УДК 514.1: 514.75

Д. О. Дзякович*

ЕКСТРЕМАЛЬНІСТЬ ГЕОДЕЗИЧНИХ І КРИТЕРІЇ ВИЗНАЧЕННЯ УНІВЕРСАЛЬНИХ БАГАТОТОЧКОВИХ ІНВАРІАНТІВ

Розглядається проблема визначення універсальних багатоточкових інваріантів однорідних ізотропних просторів. Обґрунтовується необхідність пошуку нових критеріїв для коректного вирішення цієї проблеми. Відповідний критерій сформульовано та доведено як наслідок запропонованої теореми. Критерій ґрунтується на екстремальності довжини геодезичної і дозволяє визначити явний вигляд універсальних багатоточкових інваріантів для однорідних ізотропних просторів. В результаті застосування нового критерію показано, що універсальні багатоточкові інваріанти, які мають форму визначників, збігаються з відповідними універсальними багатоточковими інваріантами просторів сталої кривини.

Ключові слова: *універсальні багатоточкові інваріанти, однорідні ізотропні простори, простори сталої кривини, екстремальність довжини геодезичної.*

Вступ. Поняття універсального багатоточкового інваріанта (УБТ інваріанта) вперше запропоновано в роботі [2] для характеристики властивостей метричного простору. Там також розглядається і проблема знаходження явного вигляду цих величин, повне вирішення якої все ще залишається актуальною задачею. У пропонованій статті спробуємо просунутися у вирішенні цієї проблеми, але спочатку пояснимо її суть.

Нехай $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ – сукупність m довільно вибраних точок метричного простору M^n, де n – його розмірність. Сукупність точок $P = \{P_i\}_{i=1}^m$ характеризується їх положеннями та набором відповідних відстаней між ними $r = \{r_{ij}\}_{i,j=1}^m$, $i \neq j$, $r_{ij} = \rho(P_i, P_j)$.

Означення 1. Пару $\{P, r\}$ називатимемо системою m точок ($\forall m \geq 2$).

Якщо значення C деякої функції $V_m(r)$ не залежить від вибору точок P, то співвідношення $V_m(r) = C$ буде інваріантним відносно будь-яких перетворень $\{P_i \to P_i'\}_{i=1}^m$, тобто буде універсальним метричним співвідношенням для будь-якої системи m точок.

Означення 2. Універсальним багатоточковим інваріантом порядку m даного метричного простору M^n називаємо функцію від набору відстаней $V_m(r)$, яка задовольняє дві умови:

($\boldsymbol{i}$) $\quad V_m(r) = \text{const} \qquad \forall \{P_i\}_{i=1}^m \subset M^n$;

($\boldsymbol{ii}$) $\quad V_m(r) \not\equiv \text{const}$.

Тобто УБТ інваріант – це стала функція $V_m(r)$, яка визначена для будь-якої системи m точок даного простору та має нетривіальний явний вигляд.

Прикладом і прототипом УБТ інваріантів, що відповідають наведеному вище означенню 2, можуть слугувати визначники Келі – Менгера для m точок або визначники $\left|\cos(\text{æ} r_{ij})\right|_{i,j=1}^m$ та $\left|\text{ch}(\text{æ} r_{ij})\right|_{i,j=1}^m$, де $m \geq n+2$, які використовуються у геометрії відстаней і дорівнюють нулеві для відповідного простору сталої кривини. Основні теоретичні результати геометрії відстаней підсумовано в монографії [5]. Подальші дослідження в цій галузі зміс-

* dzyakovich@gmail.com

тили фокус уваги в бік практичної площини і універсальні багатоточкові залежності та співвідношення згадуються в них лише у контексті прикладних застосувань в евклідовому просторі [6, 7]. Але відомі також і спроби значно ширшого використання подібних понять. Так, у праці Ю. С. Владімірова [1] універсальні співвідношення, подібні за змістом до закону $V_m(r) = C$ для УБТ інваріантів, розглядаються як елемент побудови фізичних теорій.

