УДК 539.3

В. І. Острик

СИМЕТРІЯ ІНВЕРСІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ ОСНОВНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДВОВИМІРНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ КЛИНА

Із застосуванням інтегрального перетворення Мелліна отримано розв'язки двовимірних основних задач для пружного клина. Показано, що у випадку крайових умов, симетричних відносно перетворення інверсії, окремі компоненти розв'язків задач плоскої деформації і розв'язки задач антиплоскої деформації для клина також мають симетрію інверсії.

Симетрія розв'язків плоских задач теорії пружності відносно одної або обох осей декартової системи координат є очевидною і не потребує додаткових обґрунтувань. Так, наприклад, якщо геометрія задачі та задане навантаження симетричні відносно осі ординат, то і розв'язок задачі є симетричним відносно цієї ж осі, тобто нормальні переміщення та нормальні напруження на координатних ділянках є парними функціями за змінною осі абсцис, а тангенціальні переміщення та дотичні напруження − непарними функціями цієї змінної. У випадку антисиметричного навантаження розв'язок задачі є також антисиметричним, тобто нормальні переміщення та нормальні напруження − є непарними, а тангенціальні переміщення та дотичні напруження − парними. Симетрія задачі відносно осі (або дзеркальна симетрія) означає незмінність (з точністю до знаку) розв'язку при перетворенні, коли кожна точка розглядуваної області відображується симетрично відносно цієї осі.

Інверсія з початком у точці O відносно точки A, як відомо, є таким перетворенням, коли кожна точка M променя OA відображується в точку M', що лежить на цьому промені, таку, що $|OM| \cdot |OM'| = |OA|^2$. Якщо певна функція, задана у точках променя, не змінюється при перетворенні інверсії, то таку функцію називатимемо симетричною. Якщо при цьому знак функції змінюється на протилежний, то функцію називатимемо антисиметричною.

На відміну від дзеркальної симетрії, симетрія при перетворенні інверсії у задачах теорії пружності не є цілком очевидною, і її виявлення у розв'язках основних крайових задач для пружного клина є предметом цієї статті. Очевидним є тільки той факт, що симетрію інверсії мають розв'язки задач для пружного клина у випадку антиплоскої деформації, оскільки гармонічна функція при перетворенні інверсії залишається гармонічною.

1. Плоска деформація.

1.1. Задача I − I. На гранях $\vartheta = \pm\alpha$ клина $0 \le r < \infty$, $-\alpha \le \vartheta \le \alpha$ задано умови першої крайової задачі:

$$\frac{1}{2G}\sigma_\vartheta\Big|_{\vartheta=\alpha} = g_1(r), \qquad \frac{1}{2G}\tau_{r\vartheta}\Big|_{\vartheta=\alpha} = g_2(r),$$
$$\frac{1}{2G}\sigma_\vartheta\Big|_{\vartheta=-\alpha} = g_3(r), \qquad \frac{1}{2G}\tau_{r\vartheta}\Big|_{\vartheta=-\alpha} = g_4(r), \tag{1}$$

де G − модуль зсуву, $g_j(r)$, $j = 1, 2, 3, 4$, − задані функції.

Увівши функції

$$g_1^\pm(r) = \frac{1}{2}[g_1(r) \pm g_3(r)], \qquad g_2^\pm(r) = \frac{1}{2}[g_2(r) \pm g_4(r)], \tag{2}$$

перейдемо до двох крайових задач: симетричної задачі з крайовими умовами

$$\frac{1}{2G}\sigma_\vartheta^+\Big|_{\vartheta=\pm\alpha} = g_1^+(r), \qquad \frac{1}{2G}\tau_{r\vartheta}^+\Big|_{\vartheta=\pm\alpha} = \pm g_2^+(r), \tag{3}$$

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2017. − 60, № 4. − С. 90-110.

та антисиметричної задачі з умовами

$$\frac{1}{2G}\sigma_\vartheta^-\Big|_{\vartheta=\pm\alpha} = \pm g_1^-(r), \qquad \frac{1}{2G}\tau_{r\vartheta}^-\Big|_{\vartheta=\pm\alpha} = g_2^-(r). \tag{4}$$

Звичайно, тут мова йде про дзеркальну симетрію відносно полярної осі.

Із застосуванням інтегрального перетворення Мелліна [5] отримаємо переміщення і напруження у кожній точці клина:

$$(u_r^\pm, u_\vartheta^\pm) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\sum_{k=1}^{2}(f_{1k}^\pm(s,\vartheta), f_{2k}^\pm(s,\vartheta))a_k^\pm(s)\right]\frac{r^{-s}\,ds}{s\Delta^\pm(s)},$$

$$\frac{1}{2G}(\sigma_r^\pm, \sigma_\vartheta^\pm, \tau_{r\vartheta}^\pm) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\sum_{k=1}^{2}(f_{3k}^\pm(s,\vartheta), f_{4k}^\pm(s,\vartheta), f_{5k}^\pm(s,\vartheta))a_k^\pm(s)\right]\frac{r^{-s-1}\,ds}{\Delta^\pm(s)}. \tag{5}$$

