0)})^3 + cu^{(0)}$. Тепер за схемою (9), (10) можемо зредукувати векторне поле (15) на двовимірний підмноговид M_ψ:

$$\begin{aligned} \frac{du^{(0)}}{dx} &= u^{(1)}, \\ \frac{du^{(1)}}{dx} &= 2(u^{(0)})^3 + cu^{(0)}, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \frac{du^{(0)}}{dt} &= -\,12(u^{(0)})^2 u^{(1)} - cu^{(1)}, \\ \frac{du^{(1)}}{dt} &= -\,24u^{(0)}(u^{(1)})^2 - 24(u^{(0)})^5 - 14c\,(u^{(0)})^3 - c^2 u^{(0)}. \end{aligned} \tag{23}$$

На рис. 1 наведено фазові криві векторного поля (22) для $c = -1$ (рис. 1*а*) і для $c = 0$ (рис. 1*б*). Система (22) за умови $c < 0$ має три точки рівноваги: (0, 0), $(-\sqrt{-c/2},\ 0)$, $(\sqrt{-c/2},\ 0)$, які є центром і сідлами відповідно (рис. 1*а*). При $c \ge 0$ система (22) має лише одну точку рівноваги $(0,0)$, яка є сідлом (див. рис. 1*б*). Зрозуміло, що вибравши початкові умови для системи (22) при $c < 0$ у вигляді $u^{(0)}\big|_{x=0} = \beta_1$ і $u^{(1)}\big|_{x=0} = \beta_2$ так, щоб точка (β_1, β_2) містилась усередині граничного циклу цієї системи, отримаємо періодичний частковий розв'язок вихідної задачі (15), еволюцію якого в часі задає система (23). Отже, описана вище схема скінченновимірних редукцій нелінійних динамічних систем дає можливість знаходження часткових розв'язків задачі (1) із наперед заданими властивостями (наприклад, періодичності).

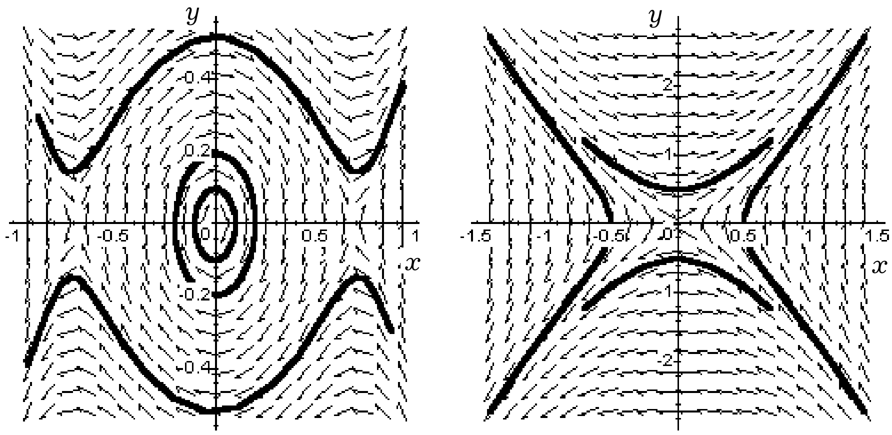

Рис. 1

Точний частковий розв'язок задачі (15) отримуємо шляхом накладання векторних полів d/dx (22) та d/dt (23). Для цього у кожній точці $x = x_0$ інтегруємо векторне поле d/dt (23) з початковими умовами $u^{(0)}\big|_{t=0} = u^{(0)}(x_0)$ та $u^{(1)}\big|_{t=0} = u^{(1)}(x_0)$, де $u^{(0)}(x_0)$, $u^{(1)}(x_0)$ – значення розв'язку системи (22) у точці $x = x_0$. На рис. 2 зображено часткові розв'язки задачі (15), отримані шляхом накладання векторних полів d/dx (22) і d/dt (23), причому для випадку $c = -1$ (рис. 2*а*) початкові умови для системи (22) вибрано так, щоб забезпечити періодичність розв'язку: $u^{(0)}\big|_{x=0} = 0$, $u^{(1)}\big|_{x=0} = 0.1$. У випадку $c = 0$ (рис. 2*б*) вибрано $u^{(0)}\big|_{x=0} = 0.02$, $u^{(1)}\big|_{x=0} = 0$. Системи (22) та (23) проінтегровано чисельно методом Рунге – Кутта 4-го порядку з кроком $h = 0.01$ на проміжках $x \in [0, 10]$ та $t \in [0, 10]$ відповідно.