У той же час, означені вище УБТ інваріанти можуть бути досить цікавим об'єктом для вивчення, як самі по собі, так і для розширення арсеналу методів метричної геометрії. Зокрема, як показано в роботі [3], за допомогою відповідних УБТ інваріантів можна задати метричну структуру просторів сталої кривини. З одного боку, це відкриває нові можливості для вивчення метричних просторів, а з іншого − змушує шукати ефективні методи для незалежного визначення можливих УБТ інваріантів.

У подальшому обмежимося розглядом інваріантів $V_4(r)$ для системи чотирьох точок у двовимірному метричному просторі, які мають структуру визначника симетричної матриці з елементами $f(r_{ij})$. Вирази для $V_4(r)$ такого типу забезпечують необхідні симетрії відносно перестановки точок (див. [2]), а також узагальнюють відомі УБТ інваріанти, що відповідають просторам сталої кривини (див. приклади, наведені вище). При цьому, як і раніше, будемо враховувати обмеження, які зазвичай накладаються на відстані у метричному просторі (аксіоми метрики). Відстані слід розуміти як довжину відрізка геодезичної (найкоротшої або екстремальної за довжиною лінії у просторі).

У роботі [2] запропоновано підхід, який передбачав знаходження матричних елементів $f(r_{ij})$ у виразі для $V_m(r)$ з умови адитивного зв'язку відстаней r для системи точок на геодезичній, при цьому аналіз фактично обмежувався інваріантами 3-го порядку. У подальшому з'ясувалось, що ця умова не є достатньою, оскільки вона виконується не лише для відстаней, але й для інших двоточкових величин. Наприклад, так пов'язані довжини дуги кола, виміряні між точками на цьому колі в однорідному ізотропному просторі. Тому в загальному випадку для визначення УБТ інваріантів потрібен інший критерій, який враховуватиме екстремальність довжини відрізків геодезичної.

Метою роботи є розгляд проблеми недостатності запропонованих раніше критеріїв для визначення УБТ інваріантів однорідних ізотропних просторів; формулювання критерію, який разом з іншими умовами дозволяє визначити в таких просторах явний вигляд УБТ інваріантів; знаходження явного вигляду УБТ інваріантів, які мають форму визначників і узгоджуються з новим критерієм.

1. Проблема визначення УБТ інваріантів. Проблема недостатності запропонованих раніше критеріїв для визначення УБТ інваріантів, ймовірно, пов'язана з однорідністю та ізотропією окремих метричних просторів. Розглянемо її на прикладі двовимірних ріманових просторів сталої кривини (окрім плоского), які характеризуються УБТ інваріантами ${}^{(æ)}\Delta_4^2$ (для $m = 4$, $n = 2$, див. [3]):

$$ {}^{(æ)}\Delta_4^2 \equiv \left|\cos(æ r_{ij})\right|_{i,j=1}^{4} = 0, \qquad æ = \sqrt{K} \neq 0. \tag{1} $$

Формула (1) описує інваріанти для двох типів кривини K: $K > 0$ і $K < 0$. Якщо $K < 0$, то функція $\cos(æ r_{ij})$ в (1) перетворюється на $\operatorname{ch}(æ r_{ij})$, де $æ$ − знову додатна дійсна стала.

Вираз (1) наведено як приклад УБТ інваріанта, що має структуру визначника. Будь-які інші гіпотетично можливі УБТ інваріанти такого типу можна отримати з (1) шляхом перетворення $r_{ij} \to f(\ell_{ij})$, де $\ell_{ij} = \lambda(P_i, P_j)$ − відстані між точками деякого іншого метричного простору. Відповідь на питання, чи є отриманий в результаті такого перетворення вираз для ${}^{(æ)}\Delta_4^2$ УБТ інваріантом деякого метричного простору M^2, залежатиме від того, чи будуть величини ℓ_{ij} відстанями у відповідному просторі. Щоб це з'ясувати, потрібно долучити до виразу ${}^{(æ)}\Delta_4^2(\tilde{r})$, де $\tilde{r} = \{f(\ell_{ij})\}_{i,j=1}^{m}$, додаткову умову для відстаней, в основі якої лежить таке твердження.