Тут

$$f_{11}^\pm(s,\vartheta) = (s+m_1)\theta_{sc}^\pm(s,\vartheta) - m_2\theta_{cs}^\pm(s,\vartheta),$$

$$f_{12}^\pm(s,\vartheta) = -(s+m_2)\theta_{ss}^\pm(s,\vartheta) - m_1\theta_{cc}^\pm(s,\vartheta),$$

$$f_{21}^\pm(s,\vartheta) = (s-m_2)\theta_{ss}^\mp(s,\vartheta) - m_1\theta_{cc}^\mp(s,\vartheta),$$

$$f_{22}^\pm(s,\vartheta) = (s-m_1)\theta_{sc}^\mp(s,\vartheta) + m_2\theta_{cs}^\mp(s,\vartheta),$$

$$f_{31}^\pm(s,\vartheta) = -(s+2)\theta_{sc}^\pm(s,\vartheta) + \theta_{cs}^\pm(s,\vartheta),$$

$$f_{32}^\pm(s,\vartheta) = (s+1)\theta_{ss}^\pm(s,\vartheta) + 2\theta_{cc}^\pm(s,\vartheta),$$

$$f_{41}^\pm(s,\vartheta) = s\theta_{sc}^\pm(s,\vartheta) + \theta_{cs}^\pm(s,\vartheta), \qquad f_{42}^\pm(s,\vartheta) = -(s-1)\theta_{ss}^\pm(s,\vartheta),$$

$$f_{51}^\pm(s,\vartheta) = -(s+1)\theta_{ss}^\mp(s,\vartheta), \qquad f_{52}^\pm(s,\vartheta) = -s\theta_{sc}^\mp(s,\vartheta) + \theta_{cs}^\mp(s,\vartheta),$$

$$m_1 = \frac{2(m-1)}{m}, \qquad m_2 = \frac{m-2}{m}, \qquad -1 < c < 0,$$

$$\theta_{ss}^\pm(s,\vartheta) = \sin(\alpha-\vartheta)\sin s(\alpha+\vartheta) \pm \sin(\alpha+\vartheta)\sin s(\alpha-\vartheta),$$

$$\theta_{sc}^\pm(s,\vartheta) = \sin(\alpha-\vartheta)\cos s(\alpha+\vartheta) \pm \sin(\alpha+\vartheta)\cos s(\alpha-\vartheta),$$

$$\theta_{cs}^\pm(s,\vartheta) = \cos(\alpha-\vartheta)\sin s(\alpha+\vartheta) \pm \cos(\alpha+\vartheta)\sin s(\alpha-\vartheta),$$

$$\theta_{cc}^\pm(s,\vartheta) = \cos(\alpha-\vartheta)\cos s(\alpha+\vartheta) \pm \cos(\alpha+\vartheta)\cos s(\alpha-\vartheta),$$

$$a_k^\pm(s) = \int\limits_0^\infty g_k^\pm(r)r^s\,dr, \qquad k = 1,2, \qquad \Delta^\pm(s) = \sin 2s\alpha \pm s\sin 2\alpha, \tag{6}$$

де m – число Пуассона.

Розв'язок вихідної крайової задачі з умовами (1) знаходимо як суперпозицію розв'язків симетричної та антисиметричної задач:

$$(u_r, u_\vartheta, \ldots, \tau_{r\vartheta}) = (u_r^+ + u_r^-, u_\vartheta^+ + u_\vartheta^-, \ldots, \tau_{r\vartheta}^+ + \tau_{r\vartheta}^-). \tag{7}$$

Деякі з функцій $f_{jk}^\pm(s,\vartheta)$, $j = 1,2,\ldots,5$, $k = 1,2$, або їх відношення до $s-1$ чи $s+1$ при $\vartheta = \pm\alpha$ або при всіх ϑ, $-\alpha \le \vartheta \le \alpha$, є парними або непарними за змінною s:

$$f_{12}^{\pm}(-s,\pm\alpha) \equiv f_{12}^{\pm}(s,\pm\alpha), \qquad f_{21}^{\pm}(-s,\pm\alpha) \equiv f_{21}^{\pm}(s,\pm\alpha)\,,$$

$$f_{32}^{\pm}(-s,\pm\alpha) \equiv f_{32}^{\pm}(s,\pm\alpha), \qquad f_{41}^{\pm}(-s,\vartheta) \equiv -f_{41}^{\pm}(s,\vartheta)\,,$$

$$f_{52}^{\pm}(-s,\vartheta) \equiv -f_{52}^{\pm}(s,\vartheta)\,,$$

$$\frac{1}{-s-1} f_{42}^{\pm}(-s,\vartheta) \equiv -\frac{1}{s-1} f_{42}^{\pm}(s,\vartheta), \quad \frac{1}{-s+1} f_{51}^{\pm}(-s,\vartheta) \equiv -\frac{1}{s+1} f_{51}^{\pm}(s,\vartheta). \quad (8)$$

Крім того, у випадку нестисливого матеріалу ($m = 2$) маємо тотожності

$$f_{12}^{\pm}(-s,\vartheta) \equiv f_{12}^{\pm}(s,\vartheta), \qquad f_{21}^{\pm}(-s,\vartheta) \equiv f_{21}^{\pm}(s,\vartheta)\,,$$

$$\frac{1}{-s+1} f_{11}^{\pm}(-s,\vartheta) \equiv \frac{1}{s+1} f_{11}^{\pm}(s,\vartheta), \qquad \frac{1}{-s-1} f_{22}^{\pm}(-s,\vartheta) \equiv \frac{1}{s-1} f_{22}^{\pm}(s,\vartheta). \quad (9)$$

