УДК 517.95

О. В. Махней*

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ З МІРАМИ

Запропоновано схему розв'язування змішаної задачі для диференціального рівняння параболічного типу з коефіцієнтами, які є узагальненими похідними від функцій обмеженої варіації. Розв'язок цієї задачі шукається методом редукції, що дає змогу звести розв'язання поставленої задачі до розв'язування двох задач: ***1****) крайової квазістаціонарної задачі з вихідними крайовими умовами і* ***2****) змішаної задачі з нульовими крайовими умовами. Перша з цих задач розв'язується за допомогою введення квазіпохідної. Для розв'язування другої задачі застосовується метод Фур'є і розвинення за власними функціями деякої крайової задачі для квазідиференціального рівняння другого порядку. Отримані результати можна використовувати, зокрема, для дослідження процесів теплопередачі в багатошаровій плиті, порожнистому циліндрі чи сфері.*

Ключові слова: *крайова задача, квазіпохідна, міра, власні функції, метод Фур'є.*

Вступ. Крайові задачі для диференціальних рівнянь теплопровідності з гладкими коефіцієнтами вивчено в літературі достатньо добре (див., наприклад, [5, гл. 3]). Однак під час моделювання процесів передачі тепла часто виникають крайові задачі з кусково-неперервними коефіцієнтами або коефіцієнтами, які є узагальненими похідними від розривних функцій. Такі задачі вже почали вивчати в роботах [2, 3, 8−11].

Ця робота присвячена розв'язуванню змішаної задачі для диференціального рівняння параболічного типу з коефіцієнтами-мірами − узагальненими похідними від функцій обмеженої варіації. Для розв'язування задачі використовується метод редукції [5, гл. 3, § 2], який дає змогу звести розв'язання цієї задачі до розв'язування двох задач: ***1***) крайової квазістаціонарної задачі з вихідними крайовими умовами і ***2***) змішаної задачі з нульовими крайовими умовами для деякого неоднорідного рівняння. Для розв'язування другої з цих задач застосовується метод Фур'є і розвинення за власними функціями деякої крайової задачі для квазідиференціального рівняння другого порядку. У цій роботі розглядається більш загальна постановка задачі, ніж у [9, 10], доведено невід'ємність власних значень, що є необхідною умовою коректності опису процесу теплопередачі.

Квазідиференціальними називають рівняння, які містять доданки вигляду $(p(x)y^{(m)})^{(n)}$ [7]. При недостатній гладкості коефіцієнта $p(x)$ такі рівняння неможливо звести n-кратним диференціюванням до звичайних диференціальних рівнянь. Для їхнього дослідження використовується метод введення квазіпохідних [7]. Квазіпохідні − це компоненти вектора, за допомогою якого квазідиференціальне рівняння зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку.

1. Постановка задачі. Розглянемо змішану задачу для диференціального рівняння параболічного типу: знайти розв'язок $T(x,\tau)$ рівняння

$$a(x)\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{x^s}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^s\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right) - g(x)T + f(x), \qquad s \in \mathbb{R}_+\,, \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$p_1 T(\alpha,\tau) + p_2\lambda(\alpha)T'(\alpha,\tau) = \psi_1(\tau)\,,$$