Твердження 1. *У метричному просторі M^n відстані між будь-якими трьома точками геодезичної пов'язані співвідношенням*

$$r_{ij} = r_{ik} + r_{kj}, \qquad r_{ij} = \max(r_{ij}, r_{ik}, r_{kj}), \quad \{r_{ik}, r_{kj}\} \subset \mathbb{R} > 0 .$$

Звідси отримуємо для відстаней ℓ_{ij} у виразі ${}^{(æ)}\Delta_4^2(\tilde{r})$ таку умову (необхідну, але не достатню):

Наслідок. *У геодезично повному метричному просторі M^n для будь-яких точок $\{P_i, P_j\}$ та чисел $\{\ell_1, \ell_2\} \subset \mathbb{R} > 0$ таких, що $\ell_1 + \ell_2 = \ell_{ij}$, існує така точка P_k, що $\ell_{ik} = \ell_1$, $\ell_{kj} = \ell_2$, $\ell_{ij} = \ell_{ik} + \ell_{kj}$.*

Така умова, по суті, використовувалась у [2] як критерій для знаходження явного вигляду УБТ інваріантів (умова адитивного зв'язку відстаней). Тоді завдяки додатковим обмеженням був отриманий тільки розв'язок (1) (тобто $f(\ell_{ij}) = \ell_{ij}$). Але в загальному випадку використання цієї умови може привести до хибних результатів, оскільки умова адитивного зв'язку відстаней не враховує екстрамальність геодезичної. Покажемо це на конкретному прикладі. Розглянемо таку задачу.

Задача. Нехай у просторі M^2 задано УБТ інваріант (1), де $K > 0$. Знайти довжину дуги кола радіуса R, що з'єднує дві точки, відстань між якими a_0, де $a_0 \le 2R$.

Р о з в' я з а н н я. Запровадимо для відстаней у системі чотирьох точок такі позначення:

$$r_{12} = c, \qquad r_{13} = a, \qquad r_{14} = q, \qquad r_{23} = b, \qquad r_{24} = h, \qquad r_{34} = s .$$

Як показано в роботі [3], УБТ інваріант (1) задає у просторі квадратичну (ріманівську) метрику, що має вигляд

$$ds^2 = \frac{1}{æ^2}\frac{(1-v^2)\,du^2 - 2(\xi - uv)\,du\,dv + (1-u^2)\,dv^2}{1 - \xi^2 - u^2 - v^2 + 2\xi uv},$$

$$u \equiv \cos(æa), \qquad v \equiv \cos(æb), \qquad \xi \equiv \cos(æc), \tag{2}$$

де $æ^2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c = \text{const}$, відстані (a, b) − координати довільної точки простору у двополюсній системі радіальних координат. Метрика (2) випливає безпосередньо з універсального співвідношення (1) і тому не залежить від вибору точок початку координат P_1 та P_2. Виберемо точку P_1 на колі радіуса R з центром в точці P_2 і позначимо точку цього кола, віддалену від P_1 на відстань a_0, через P_0 (рис. 1). Тоді $c = r_{12} = R$, а координати точок дуги кола прийматимуть значення $a = r_{13} \in [0, a_0]$, $b = r_{23} = R$ ($dv = 0$). Згідно з виразом для метрики (2), елемент довжини кола буде дорівнювати

$$d\ell^2 = ds^2\Big|_{v=\xi} = \frac{1}{æ^2}\frac{(1-\xi^2)\,du^2}{1 - 2\xi^2 - u^2 + 2\xi^2 u} = \frac{1}{æ^2}\frac{(1-\xi^2)\,du^2}{(1-\xi^2)^2 - (u-\xi^2)^2}, \tag{3}$$

де $\xi = \cos(æR)$. Довжину дуги кола ℓ_{10} знайдемо, проінтегрувавши

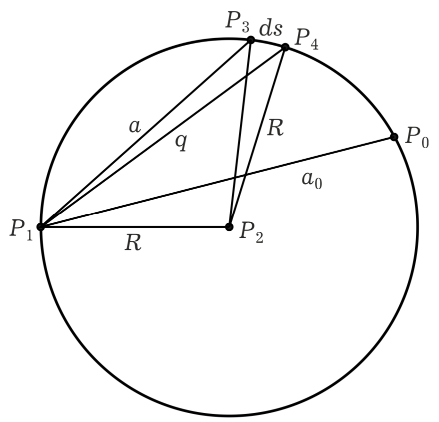

Рис. 1. Довжина дуги кола у просторах сталої кривини.