1°. Нехай функції $rg_1(r)$, $rg_3(r)$ є симетричними при перетворенні інверсії відносно точки $r = \ell$, а функції $g_2(r)$, $g_4(r)$ із (1) тотожно дорівнюють нулеві:

$$rg_1(r) \equiv \frac{\ell^2}{r} g_1\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \quad rg_3(r) \equiv \frac{\ell^2}{r} g_3\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \quad g_2(r) \equiv 0, \quad g_4(r) \equiv 0. \quad (10)$$

За формулами (2) маємо

$$rg_1^{\pm}(r) \equiv \frac{\ell^2}{r} g_1^{\pm}\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \qquad g_2^{\pm}(r) \equiv 0. \quad (11)$$

У цьому випадку функції $a_1^{\pm}(s)$ із (6) подаються у вигляді

$$a_1^{\pm}(s) = \ell^s \int_0^{\ell} g_1^{\pm}(r)\left[\left(\frac{r}{\ell}\right)^s + \left(\frac{r}{\ell}\right)^{-s}\right] dr\,, \quad (12)$$

при цьому вони задовольняють тотожності

$$a_1^{\pm}(-s) \equiv \ell^{-2s} a_1^{\pm}(s). \quad (13)$$

Колові переміщення на грані клина $\vartheta = \alpha$, перетворені за інверсією, згідно з (5) мають вигляд

$$u_{\vartheta}^{\pm}\left(\frac{\ell^2}{r},\alpha\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f_{21}^{\pm}(s,\alpha) a_1^{\pm}(s) \left(\frac{\ell^2}{r}\right)^{-s} \frac{ds}{s\Delta^{\pm}(s)}. \quad (14)$$

Замінивши у (14) змінну інтегрування s на $-s$ та врахувавши другу з тотожностей (9), тотожність (13) і непарність функцій $\Delta^{\pm}(s)$ із (6), знайдемо

$$u_{\vartheta}^{\pm}\left(\frac{\ell^2}{r},\alpha\right) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} f_{21}^{\pm}(s,\alpha) a_1^{\pm}(s) \frac{r^{-s}\, ds}{s\Delta^{\pm}(s)}. \quad (15)$$

В останньому інтегралі перемістимо контур інтегрування паралельно самому собі через уявну вісь у положення $\operatorname{Re} s = c$, $-1 < c < 0$. При такому перетворенні інтеграл з точністю до множника $-2\pi i$ зміниться на лишок підінтегральної функції у точці $s = 0$. Точка $s = 0$ є подвійним полюсом підінтегральної функції, на що вказують асимптотичні співвідношення

$$f_{21}^{\pm}(s,\alpha) = -m_1(1 \mp \cos 2\alpha) + O(s^2), \quad \Delta^{\pm}(s) = (2\alpha \pm \sin 2\alpha)s + O(s^3)\,,$$

$$a_1^{\pm}(s) = 2\int_0^{\ell} g_1^{\pm}(r)\,dr + O(s^2), \quad \left(\frac{r}{\ell}\right)^{-s} = 1 - s\ln\frac{r}{\ell} + O(s^2), \quad s \to 0. \quad (16)$$

Обчисливши вказаний лишок, приходимо до тотожності

$$u_{\vartheta}^{\pm}\left(\frac{\ell^2}{r},\alpha\right) \equiv d^{\pm} \ln\frac{r}{\ell} + u_{\vartheta}^{\pm}(r,\alpha), \quad d^{\pm} = -2m_1 \frac{1 \mp \cos 2\alpha}{2\alpha \pm \sin 2\alpha} \int_0^{\ell} g_1^{\pm}(r)\,dr. \quad (17)$$

Із (17), врахувавши (2) і (7), отримаємо

$$u_\vartheta(r,\pm\alpha) \equiv d_1^\pm \ln\frac{r}{\ell} + u_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\pm\alpha\right), \qquad d_1^\pm = m_1\int_0^\ell \psi_1(r,\pm\alpha)\,dr\,,$$

$$\psi_1(r,\vartheta) = \frac{2}{4\alpha^2-\sin^2 2\alpha}\{[2\alpha\cos(\alpha-\vartheta)+\sin 2\alpha\cos(\alpha+\vartheta)]g_1(r) -$$

$$-[2\alpha\cos(\alpha+\vartheta)+\sin 2\alpha\cos(\alpha-\vartheta)]g_3(r)\}\,, \tag{18}$$

тобто функції $u_\vartheta(r,\pm\alpha) - \dfrac{d_1^\pm}{2}\ln\dfrac{r}{\ell}$ симетричні при перетворенні інверсії.

Аналогічно до (18) знайдемо

$$r\sigma_\vartheta(r,\vartheta) \equiv \frac{\ell^2}{r}\sigma_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \; rT_{r\vartheta}(r,\vartheta) \equiv \frac{\ell^2}{r}T_{r\vartheta}\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \; T_{r\vartheta} = \int_r^\infty \tau_{r\vartheta}\frac{dr}{r}\,, \tag{19}$$

що вказує на симетричність функцій $r\sigma_\vartheta(r,\vartheta)$, $rT_{r\vartheta}(r,\vartheta)$ на будь-якому промені $\vartheta = \text{const}$, $-\alpha \le \vartheta \le \alpha$.