$$q_1 T(\beta,\tau) + q_2\lambda(\beta)T'(\beta,\tau) = \psi_2(\tau) \tag{2}$$

* makhney1@yahoo.com

за початкової умови

$$T(x,0) = \varphi(x). \tag{3}$$

Тут $a(x) = b'(x)$, $g(x) = h'(x)$, $f(x) = r'(x)$, де $b(x)$, $h(x)$, $r(x)$ – неперервні справа дійсні функції обмеженої варіації на проміжку $[\alpha,\beta]$, $b(x)$, $h(x)$ – неспадні функції, $\lambda(x) > 0$, $\lambda^{-1}(x)$ – обмежена і вимірна функція на проміжку $[\alpha,\beta]$, функція $\varphi(x)$ – неперервна на відрізку $[\alpha,\beta]$, функції $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$ – неперервно диференційовні для $\tau \ge 0$, p_1, p_2, q_1, q_2, s – дійсні числа такі, що $p_1p_2 \le 0$, $q_1q_2 \ge 0$, $p_1^2 + p_2^2 > 0$, $q_1^2 + q_2^2 > 0$, $\alpha > 0$ при $s \ne 0$ і $\alpha \ge 0$ при $s = 0$, $\beta > 0$. Штрихами у формулах $a(x) = b'(x)$, $g(x) = h'(x)$, $f(x) = r'(x)$ позначено узагальнене диференціювання, а тому $a(x)$, $g(x)$, $f(x)$ – міри, тобто узагальнені функції нульового порядку над простором неперервних фінітних функцій [6, гл. 4, § 1]. Якщо $s = 0$, $g(x) \equiv 0$, то задача (1)–(3) описує процес теплопередачі через неоднорідну, зокрема багатошарову, плиту. Якщо $s = 1$, $g(x) \equiv 0$, маємо процес теплопередачі через стінки багатошарового порожнистого циліндра. Якщо $s = 2$, $g(x) \equiv 0$, то мова йде про процес теплопередачі через багатошарову сферу. Тут $\lambda(x)$ – коефіцієнт теплопровідності, $a(x)$ – добуток питомої теплоємності на густину, $f(x)$ – можливі внутрішні джерела тепла, а температура T залежить від координати x і часу τ. Крайові умови (2) вказують на наявність конвективного теплообміну з навколишнім середовищем.

Розв'язок задачі (1)–(3) шукатимемо методом редукції у вигляді суми двох функцій:

$$T(x,\tau) = u(x,\tau) + v(x,\tau). \tag{4}$$

Якщо будь-яку з функцій u чи v вибрати тим чи іншим спеціальним способом, тоді інша функція визначатиметься однозначно.

2. Крайова квазістаціонарна задача для $u(x,\tau)$. Приймемо, що у задачі (1)–(3) змінна τ є параметром. Визначимо $u(x,\tau)$ як розв'язок крайової задачі

$$\frac{1}{x^s}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^s\lambda(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - g(x)u + f(x) = 0, \tag{5}$$

$$p_1u(\alpha,\tau) + p_2\lambda(\alpha)u'(\alpha,\tau) = \psi_1(\tau),$$

$$q_1u(\beta,\tau) + q_2\lambda(\beta)u'(\beta,\tau) = \psi_2(\tau). \tag{6}$$

Введемо квазіпохідну $u_x^{[1]}(x,\tau) \overset{\text{def}}{=} x^s\lambda(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}$, тоді $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{u^{[1]}}{x^s\lambda(x)}$. З урахуванням означення квазіпохідної крайові умови (6) запишемо у вигляді

$$p_1\alpha^s u(\alpha,\tau) + p_2u^{[1]}(\alpha,\tau) = \alpha^s\psi_1(\tau),$$

$$q_1\beta^s u(\beta,\tau) + q_2u^{[1]}(\beta,\tau) = \beta^s\psi_2(\tau). \tag{7}$$

За допомогою вектора $\bar{u} = \left(u, u^{[1]}\right)^\top$ рівняння (5) зводимо до системи

$$\begin{pmatrix} u \\ u^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{x^s\lambda(x)} \\ x^s g(x) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ u^{[1]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x^s f(x) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Крайові умови (7) теж подамо у векторній формі:

$$P \cdot \bar{u}(\alpha,\tau) + Q \cdot \bar{u}(\beta,\tau) = \bar{\Gamma}(\tau)\,, \tag{9}$$

де

$$P = \begin{pmatrix} p_1\alpha^s & p_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_1\beta^s & q_2 \end{pmatrix}, \qquad \bar{\Gamma}(\tau) = \begin{pmatrix} \alpha^s\psi_1(\tau) \\ \beta^s\psi_2(\tau) \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що відома матриця Коші $B(x,\gamma)$ однорідної системи

$$\begin{pmatrix} u \\ u^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{x^s\lambda(x)} \\ x^s g(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u^{[1]} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Її вдається побудувати, наприклад, коли коефіцієнти $\lambda(x)$ і $g(x)$ є кусковосталими [4, § 22–23]. У загальному випадку для побудови матриці Коші потрібно знати фундаментальну систему розв'язків системи (10) (див. [4, § 13–14]). Відомо [4, § 15], що розв'язок $u(x,\tau)$ довільної початкової задачі для рівняння (5) з початковими умовами

$$u(x_0,\tau) = u_0, \qquad u^{[1]}(x_0,\tau) = u_1, \qquad x_0 \in [\alpha,\beta]\,,$$

існує і є єдиним у класі абсолютно неперервних функцій, а його квазіпохідна $u^{[1]}$ має обмежену варіацію за змінною x на проміжку $[\alpha,\beta]$.