вираз (3) за змінною $(u-\xi^2)$. При цьому будемо враховувати, що знаменник останнього дробу у (3) за умови $a \le 2R$ залишається додатним незалежно від знака $\varkappa^2$:

$$\ell_{10} = \int\limits_{a=0}^{a=a_0} d\ell = \mp \frac{1}{\varkappa} \int\limits_{a=0}^{a=a_0} \frac{\sqrt{1-\xi^2}\, d\left(u-\xi^2\right)}{\sqrt{(1-\xi^2)^2 - (u-\xi^2)^2}} =$$

$$= \mp \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\varkappa}\left(\arcsin \frac{u-\xi^2}{1-\xi^2}\right)\Bigg|_{u=1}^{u=u_0} =$$

$$= \pm \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\varkappa}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{u_0-\xi^2}{1-\xi^2}\right),$$

де $u_0 = \cos(\varkappa a_0)$. Вибір знака визначається умовою $d\ell > 0$ (при $da > 0$). Якщо $\varkappa^2 > 0$, то $du = -\varkappa \sin(\varkappa a)\, da < 0$, і перед інтегралом треба вибрати знак « – ». Підставляючи $\xi = \cos(\varkappa R)$ та $u_0 = \cos(\varkappa a_0)$, отримуємо остаточну формулу:

$$\ell_{10} = \frac{\sin(\varkappa R)}{\varkappa}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\cos(\varkappa a_0) - \cos^2(\varkappa R)}{\sin^2(\varkappa R)}\right). \tag{4}$$

Відповідь: довжина дуги кола, що з'єднує дві точки, визначається за формулою (4).

Формула (4) пов'язує відстань $a_0 = r_{10}$ з довжиною дуги кола ℓ_{10}, що відповідає тій самій парі точок. Положення точок у просторі при цьому не має значення. Тому цю формулу можемо записати з використанням більш загальних позначень:

$$\ell_{ij} = \frac{\sin(\varkappa R)}{\varkappa}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\cos(\varkappa r_{ij}) - \cos^2(\varkappa R)}{\sin^2(\varkappa R)}\right). \tag{5}$$

Для уявних $\varkappa$ подібна формула буде відрізнятися лише знаком. Сформулюємо головний результат розглянутої задачі як твердження.

Твердження 2. *У просторі сталої кривини кожній парі точок, відстань між якими не перевищує* $2R$, *відповідає довжина дуги кола радіуса* R, *що визначається відстанню між цими точками.*

Це дозволяє сформулювати ще одне твердження, в якому використовується очевидна властивість довжини кривої.

Твердження 3. *У просторі сталої кривини довжини дуги кола радіуса R, які попарно відповідають будь-яким трьом точкам півкола того самого радіуса, пов'язані співвідношенням*

$$\ell_{ij} = \ell_{ik} + \ell_{kj}, \qquad \ell_{ij} = \max(\ell_{ij}, \ell_{ik}, \ell_{kj}) \le L/2,$$

де L – довжина кола.

Якщо порівняти твердження 1 і 3, то можна зробити такий висновок.

Висновок: критерій адитивного зв'язку відстаней (див. наслідок твердження 1) виконується у просторі сталої кривини як для відстаней r_{ij}, так і для довжин дуги кола ℓ_{ij}, і тому не є достатнім для визначення залежності $V_m(r)$.

Переконаємося в цьому на прикладі перетворення $r_{ij} \to f(\ell_{ij})$, що випливає з формули (5):

$$\cos\left(\frac{æ\ell_{ij}}{\sin(æR)}\right) = \frac{\cos(ær_{ij}) - \cos^2(æR)}{\sin^2(æR)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos(ær_{ij}) = \sin^2(æR)\cos(2k\ell_{ij}) + \cos^2(æR) =$$

$$= 1 - \frac{K}{2k^2}\sin^2(k\ell_{ij}),$$

$$k \equiv \frac{æ}{2\sin(æR)}, \qquad \cos(2k\ell_{ij}) \equiv 1 - 2\sin^2(k\ell_{ij}), \qquad K \equiv æ^2. \tag{6}$$

Підставивши вираз для $\cos(ær_{ij})$ з формул (6) в УБТ інваріант (1), отримаємо універсальне співвідношення для довжин дуги кола радіуса R у двовимірному просторі сталої кривини $K > 0$:

$$\left|1 - \frac{K}{2k^2}\sin^2(k\ell_{ij})\right|_{i,j=1}^{4} = 0. \tag{7}$$

Співвідношення (7) залишається правильним і у випадку $K < 0$ (для уявних $æ$).