У випадку $m = 2$ матимемо

$$u_\vartheta(r,\vartheta) \equiv d_2 \ln\frac{r}{\ell} + u_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad d_2 = \int_0^\ell \psi_1(r,\vartheta)\,dr\,,$$

$$U_r(r,\vartheta) \equiv d_3 \ln\frac{r}{\ell} + U_r\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad U_r = r\int_r^\infty u_r\frac{dr}{r^2}, \qquad d_3 = \int_0^\ell \psi_2(r,\vartheta)\,dr\,,$$

$$\psi_2(r,\vartheta) = \frac{2}{4\alpha^2-\sin^2 2\alpha}\{[2\alpha\sin(\alpha-\vartheta)-\sin 2\alpha\sin(\alpha+\vartheta)]g_1(r) -$$

$$-[2\alpha\sin(\alpha+\vartheta)-\sin 2\alpha\sin(\alpha-\vartheta)]g_3(r)\}\,. \tag{20}$$

Приклад 1. До грані $\vartheta = -\alpha$ у точці $r = \ell$ прикладена нормальна зосереджена сила P, а у всіх інших точках грані $\vartheta = \pm\alpha$ клина вільні від навантаження (рис. 1***а***). У крайових умовах (1) слід покласти $g_3(r) = -\dfrac{P}{2G}\delta(r-\ell)$, де $\delta(r-\ell)$ – дельта-функція Дірака, $g_j(r) \equiv 0$, $j = 1,2,4$. Згідно з тотожністю (18) функції $u_\vartheta(r,\pm\alpha) - \dfrac{1}{2}d_1^\pm \ln\dfrac{r}{\ell}$ симетричні при перетворенні інверсії відносно точки $r = \ell$. При цьому

$$d_1^+ = \frac{m_1 P}{2G}\frac{2\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{4\alpha^2-\sin^2 2\alpha}, \qquad d_1^- = \frac{m_1 P}{4G}\frac{4\alpha + \sin 4\alpha}{4\alpha^2-\sin^2 2\alpha}.$$

За першою тотожністю із (19) помножені на r нормальні колові напруження $\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\alpha}$ симетричні на будь-якому координатному промені $\vartheta = \text{const}$, $-\alpha \le \vartheta \le \alpha$, відносно точки $r = \ell$.

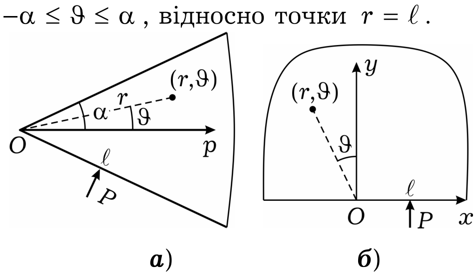

Рис. 1

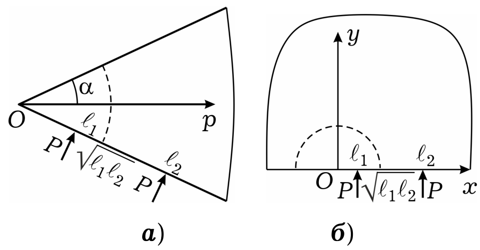

Рис. 2

У випадку $\alpha = \pi/2$ приходимо до задачі Фламана [1] про дію нормальної зосередженої сили P на пружну півплощину $y \ge 0$ (рис. 1**б**). За умови відсутності нормальних переміщень у точці $x = 0$ межі $y = 0$ півплощини, зокрема, маємо

$$u_y(x,0) = -\frac{m_1 P}{2\pi G}\ln\left|\frac{x}{\ell} - 1\right|, \qquad \sigma_\vartheta(r,\vartheta) = -\frac{2P}{\pi}\frac{\ell^2 r\cos^3\vartheta}{(r^2 - 2\ell r\sin\vartheta + \ell^2)^2},$$

$$x + iy = re^{i(\vartheta+\pi/2)}. \tag{21}$$

За цими формулами виконання тотожності

$$u_y(x,0) \equiv -\frac{m_1 P}{2\pi G}\ln\left|\frac{x}{\ell}\right| + u_y\left(\frac{\ell^2}{x},0\right), \tag{22}$$

а також першої із тотожностей (19) перевіряється безпосередньо. Тотожна рівність (22) відображає симетрію інверсії відносно точки $x = \ell$ для додатних x і точки $x = -\ell$ – для від'ємних x.

Отже, у задачі Фламана для функцій $u_y(x,0) + \dfrac{m_1 P}{4\pi G}\ln\left|\dfrac{x}{\ell}\right|$, $\sigma_\vartheta(r,\vartheta)$ маємо безліч симетрій інверсії з початками у довільних точках межі півплощини $x = 0$, які не збігаються з точкою $x = \ell$ прикладання зосередженої сили.

Приклад 2. На грань $\vartheta = -\alpha$ клина діють дві зосереджені сили P, які прикладені у точках $r = \ell_1$, $r = \ell_2$, а інша грань $\vartheta = \alpha$ вільна від навантаження (рис. 2**а**). Розв'язок задачі за принципом суперпозиції є сумою двох розв'язків для кожної із сил P. Тотожності (18), (19), які виконуються для цієї задачі, відповідають інверсії відносно точки $r = \ell = \sqrt{\ell_1\ell_2}$, а сталі $d_1^{\pm}$ удвічі більші, ніж у *прикладі 1*. У випадку півплощини ($\alpha = \pi/2$, рис. 2**б**), як і в задачі Фламана, існує безліч симетрій інверсії з початками на межі півплощини.