Знаходимо

$$\bar{u}(x,\tau) = B(x,\alpha)\bar{u}_0 + \int_\alpha^x B(x,\gamma)\gamma^s\, d\bar{R}(\gamma)\,,$$

де

$$\bar{u}_0 = \bar{u}(\alpha,\tau), \qquad \bar{R}(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 \\ -r(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Визначимо $\bar{u}_0$. З крайових умов (9) маємо

$$P \cdot \bar{u}_0 + Q \cdot \left(B(\beta,\alpha)\bar{u}_0 + \int_\alpha^\beta B(\beta,\gamma)\gamma^s\, d\bar{R}(\gamma) \right) = \bar{\Gamma}(\tau)\,,$$

звідки

$$\bar{u}_0 = \left(P + Q \cdot B(\beta,\alpha)\right)^{-1} \cdot \left(\bar{\Gamma}(\tau) - Q \cdot \int_\alpha^\beta B(\beta,\gamma)\gamma^s\, d\bar{R}(\gamma) \right).$$

Отже,

$$\bar{u}(x,\tau) = B(x,\alpha)\left(P + Q \cdot B(\beta,\alpha)\right)^{-1} \cdot \left(\bar{\Gamma}(\tau) - Q \cdot \int_\alpha^\beta B(\beta,\gamma)\gamma^s\, d\bar{R}(\gamma) \right) +$$
$$+ \int_\alpha^x B(x,\gamma)\gamma^s\, d\bar{R}(\gamma)\,. \tag{11}$$

3. Змішана задача для $v(x,\tau)$. Підставивши подання (4) у рівняння (1), з огляду на (5) отримаємо рівняння

$$a(x)\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{x^s}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^s\lambda(x)\frac{\partial v}{\partial x} \right) - g(x)v - a(x)\frac{\partial u}{\partial \tau}. \tag{12}$$

Згідно з (11) похідна $\dfrac{\partial u}{\partial \tau}$ є неперервною функцією від змінної x на відрізку $[\alpha,\beta]$, а тому для останнього доданка у рівнянні (12) не виникає проблеми множення узагальненої функції на розривну.

Крайові умови для функції v запишемо, підставивши (4) в умови (2):

$$p_1 u(\alpha,\tau) + p_2\lambda(\alpha)u'(\alpha,\tau) + p_1 v(\alpha,\tau) + p_2\lambda(\alpha)v'(\alpha,\tau) = \psi_1(\tau),$$

$$q_1 u(\beta,\tau) + q_2\lambda(\beta)u'(\beta,\tau) + q_1 v(\beta,\tau) + q_2\lambda(\beta)v'(\beta,\tau) = \psi_2(\tau),$$

звідки, зважаючи на крайові умови (6), отримуємо

$$p_1\alpha^s v(\alpha,\tau) + p_2 v^{[1]}(\alpha,\tau) = 0,$$

$$q_1\beta^s v(\beta,\tau) + q_2 v^{[1]}(\beta,\tau) = 0. \qquad (13)$$

Тут $v^{[1]}(x,\tau) = x^s\lambda(x)\dfrac{\partial v}{\partial x}$ – квазіпохідна від функції v.