Вираз (7) так само, як і УБТ інваріант (1), не залежить від вибору системи точок, для яких визначено величини ℓ_{ij}, що замінюють у ньому відстані. Крім того, для довжин ℓ_{ij} дуги кола виконується твердження 3, подібне до твердження 1 для відстаней, а також сформульований вище наслідок твердження 1. При цьому роль геодезичних виконують дуги кола певного радіуса. У підсумку вираз (7) міг би претендувати на статус УБТ інваріанта відносно відстаней ℓ_{ij} у деякому метричному просторі, якби не очевидні відмінності.

По-перше, довжини ℓ_{ij} не є відстанями (довжинами відрізків найкоротших ліній) у відповідному метричному просторі, а використання їх як відстаней призводить до протиріччя: при переході до нових відстаней елемент довжини залишається незмінним ($d\ell_{ij} = dr_{ij}$) і метрика буде еквівалентною, в той час як універсальне метричне співвідношення (1) змінюється і набуває вигляду (7).

По-друге, довжини ℓ_{ij}, на відміну від відстаней r_{ij}, є визначеними лише для точок, що лежать на колі певного радіуса R. Відповідно вираз (7), на відміну від УБТ інваріанта (1), є визначеним і може бути застосований не для всіх систем точок, а лише для тих, що знаходяться в межах кола радіуса R (тобто для будь-яких $r_{ij} \le 2R$).

Очевидно, що для визначення явного вигляду УБТ інваріантів потрібен більш жорсткий критерій, який дозволив би уникнути таких помилкових результатів, як хибний УБТ інваріант (7).

2. Геодезичний критерій. Для знаходження потрібного критерію доведемо таку лему.

Лема 1. *Нехай точки метричного простору* P_1, P_2, P_3 *лежать на геодезичній екстремальної довжини, а відстані між ними дорівнюють* $r_{13} = a$, $r_{23} = b$, $r_{12} = c = a + b$. *Тоді в найближчому околі точки* P_3 *існує точка* P_4 *така, що* $r_{34} = ds \to 0$ *(де* $ds > 0$*)*, $r_{14} = a$, $r_{24} = b$.

Д о в е д е н н я. Переконаємося спочатку, що твердження леми не суперечить аксіомам метрики, які передбачаються її умовою. Для цього достатньо перевірити виконання нерівності трикутника в системі чотирьох точок P_1, P_2, P_3, P_4 (рис. 2) за умови, що $r_{ij} > 0$ для $i \neq j$:

$$\Delta_{124}: \qquad \pm(r_{14} - r_{24}) = \pm(a - b) \leq r_{12} = a + b \leq r_{14} + r_{24} = a + b;$$

$$\Delta_{134}: \qquad \pm(r_{13} - r_{34}) = \pm(a - ds) \leq r_{14} = a \leq r_{13} + r_{34} = a + ds;$$

$$\Delta_{234}: \qquad \pm(r_{23} - r_{34}) = \pm(b - ds) \leq r_{24} = b \leq r_{23} + r_{34} = b + ds.$$

Нерівність трикутника виконується, отже, твердження леми не суперечить аксіомам метрики. Доведемо, що воно виконується за вказаних в лемі умов.

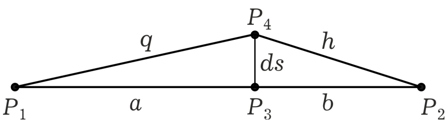

Рис. 2. Варіація довжини геодезичної в метричному просторі.