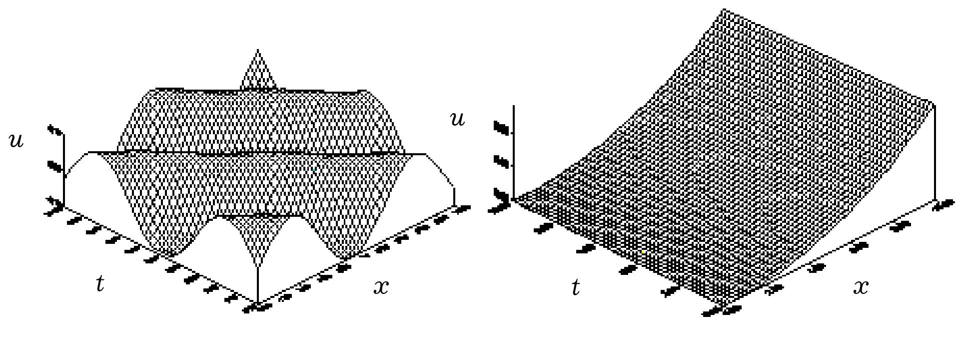

Рис. 2

Таким чином, розв'язано модифіковане рівняння Кортевега – де Фріза (16) з початковими умовами $u\big|_{t=0} = u^{(0)}(x)$ і $u_x\big|_{t=0} = u^{(1)}(x)$, де $u^{(0)}(x)$, $u^{(1)}(x)$ – відповідні розв'язки системи (22).

Як висновок спеціально проведеного вище аналізу математичної структури класичного підходу до опису скінченновимірних редукцій нелінійних еволюційних рівнянь із частинними похідними можна без застережень стверджувати його виняткову ефективність для багатьох застосувань.

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1979. – 431 с.
2. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. – М.: Наука, 1979. – 759 с.
3. *Купершмидт Б.* Уравнения типа супер-КП. – Москва, 2001.
4. *Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. – Киев: Наук. думка, 1987. – 296 с.
5. *Новиков С. П.* Периодическая задача для уравнения Кортевега – де Фриза // Функц. анализ и его прил. – 1974. – **8**, № 3. – С. 54–66.
6. *Прикарпатський А. К., Філь Б. М.* Категорія топологічних джет-многовидів та деякі застосування в теорії нескінченновимірних динамічних систем // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 9. – С. 1242–1256.
7. *Lax P. D.* Periodic solutions of the Korteweg – de Vries equation // Communs Pure and Appl. Math. – 1975. – **28**, No. 2. – P. 141–188.
8. *Prykarpatsky A. K., Mykytiuk I. V.* Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. – 588 p.

ОБ ОДНОЙ КОНСТРУКЦИИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ РЕДУКЦИЙ НА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Сформулированы основы схемы конечномерных редукций в терминологии современного математического языка с использованием объектов джет-анализа, установлены основные свойства схемы, проиллюстрированные на примере.

CONSTRUCTION OF FINITE-DIMENSIONAL REDUCTIONS ON FUNCTIONAL MANIFOLDS

In this paper we state the basics of the finite reductions scheme in terms of modern mathematical language using the objects of jet analysis. We list the main properties of the scheme and illustrate it on the concrete applications.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Акад. гірництва та металургії, Краків, Польща,
[3] Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів,
[4] Ун-т Міссурі-Коламбія, Міссурі, США

Одержано
12.06.03