Початкову умову для функції v отримуємо аналогічно:

$$v(x,0) = \varphi(x) - u(x,0) \overset{\text{def}}{=} \tilde{\varphi}(x). \qquad (14)$$

4. Метод Фур'є і задача на власні значення. Нетривіальні розв'язки однорідного диференціального рівняння

$$a(x)\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{x^s}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^s\lambda(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right) - g(x)v$$

з крайовими умовами (13) шукаємо у вигляді

$$v(x,\tau) = e^{-\omega\tau}X(x), \qquad (15)$$

де ω – параметр, а $X(x)$ – деяка функція. Тоді

$$-\omega a(x)e^{-\omega\tau}X(x) = \frac{1}{x^s}\left(x^s\lambda(x)X'(x)\right)' e^{-\omega\tau} - g(x)X(x)e^{-\omega\tau},$$

звідки отримуємо квазідиференціальне рівняння

$$\left(x^s\lambda(x)X'(x)\right)' - x^s g(x)X(x) + \omega x^s a(x)X(x) = 0. \qquad (16)$$

Підставивши подання (15) у крайові умови (13), отримаємо

$$p_1\alpha^s X(\alpha) + p_2 X^{[1]}(\alpha) = 0,$$

$$q_1\beta^s X(\beta) + q_2 X^{[1]}(\beta) = 0. \qquad (17)$$

Позначимо через ω_k власні значення крайової задачі (16), (17), а через $X_k(\omega_k, x)$ – відповідні їм власні функції, $k = 1, 2, \ldots, \infty$.

Відомо [1], що всі власні значення ω_k крайової задачі (16), (17) є дійсними, їх є зліченна кількість, а їхня множина не має скінченної граничної точки. Власні функції $X_k(\omega_k, x)$, які відповідають різним власним значенням, є ортогональними у тому розумінні, що

$$\int_\alpha^\beta X_m(\omega_m, x)X_n(\omega_n, x)\,db(x) = 0, \qquad \omega_m \neq \omega_n.$$

Доведемо тепер, що всі власні значення ω_k крайової задачі (16), (17) є невід'ємними при накладених у **п. 1** обмеженнях на коефіцієнти.

Для цього обидві частини рівняння

$$\left(x^s\lambda(x)X_k'(x)\right)' - x^s g(x)X_k(x) + \omega_k x^s a(x)X_k(x) = 0$$

помножимо на $X_k(x)$:

$$\left(x^s\lambda(x)X_k'(x)\right)' X_k(x) - x^s g(x)X_k^2(x) + \omega_k x^s a(x)X_k^2(x) = 0.$$

Тоді, враховуючи, що $X_k^{[1]}(x) = x^s\lambda(x)X_k'(x)$, після перетворень отримуємо

$$\omega_k x^s a(x)X_k^2(x) = -\left(X_k^{[1]}(x)X_k(x)\right)' + X_k^{[1]}(x)X_k'(x) + x^s g(x)X_k^2(x).$$

Зінтегрувавши обидві частини отриманого співвідношення в межах від α до β, маємо

$$\omega_k \int_\alpha^\beta x^s X_k^2(x)db(x) = -X_k^{[1]}(\beta)X_k(\beta) + X_k^{[1]}(\alpha)X_k(\alpha) +$$

$$+\int_\alpha^\beta x^s\lambda(x)\left(X_k'(x)\right)^2 dx + \int_\alpha^\beta x^s X_k^2(x)\,dh(x). \tag{18}$$

Оскільки функції $X_k(x)$ є абсолютно неперервними (див. [4, § 10]), а їхні квазіпохідні $X_k^{[1]}(x)$ мають обмежену варіацію на проміжку $[\alpha,\beta]$, то всі наведені перетворення мають сенс.

Усі інтеграли у формулі (18) є невід'ємними. Якщо $p_1 = 0$ або $p_2 = 0$, то $X_k^{[1]}(\alpha)X_k(\alpha) = 0$. Якщо $p_1p_2 < 0$, то з першої умови (17) маємо $X_k^{[1]}(\alpha) = -\frac{p_1}{p_2}\alpha^s X_k(\alpha)$, тому $X_k^{[1]}(\alpha)X_k(\alpha) = -\frac{p_1}{p_2}\alpha^s X_k^2(\alpha) \ge 0$. Аналогічно, якщо $q_1 = 0$ або $q_2 = 0$, то $X_k^{[1]}(\beta)X_k(\beta) = 0$, у протилежному випадку $X_k^{[1]}(\beta)X_k(\beta) = -\frac{q_1}{q_2}\beta^s X_k^2(\beta) \le 0$. Отже, зі співвідношення (18) випливає, що всі $\omega_k \ge 0$.