Нехай P_4 − точка з найближчого околу точки P_3 (див. рис. 2). Тоді $r_{34} = ds \to 0$ (де $ds > 0$), $r_{14} = q = a + da$, $r_{24} = h = b + db$. Виберемо точку P_4 на колі радіуса a з центром в точці P_1, тобто так, щоб $r_{14} = r_{13} = a$ ($da = 0$). Нерівність трикутника для Δ_{134} при цьому не порушується (як показано вище). Порівняємо довжину ламаної $P_1P_4P_2$ з довжиною відрізка геодезичної P_1P_2:

$$\ell_{142} = r_{14} + r_{24} = a + b + db,$$

$$\ell_{132} = r_{13} + r_{23} = a + b,$$

$$\delta\ell_{12} \equiv \ell_{142} - \ell_{132} = db.$$

Різниця $\delta\ell_{12}$ є варіацією довжини кривої, яка з'єднує точки P_1 та P_2, поблизу геодезичної P_1P_2. Внаслідок екстремальності довжини геодезичної $\delta\ell_{12} = db = 0$, тому $r_{24} = b + db = b$. Отже, для точки P_4 виконуються рівності $r_{34} = ds$, $r_{14} = a$, $r_{24} = b$. Лему доведено. ♦

Лема 1 дозволяє сформулювати теорему, необхідну для визначення УБТ інваріантів.

Теорема 1. *Нехай УБТ інваріант двовимірного простору має вигляд* $V_4(F) = C$, *де* $F = \{f(r_{ij})\}_{i,j=1}^{4}$. *Тоді, якщо* $r_{12} = a + b$, $r_{14} = r_{13} = a$, $r_{24} = r_{23} = b$ *та* $r_{34} = ds \to 0$, *де* $ds > 0$, *то*

1°) $V_4(F) - V_4(F_0) = 0$, *де* $F_0 = \{f(r_{ij}) \mid r_{34} \equiv 0\}_{i,j=1}^{4}$;

2°) $f(ds) - f(0) = \delta f \to 0$, *де* $\delta f \neq 0$.

Д о в е д е н н я. Доведемо пункт ***1°***.

Згідно з лемою 1, рівності $r_{12} = a + b$, $r_{14} = r_{13} = a$, $r_{24} = r_{23} = b$ та $r_{34} = ds \to 0$ (де $ds > 0$) виконуються для системи чотирьох точок метричного простору, три з яких лежать на геодезичній, а четверта − у найближчому околі третьої (рис. 2). Для цієї системи точок ($\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, де $P_4 \to P_3$) за умовою теореми можемо записати УБТ інваріант $V_4(F) = C$, в якому відстані r_{ij} визначатимуться умовою теореми.

Розглянемо також іншу систему точок $\{P_1, P_2, P_3, P_4'\}$, де $P_4' = P_3$ (всі точки лежать на геодезичній). У цій системі $r_{34} = 0$, а решта відстаней визначаються умовою теореми. УБТ інваріант у цьому випадку можна записати так: $V_4(F_0) = C$, де $F_0 = \{f(r_{ij}) \mid r_{34} \equiv 0\}_{i,j=1}^{4}$.

Отже, якщо $r_{12} = a + b$, $r_{14} = r_{13} = a$, $r_{24} = r_{23} = b$ та $r_{34} = ds \to 0$, де $ds > 0$, то можна записати УБТ інваріант для відповідної системи точок і УБТ інваріант для випадку, коли дві сусідні точки цієї системи збігаються. Але значення УБТ інваріантів для різних систем точок не відрізняються, тому

$$V_4(F) - V_4(F_0) = 0, \quad \text{де} \quad F = \{f(r_{ij})\}_{i,j=1}^{4}, \quad F_0 = \{f(r_{ij}) \mid r_{34} \equiv 0\}_{i,j=1}^{4}.$$

Пункт ***1°*** доведено.

Доведемо пункт ***2°***. Позначимо різницю $f(ds) - f(0)$ через δf. За умовою $ds \to 0$, отже, $f(ds) \to f(0)$ і $\delta f = f(ds) - f(0) \to 0$.