2°. У випадку антисиметричних за інверсією функцій $rg_1(r)$, $rg_3(r)$:

$$rg_1(r) \equiv -\frac{\ell^2}{r}g_1\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \quad rg_3(r) \equiv -\frac{\ell^2}{r}g_3\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \quad g_2(r) \equiv 0, \quad g_4(r) \equiv 0, \tag{23}$$

маємо

$$rg_1^{\pm}(r) \equiv -\frac{\ell^2}{r}g_1^{\pm}\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \qquad g_2^{\pm}(r) \equiv 0,$$

$$a_1^{\pm}(s) = \ell^s\int_0^{\ell} g_1^{\pm}(r)\left[\left(\frac{r}{\ell}\right)^s - \left(\frac{r}{\ell}\right)^{-s}\right]dr, \quad a_1^{\pm}(-s) \equiv -\ell^{-2s}a_1^{\pm}(s),$$

$$a_1^{\pm}(s) \sim 2s\int_0^{\ell} g_1^{\pm}(r)\ln\frac{r}{\ell}\,dr, \qquad s \to 0, \tag{24}$$

та приходимо до таких тотожностей:

$$u_\vartheta(r,\pm\alpha) \equiv h_1^{\pm} - u_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\pm\alpha\right), \qquad h_1^{\pm} = m_1\int_0^{\ell}\psi_1(r,\pm\alpha)\ln\frac{r}{\ell}\,dr,$$

$$r\sigma_\vartheta(r,\vartheta) \equiv -\frac{\ell^2}{r}\sigma_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad rT_{r\vartheta}(r,\vartheta) \equiv -\frac{\ell^2}{r}T_{r\vartheta}\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \tag{25}$$

тобто функції $u_\vartheta(r,\pm\alpha) - \dfrac{h_1^{\pm}}{2}$, $r\sigma_\vartheta(r,\vartheta)$, $rT_{r\vartheta}(r,\vartheta)$ є антисиметричними.

Крім того, для $m = 2$ дістаємо, що функції $u_\vartheta(r,\vartheta) - \frac{h_2}{2}$, $U_r(r,\vartheta) - \frac{h_3}{2}$ є антисиметричними:

$$u_\vartheta(r,\vartheta) \equiv h_2 - u_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad h_2 = \int_0^\ell \psi_1(r,\vartheta)\ln\frac{r}{\ell}\,dr\,,$$

$$U_r(r,\vartheta) \equiv h_3 - U_r\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad h_3 = \int_0^\ell \psi_2(r,\vartheta)\ln\frac{r}{\ell}\,dr\,. \tag{26}$$

3°. Якщо

$$rg_2(r) \equiv \frac{\ell^2}{r} g_2\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \quad rg_4(r) \equiv \frac{\ell^2}{r} g_4\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \quad g_1(r) \equiv 0, \quad g_3(r) \equiv 0\,, \tag{27}$$

то

$$u_r(r,\pm\alpha) \equiv d_4^\pm \ln\frac{r}{\ell} + u_r\left(\frac{\ell^2}{r},\pm\alpha\right), \qquad d_4^\pm = m_1\int_0^\ell \psi_3(r,\pm\alpha)\,dr\,,$$

$$\psi_3(r,\vartheta) = -\frac{2}{4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha}\{[2\alpha\cos(\alpha+\vartheta) - \sin 2\alpha\cos(\alpha-\vartheta)]g_2(r) -$$

$$-[2\alpha\cos(\alpha-\vartheta) - \sin 2\alpha\cos(\alpha+\vartheta)]g_4(r)\}\,,$$

$$r\sigma_r(r,\alpha) \equiv -\frac{\ell^2}{r}\sigma_r\left(\frac{\ell^2}{r},\alpha\right), \qquad r\tau_{r\vartheta}(r,\vartheta) \equiv \frac{\ell^2}{r}\tau_{r\vartheta}\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right),$$

$$rS_\vartheta(r,\vartheta) \equiv \frac{\ell^2}{r}S_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad S_\vartheta = \frac{1}{r^2}\int_0^r r\sigma_\vartheta\,dr\,, \tag{28}$$

а при $m = 2$ маємо

$$u_r(r,\vartheta) \equiv d_5 \ln\frac{r}{\ell} + u_r\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad d_5 = \int_0^\ell \psi_3(r,\vartheta)\,dr\,,$$

$$U_\vartheta(r,\vartheta) \equiv d_6 \ln\frac{r}{\ell} + U_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad U_\vartheta = \frac{1}{r}\int_0^r u_\vartheta\,dr, \quad d_6 = \int_0^\ell \psi_4(r,\vartheta)\,dr\,,$$

$$\psi_4(r,\vartheta) = -\frac{2}{4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha}\{[2\alpha\sin(\alpha+\vartheta) + \sin 2\alpha\sin(\alpha-\vartheta)]g_2(r) +$$

$$+[2\alpha\sin(\alpha-\vartheta) + \sin 2\alpha\sin(\alpha+\vartheta)]g_4(r)\}\,. \tag{29}$$

4°. Якщо

$$rg_2(r) \equiv -\frac{\ell^2}{r} g_2\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \quad rg_4(r) \equiv -\frac{\ell^2}{r} g_4\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \quad g_1(r) \equiv 0, \quad g_3(r) \equiv 0\,, \tag{30}$$

то

$$u_r(r,\pm\alpha) \equiv h_4^\pm - u_r\left(\frac{\ell^2}{r},\pm\alpha\right), \quad h_4^\pm = \int_0^\ell \psi_3(r,\pm\alpha)\ln\frac{r}{\ell}\,dr\,,$$

$$r\sigma_r(r,\alpha) \equiv \frac{\ell^2}{r}\sigma_r\left(\frac{\ell^2}{r},\alpha\right),$$

$$r\tau_{r\vartheta}(r,\vartheta) \equiv -\frac{\ell^2}{r}\tau_{r\vartheta}\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad rS_\vartheta(r,\vartheta) \equiv -\frac{\ell^2}{r}S_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right) \tag{31}$$