5. Метод власних функцій. Будемо шукати $v(x,\tau)$ у вигляді ряду

$$v(x,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k(\tau)X_k(\omega_k,x), \tag{19}$$

де $X_k(\omega_k,x)$ – власні функції задачі (16), (17). Підставимо розвинення (19) у рівняння (12):

$$a(x)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k(\tau)X_k\right) = \frac{1}{x^s}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^s\lambda(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k(\tau)X_k\right)\right) -$$

$$-g(x)\sum_{k=1}^{\infty} t_k(\tau)X_k - a(x)\frac{\partial u}{\partial\tau}.$$

Звідси у припущенні рівномірної збіжності ряду (19) і рядів, отриманих з нього почленним диференціюванням за x і за τ, маємо

$$a(x)\sum_{k=1}^{\infty} t_k'(\tau)X_k = \sum_{k=1}^{\infty} t_k(\tau)\left(\frac{1}{x^s}\left(x^s\lambda(x)X_k'\right)' - g(x)X_k\right) - a(x)\frac{\partial u}{\partial\tau}.$$

Оскільки з огляду на рівняння (16) виконується рівність

$$\frac{1}{x^s}\left(x^s\lambda(x)X_k'\right)' - g(x)X_k = -\omega_k a(x)X_k,$$

то

$$a(x)\sum_{k=1}^{\infty} t_k'(\tau)X_k = -\sum_{k=1}^{\infty} t_k(\tau)\omega_k a(x)X_k - a(x)\frac{\partial u}{\partial\tau}.$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(t_k'(\tau) + \omega_k t_k(\tau)\right)X_k = -\frac{\partial u}{\partial\tau}. \tag{20}$$

Розвинемо відому функцію $\dfrac{\partial u}{\partial \tau}$ у ряд за власними функціями $X_k(\omega_k, x)$ задачі (16), (17):

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(\tau) X_k(\omega_k, x), \tag{21}$$

де

$$d_k(\tau) = \frac{1}{\|X_k\|} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial u}{\partial \tau} X_k(\omega_k, x)\, db(x), \qquad \|X_k\| = \int_{\alpha}^{\beta} X_k^2(\omega_k, x)\, db(x).$$

Підставивши (21) у (20), отримаємо

$$t_k'(\tau) + \omega_k t_k(\tau) = -d_k(\tau), \qquad k = 1, 2, \ldots, \infty. \tag{22}$$

З початкової умови (14) для функції $v(x, \tau)$ і розвинення (19) маємо

$$v(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k(0) X_k(\omega_k, x) \equiv \tilde{\varphi}(x).$$

Розвинемо функцію $\tilde{\varphi}(x)$ у ряд за власними функціями $X_k(\omega_k, x)$ задачі (16), (17):

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(\omega_k, x), \qquad \varphi_k = \frac{1}{\|X_k\|} \int_{\alpha}^{\beta} \tilde{\varphi}(x) X_k(\omega_k, x)\, db(x).$$

Отже,

$$t_k(0) = \varphi_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \infty. \tag{23}$$

Тоді для всіх натуральних k маємо задачі Коші (22), (23) для звичайних диференціальних рівнянь.

Загальні розв'язки лінійних неоднорідних рівнянь (22) подаються формулами

$$t_k(\tau) = \left(C_k - \int_0^{\tau} d_k(\gamma) e^{\omega_k \gamma} d\gamma \right) e^{-\omega_k \tau},$$

де C_k – довільні сталі. Тому, враховуючи початкові умови (23), знаходимо для кожного натурального k розв'язок відповідної задачі Коші:

$$t_k(\tau) = \varphi_k e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} d_k(\gamma) e^{\omega_k(\gamma - \tau)}\, d\gamma.$$

Тоді за формулою (19) маємо

$$v(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} d_k(\gamma) e^{\omega_k(\gamma - \tau)}\, d\gamma \right) X_k(\omega_k, x).$$

Висновки. За допомогою методу редукції, методу Фур'є і розвинення за власними функціями побудовано розв'язок крайової задачі для диференціального рівняння параболічного типу з мірами. Отримані результати можна використовувати при дослідженні процесів теплопередачі в багатошаровій плиті, багатошаровому порожнистому циліндрі, багатошаровій кулі.