Розкладемо δf в ряд за степенями ds, тоді

$$\delta f = \sum_{k=1}^{\infty} A_k ds^k \to A_q ds^q,$$

де $A_q ds^q$ − перший член розвинення з ненульовим коефіцієнтом, $A_q \neq 0$. Оскільки за умовою $ds \neq 0$ ($ds > 0$), то $\delta f \to A_q ds^q \neq 0$. Пункт ***2°*** і теорему в цілому доведено. ♦

Наслідок. *Якщо* $r_{12} = a + b$, $r_{14} = r_{13} = a$, $r_{24} = r_{23} = b$, $r_{34} = ds \to 0$, *де* $ds > 0$, *то похідна від* $V_4(F)$ *за змінною* $f(ds)$ *дорівнює нулеві:*

$$\left(\frac{\partial V_4(F)}{\partial f(ds)} \right)_{ds=0} = \lim_{ds \to 0} \frac{V_4(F) - V_4(F_0)}{f(ds) - f(0)} = 0. \tag{8}$$

Вираз (8) випливає безпосередньо з пунктів ***1°*** і ***2°*** твердження теореми 1 (з урахуванням того, що $\delta f \neq 0$).

Наслідок теореми 1 назвемо *геодезичним критерієм* для УБТ інваріантів $V_4(F)$.

Розглянемо приклади застосування сформульованого щойно критерію для визначення явного вигляду УБТ інваріантів типу $\left| f(r_{ij}) \right|_{i,j=1}^{4} = 0$.

Приклад 1. Нехай УБТ інваріант має вигляд визначника

$$V_4(F) = \left| f(r_{ij}) \right|_{i,j=1}^{4} = 0, \qquad \text{де} \quad f(0) = 1.$$

► Покладемо $r_{12} = a + b$, $r_{14} = r_{13} = a$, $r_{24} = r_{23} = b$, $r_{34} = ds \to 0$, де $ds > 0$. Тоді, згідно з наслідком теореми 1, виконується умова (8):

$$\left(\frac{\partial V_4(F)}{\partial f(ds)}\right)_{ds=0} = \frac{\partial}{\partial f(ds)}\begin{vmatrix} f(0) & f(a+b) & f(a) & f(a) \\ f(a+b) & f(0) & f(b) & f(b) \\ f(a) & f(b) & f(0) & f(ds) \\ f(a) & f(b) & f(ds) & f(0) \end{vmatrix} = 0\,.$$

За правилом обчислення похідної визначника [4, с. 389] знаходимо

$$\left(\frac{\partial V_4(F)}{\partial f(ds)}\right)_{ds=0} =$$

$$= \begin{vmatrix} f(0) & f(a+b) & 0 & f(a) \\ f(a+b) & f(0) & 0 & f(b) \\ f(a) & f(b) & 0 & f(0) \\ f(a) & f(b) & 1 & f(0) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(0) & f(a+b) & f(a) & 0 \\ f(a+b) & f(0) & f(b) & 0 \\ f(a) & f(b) & f(0) & 1 \\ f(a) & f(b) & f(0) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} f(0) & f(a+b) & f(a) \\ f(a+b) & f(0) & f(b) \\ f(a) & f(b) & f(0) \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} f(0) & f(a) & f(a+b) \\ f(a) & f(0) & f(b) \\ f(a+b) & f(b) & f(0) \end{vmatrix} =$$

$$= 0\,. \qquad (9)$$

Отримане співвідношення розглядалося в роботі [2] з метою знаходження найпростіших УБТ інваріантів. Скористаємося отриманими там результатами. Якщо $f(0) = 1$, то функція $f(r_{ij})$, що задовольняє рівняння (9) для довільних $a, b > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, задається виразом $f(r_{ij}) = \cos(\text{æ} r_{ij})$, де $\text{æ}^2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Отже, відповідний УБТ інваріант збігається в цьому випадку з інваріантом (1). ◄

Приклад 2. Нехай УБТ інваріант має вигляд визначника

$$V_4(F) = \left|f(r_{ij})\right|_{i,j=1}^{4} = 0\,, \qquad \text{де} \quad f(0) = 0\,.$$

► Діючи так само, як і в *прикладі 1*, отримаємо функціональне рівняння (9). Розв’язуючи його відносно функції $f(r_{ij})$, знаходимо, що $f(r_{ij}) \equiv 0$ [2]. Це означає, що в цьому випадку змістовного розв’язку не існує. ◄

Розглянуті приклади показують, що сформульований у наслідку теореми 1 критерій дозволяє знайти явний вигляд УБТ інваріанта (1) (що відповідає просторам сталої кривини) з загального виразу $V_4(F) = \left|f(r_{ij})\right|_{i,j=1}^{4}$. Ніяких хибних розв’язків при цьому не виникає.