і для $m = 2$

$$u_r(r,\vartheta) \equiv h_5 - u_r\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad h_5 = \int_0^\ell \psi_3(r,\vartheta)\ln\frac{r}{\ell}\,dr\,,$$

$$U_\vartheta(r,\vartheta) \equiv h_6 - U_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad h_6 = \int_0^\ell \psi_4(r,\vartheta)\ln\frac{r}{\ell}\,dr\,. \tag{32}$$

Коли клин є півплощиною ($\alpha = \pi/2$), у розглядуваній задачі, крім вказаних, існують й інші типи симетрії інверсії. У цьому випадку

$$\Delta^\pm(s) = \sin\pi s\,,$$

$$f_{21}^\pm(s,\pi/2) = f_{12}^\mp(s,\pi/2) = \pm f_{21}^\pm(s,-\pi/2) = \pm f_{12}^\mp(s,-\pi/2) = -m_1(\cos\pi s \pm 1)\,,$$

$$\Delta^\pm(-s+2n) \equiv -\Delta^\pm(s), \qquad f_{21}^\pm(-s+2n,\pm\pi/2) \equiv f_{21}^\pm(s,\pm\pi/2)\,,$$

$$f_{12}^\pm(-s+2n,\pm\pi/2) \equiv f_{12}^\pm(s,\pm\pi/2), \qquad n = 0,\pm1,\pm2,\ldots. \tag{33}$$

5°. Нехай для $\alpha = \pi/2$

$$r^n g_1(r) \equiv \left(\frac{\ell^2}{r}\right)^n g_1\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \quad r^n g_3(r) \equiv \left(\frac{\ell^2}{r}\right)^n g_3\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \qquad n = 0,\pm1,\pm2,\ldots\,,$$

$$g_2(r) \equiv 0, \qquad g_4(r) \equiv 0\,. \tag{34}$$

Тоді

$$r^n g_1^\pm(r) \equiv \left(\frac{\ell^2}{r}\right)^n g_1^\pm\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \qquad g_2^\pm(r) \equiv 0\,,$$

$$a_1^\pm(s) = \ell^s \int_0^\ell g_1^\pm(r)\left[\left(\frac{r}{\ell}\right)^s + \left(\frac{r}{\ell}\right)^{-s+2n-2}\right]dr\,,$$

$$a_1^\pm(-s+2n-2) \equiv \ell^{-2(s-n+1)} a_1^\pm(s)\,. \tag{35}$$

Позначивши

$$u'_\vartheta(r,\vartheta) = \frac{\partial}{\partial r}u_\vartheta(r,\vartheta), \qquad u'^{\pm}_\vartheta(r,\vartheta) = \frac{\partial}{\partial r}u_\vartheta^\pm(r,\vartheta)\,, \tag{36}$$

із (14) після заміни s на $-s+2n-2$ отримаємо

$$u'^{\pm}_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\pm\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{r}{\ell}\right)^{2n} \frac{1}{2\pi i} \int_{-c+2n-2-i\infty}^{c+2n-2+i\infty} f_{21}^\pm\left(s,\pm\frac{\pi}{2}\right) a_1^\pm(s) r^{-s-1}\,\frac{ds}{\Delta^\pm(s)}\,. \tag{37}$$

В останньому інтегралі перемістимо контур інтегрування паралельно самому собі у положення $\operatorname{Re} s = c$, $-1 < c < 0$. Врахувавши лишки підінтегральної функції у точках $s = 0,1,\ldots,2n-2$ при $n = 1,2,\ldots$ або $s = -1,-2,\ldots,2n-1$ при $n = 0,-1,-2,\ldots$, отримаємо

$$r^n u'_\vartheta\left(r,\pm\frac{\pi}{2}\right) \equiv \chi_1^\pm(r) - \left(\frac{\ell^2}{r}\right)^n u'_\vartheta\left(\frac{\ell}{r},\pm\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\chi_1^\pm(r) = \frac{2}{\pi} m_1 \left\{ a_1^+(0) r^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} [a_1^+(2k) \pm a_1^-(2k-1) r] r^{n-2k-1} \right\}, \; n = 1,2,\ldots\,,$$

$$\chi_1^\pm(r) = \frac{2}{\pi} m_1 \left\{ \mp a_1^-(-1) r^n - \sum_{k=1}^{-n} [a_1^+(-2k+2) \pm a_1^-(-2k-1) r^3] r^{n+2k-3} \right\},$$

$$n = 0,-1,\ldots. \tag{38}$$

Приклад 3. У пружну півплощину силами P вдавлюються два штампи з прямолінійними горизонтальними основами $-a \le x \le -b$, $b \le x \le a$ (рис. 3). Нехтуючи силами тертя в області контакту, на межі півплощини маємо такий розв'язок задачі [3]:

$$\sigma_y\Big|_{y=0} = -\frac{2P}{\pi}\frac{|x|}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}}, \qquad b < |x| < a,$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x}\Big|_{y=0} = -\frac{m_1 P}{\pi G}\frac{x\,\mathrm{sgn}(|x|-a)}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}, \quad |x| < b, \quad |x| > a. \tag{39}$$