1. *Власій О. О., Мазуренко В. В.* Крайові задачі для системи квазідиференціальних рівнянь з розподілами у коефіцієнтах // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2009. – № 643. – С. 73–86.
2. *Тацій Р. М., Власій О. О., Стасюк М. Ф.* Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтами // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2014. – № 804. – С. 64–69.

3. *Тацій Р. М., Пазен О. Ю., Ушак Т. І.* Загальна третя крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-сталими коефіцієнтами та внутрішніми джерелами тепла // Пожежна безпека. – 2015. – № 27. – С. 135–141.
4. *Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В., Власій О. О.* Узагальнені квазідиференціальні рівняння. – Дрогобич: Коло, 2011. – 301 с.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1977. – 735 с.
   Те саме: *Tikhonov A. N., Samarskii A. A.* Equations of mathematical physics. – Oxford: Pergamon Press Ltd., 1963. – 776 p.
6. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – Москва: Мир, 1971. – 310 с.
7. *Шин Д.* О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Мат. сб. – 1940. – **7** (49), № 3. – С. 479–532.
8. *Crockett R. K., Colella P., Graves D. T.* A Cartesian grid embedded boundary method for solving the Poisson and heat equations with discontinuous coefficients in three dimensions // J. Comput. Phys. – 2011. – **230**, No. 7. – P. 2451–2469.
   https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.12.017.
9. *Makhnei O. V.* Boundary problem for the singular heat equation // Карпат. мат. публікації. – 2017. – **9**, No. 1. – P. 86–91. https://doi.org/10.15330/cmp.9.1.86-91.
10. *Makhnei O. V.* Mixed problem for the singular partial differential equation of parabolic type // Карпат. мат. публікації. – 2018. – **10**, No. 1. – P. 165–171. https://doi.org/10.15330/cmp.10.1.165-171.
11. *Martin P., Rosier L., Rouchon P.* Null controllability of one-dimensional parabolic equations by the flatness approach // SIAM J. Control Optim. – 2016. – **54**, No. 1. – P. 198–220. https://doi.org/10.1137/14099245X.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С МЕРАМИ

*Предложена схема решения смешанной задачи для дифференциального уравнения параболического типа с коэффициентами, которые являются обобщенными производными функций ограниченной вариации. Решение этой задачи ищется методом редукции, что дает возможность свести решение поставленной задачи к решению двух задач: **1**) краевой квазистационарной задачи с исходными краевыми условиями и **2**) смешанной задачи с нулевыми краевыми условиями. Первая из этих задач решается с помощью введения квазипроизводной. Для решения второй задачи используется метод Фурье и разложение по собственным функциям некоторой краевой задачи для квазидифференциального уравнения второго порядка. Полученные результаты можно использовать, в частности, для исследования процессов теплопередачи в многослойной плите, полом цилиндре или сфере.*

Ключевые слова: *краевая задача, квазипроизводная, мера, собственные функции, метод Фурье.*

MIXED PROBLEM FOR THE DIFFERENTIAL EQUATION OF PARABOLIC TYPE WITH MEASURES

*The scheme for solving of a mixed problem for a differential equation of parabolic type with coefficients that are the generalized derivatives of functions of bounded variation is proposed. A solution of this problem is sought by the reduction method, that allows to reduce solving of proposed problem to solving of two problems: **1**) a quasistationary boundary problem with initial boundary conditions and **2**) a mixed problem with zero boundary conditions. The first of these problems is solved by introducing the quasiderivative. The Fourier method and expansion in eigenfunctions of some boundary value problem for the second-order quasidifferential equation are used for solving of the second problem. The results can be used, in particular, in the investigation of the heat transfer process in a multilayer plate, hollow cylinder or sphere.*

Key words: *boundary problem, quasiderivative, measure, eigenfunctions, Fourier method.*

Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
15.01.18