Висновки. Підсумуємо отримані результати.

− Геодезичний критерій, сформульований як наслідок теореми 1, дозволяє знаходити явний вигляд УБТ інваріантів для однорідних ізотропних просторів.

− УБТ інваріанти, які мають вигляд визначників і узгоджуються з цим критерієм, збігаються з інваріантами рімановых просторів сталої кривини.

Хоча критерій сформульовано для часткового випадку двовимірного простору, він залишає можливість для подальших узагальнень як для просторів більшої кількості вимірів, так і для випадків складнішої геометрії. Кількість змінних r в інваріанті $V_m(r)$ і його порядок m будуть при цьому зростати. Проте і в наведеному вигляді геодезичний критерій має чималі перспективи подальших застосувань, відкриваючи можливість для дослідження виразів $V_4(F)$ з іншими видами залежності від двоточкових елементів $f(r_{ij})$.

1. *Владимиров Ю. С.* Основания физики. − Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. − 456 с.
2. *Дзякович Д. О.* Про симетрії універсальних багатоточкових інваріантів, що лежать в основі елементарних геометрій // Прикл. проблеми механіки і математики. − 2015. − Вип. 13. − С. 195−206.
3. *Дзякович Д. О.* Універсальні багатоточкові інваріанти та геометрія просторів сталої кривини // Прикл. проблеми механіки і математики. − 2017. − Вип. 15. − С. 42−49.
4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. − Москва: Физматгиз, 1962. − Т. I. − 607 с.
5. *Blumenthal L. M.* Theory and applications of distance geometry. − New York: Chelsea Publ. Co., 1970. − xi+347 p.
6. *Havel T. F.* Distance geometry: Theory, algorithms, and chemical applications // In: Encyclopedia of Computational Chemistry / P. von R. Schleyer (editor-in-chief). − Chichester: Wiley, 1998. − P. 723−742.
7. *Liberti L., Lavor C., Maculan N., Mucherino A.* Euclidean distance geometry and applications // SIAM Rev. − 2014. − **56**, No. 1. − P. 3−69.
   https://doi.org/10.1137/120875909.

ЭКСТРЕМАЛЬНОСТЬ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ И КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ МНОГОТОЧЕЧНЫХ ИНВАРИАНТОВ

Рассматривается проблема определения универсальных многоточечных инвариантов однородных изотропных пространств. Обосновывается необходимость поиска новых критериев для корректного решения этой проблемы. Соответствующий критерий сформулирован и доказан как следствие предложенной теоремы. Критерий основан на экстремальности длины геодезической и позволяет определить явный вид универсальных многоточечных инвариантов для однородных изотропных пространств. В результате применения нового критерия показано, что универсальные многоточечные инварианты, которые имеют форму определителей, совпадают с соответствующими универсальными многоточечными инвариантами пространств постоянной кривизны.

Ключевые слова*: универсальные многоточечные инварианты, однородные изотропные пространства, пространства постоянной кривизны, экстремальность длины геодезической.*

EXTREMALITY OF GEODESIC AND CRITERIA FOR DETERMINATION OF UNIVERSAL MULTIPOINT INVARIANTS

The determining problem for universal multipoint invariants of homogeneous isotropic spaces is considered. The necessity of finding new criteria for the correct solution of this problem is substantiated. The corresponding criterion is formulated and proved as a consequence of the proposed theorem. This criterion is based on the extremality of geodesic length and allows one to determine the explicit form of universal multipoint invariants for homogeneous isotropic spaces. As a result of the new criterion application, it was shown that universal multipoint invariants which have the form of determinants coincide with corresponding universal multipoint invariants of the spaces of constant curvature.

Key words: *universal multipoint invariants, homogeneous isotropic spaces, spaces of constant curvature, extremality of geodesic length.*

Укр. наук.-дослід. конструкт.-технол.
ін-т еластомерних матеріалів і виробів, Дніпро

Одержано
03.12.18