Напруження на межі півплощини ($\tau_{xy}\Big|_{y=0} \equiv 0$) задовольняють умови симетрії (34) при $n = 0$, $\ell = \sqrt{ab}$ як уздовж додатного, так і вздовж від'ємного напрямку осі абсцис. Функція $\frac{\partial u_y}{\partial x}\Big|_{y=0}$ є антисиметричною уздовж

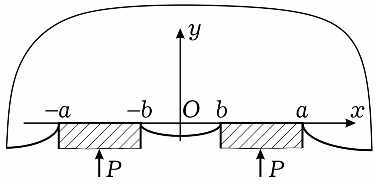

Рис. 3

кожного із вказаних напрямків, що узгоджується з властивістю симетрії (38) при $n = 0$. При цьому $\chi_1^{\pm}(r) \equiv 0$, оскільки $a_1^{-}(s) \equiv 0$, тобто задача є симетричною відносно осі ординат, яка збігається з полярною віссю.

6°. Якщо для $\alpha = \pi/2$

$$r^n g_1(r) \equiv -\left(\frac{\ell^2}{r}\right)^n g_1\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \quad r^n g_3(r) \equiv -\left(\frac{\ell^2}{r}\right)^n g_3\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$g_2(r) \equiv 0, \qquad g_4(r) \equiv 0, \tag{40}$$

то в останніх доданках усіх рівностей (35), (37) знак зміниться на протилежний, і аналогічно до попереднього отримаємо

$$r^n u'_\vartheta\left(r, \pm\frac{\pi}{2}\right) \equiv -\chi_1^{\pm}(r) + \left(\frac{\ell^2}{r}\right)^n u'_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r}, \pm\frac{\pi}{2}\right). \tag{41}$$

7°. Якщо для $\alpha = \pi/2$

$$r^n g_2(r) \equiv (-1)^N \left(\frac{\ell^2}{r}\right)^n g_2\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \qquad r^n g_4(r) \equiv (-1)^N \left(\frac{\ell^2}{r}\right)^n g_4\left(\frac{\ell^2}{r}\right),$$

$$g_1(r) \equiv 0, \qquad g_3(r) \equiv 0, \qquad N = 0,1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{42}$$

то

$$(-1)^N r^n u'_r\left(r, \pm\frac{\pi}{2}\right) \equiv \chi_2^{\pm}(r) - \left(\frac{\ell^2}{r}\right)^n u'_r\left(\frac{\ell^2}{r}, \pm\frac{\pi}{2}\right), \quad u'_r(r,\vartheta) = \frac{\partial}{\partial r} u_r(r,\vartheta),$$

$$\chi_2^{\pm}(r) = \frac{2}{\pi} m_1 \left\{ \pm a_2^{-}(0) r^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\pm a_2^{-}(2k) + a_2^{+}(2k-1) r \right] r^{n-2k-1} \right\},$$

$$n = 1, 2, \ldots,$$

$$\chi_2^{\pm}(r) = -\frac{2}{\pi} m_1 \left\{ a_2^{+}(-1) r^n + \sum_{k=1}^{-n} \left[\pm a_2^{-}(-2k+2) + a_2^{+}(-2k-1) r^3 \right] r^{n+2k-3} \right\},$$

$$n = 0, -1, \ldots. \tag{43}$$

Наступні два випадки базуються на тотожностях

$$f_{21}^{+}(-s+2n-1, \pm\pi/2) + f_{21}^{-}(-s+2n-1, \pm\pi/2) \equiv$$

$$\equiv -f_{21}^{+}(s, \pm\pi/2) - f_{21}^{-}(s, \pm\pi/2),$$

$$f_{21}^{+}(-s+2n-1,\pm\pi/2)-f_{21}^{-}(-s+2n-1,\pm\pi/2)\equiv$$
$$\equiv f_{21}^{+}(s,\pm\pi/2)-f_{21}^{-}(s,\pm\pi/2),$$
$$f_{12}^{+}(-s+2n-1,\pm\pi/2)+f_{12}^{-}(-s+2n-1,\pm\pi/2)\equiv$$
$$\equiv f_{12}^{+}(s,\pm\pi/2)+f_{12}^{-}(s,\pm\pi/2),$$
$$f_{12}^{+}(-s+2n-1,\pm\pi/2)-f_{12}^{-}(-s+2n-1,\pm\pi/2)\equiv$$
$$\equiv -f_{12}^{+}(s,\pm\pi/2)+f_{12}^{-}(s,\pm\pi/2),$$
$$\Delta^{\pm}(-s+2n-1)\equiv\Delta^{\pm}(s),\qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots,\tag{44}$$
для лінійних комбінацій функцій із (33).

8°. Якщо для $\alpha=\pi/2$

$$r^{n-1/2}g_1(r)\equiv(-1)^N\left(\frac{\ell^2}{r}\right)^{n-1/2}g_1\left(\frac{\ell^2}{r}\right),\quad N=0,1,\qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$
$$g_j(r)\equiv 0,\qquad j=2,3,4,\tag{45}$$
то
$$(-1)^N r^{n-1/2}u'_\vartheta\left(r,\pm\frac{\pi}{2}\right)\equiv\chi_3^{\pm}(r)\mp\left(\frac{\ell^2}{r}\right)^{n-1/2}u'_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\pm\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\chi_{3,4}^{\pm}(r)=\frac{2}{\pi}m_1r^{n-1/2}\sum_{k=0}^{2n-3}a_{1,2}(k)(\pm r)^{-k-1},\qquad n=1,2,\ldots,$$
$$\chi_{3,4}^{\pm}(r)=\frac{2}{\pi}m_1r^{n-1/2}\sum_{k=0}^{-2n+1}a_{1,2}(-k-1)(\pm r)^{k},\qquad n=0,-1,\ldots.\tag{46}$$

Приклад 4. У пружну півплощину силою P вдавлюється штамп з прямолінійною горизонтальною основою $a\le x\le b$ (див. рис. 4). За відсутності тертя в області контакту розв'язок задачі на межі півплощини має такий вигляд [1]:

$$\sigma_y\big|_{y=0}=-\frac{P}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},\qquad a<x<b,$$
$$\left.\frac{\partial u_y}{\partial x}\right|_{y=0}=-\frac{m_1P}{2\pi G}\frac{\operatorname{sgn}(x-a)}{\sqrt{(x-a)(x-b)}},\qquad -\infty<x<a,\quad b<x<\infty.\tag{47}$$

Напруження на межі півплощини ($\tau_{xy}\big|_{y=0}\equiv 0$) задовольняють умови симетрії (45) при $N=0$, $n=1$, $\ell=\sqrt{ab}$ як при $x>0$, так і при $x<0$. Функція $\sqrt{|x|}\left.\dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right|_{y=0}$ є антисиметричною при $x>0$ і симетричною при $x<0$, що узгоджується з властивістю симетрії (46), у якій $\chi_3^{\pm}(r)\equiv 0$. Таких симетрій існує безліч, оскільки вибір початку координат на межі півплощини поза областю контакту є довільним. Якщо вибрати початок координат справа від штампа, то функція $\sqrt{|x|}\left.\dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right|_{y=0}$ стане симетричною при $x>0$ і антисиметричною при $x<0$.

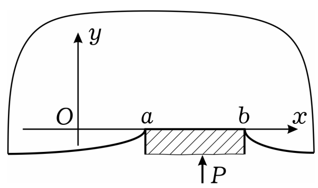

Рис. 4

9°. Якщо для $\alpha = \pi/2$

$$r^{n-1/2} g_2(r) \equiv (-1)^N \left(\frac{\ell^2}{r}\right)^{n-1/2} g_2\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \qquad N = 0{,}1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$g_j(r) \equiv 0, \qquad j = 1, 3, 4, \tag{48}$$

то

$$(-1)^N r^{n-1/2} u_r'\left(r, \pm\frac{\pi}{2}\right) \equiv \pm \chi_4^{\pm}(r) \mp \left(\frac{\ell^2}{r}\right)^{n-1/2} u_r'\left(\frac{\ell^2}{r}, \pm\frac{\pi}{2}\right). \tag{49}$$

Зауважимо, що випадки **5° – 9°** симетрії інверсії виникають також і для $\alpha = \pi$, коли клин є площиною з півнескінченним розрізом. Їх розгляд тут опускаємо.

1.2. Задача I – II. На грані $\vartheta = \alpha$ клина $0 \le r < \infty$, $0 \le \vartheta \le \alpha$ задано умови першої крайової задачі, а на грані $\vartheta = 0$ – однорідні умови другої крайової задачі, тобто грань $\vartheta = 0$ закріплена:

$$\frac{1}{2G}\sigma_\vartheta\Big|_{\vartheta=\alpha} = g_1(r), \quad \frac{1}{2G}\tau_{r\vartheta}\Big|_{\vartheta=\alpha} = g_2(r), \quad u_r\big|_{\vartheta=0} = 0, \quad u_\vartheta\big|_{\vartheta=0} = 0. \tag{50}$$

Розв'язок такої крайової задачі має вигляд

$$(u_r, u_\vartheta) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\sum_{k=1}^{2}\big(f_{1k}(s,\vartheta),\ f_{2k}(s,\vartheta)\big)a_k(s)\right]\frac{r^{-s}\,ds}{s\Delta(s)},$$

$$\frac{1}{2G}(\sigma_r, \sigma_\vartheta, \tau_{r\vartheta}) =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\sum_{k=1}^{2}\big(f_{3k}(s,\vartheta), f_{4k}(s,\vartheta), f_{5k}(s,\vartheta)\big)a_k(s)\right]\frac{r^{-s-1}\,ds}{\Delta(s)}. \tag{51}$$

Тут

$$f_{kk}(s,\vartheta) = [(-1)^k s - m_3]\{[s + (-1)^k m_2]\sin\alpha\cos s(\alpha-\vartheta) +$$

$$+ (-1)^k m_1 \cos\alpha \sin s(\alpha-\vartheta)\}\sin\vartheta +$$

$$+ \frac{m_3}{2}\{(-1)^k m_2 \theta_{cc}^-(s,\vartheta) - [s - (-1)^k m_1]\theta_{ss}^-(s,\vartheta)\},$$

$$f_{k,3-k}(s,\vartheta) = \{(s+m_1)(s-m_3)\sin\alpha\sin s(\alpha-\vartheta) -$$

$$- m_2[(-1)^k s + m_3]\cos\alpha\cos s(\alpha-\vartheta)\}\sin\vartheta +$$

$$+ \frac{m_3}{2}\{m_1\theta_{cs}^-(s,\vartheta) - [(-1)^k s + m_2]\theta_{sc}^-(s,\vartheta)\},$$

$$f_{31}(s,\vartheta) = s(s+2)\sin\alpha\sin\vartheta\cos s(\alpha-\vartheta) + [(m_1 s + 2m^{-1}m_2)\times$$

$$\times \sin s\alpha\cos s\vartheta - (2m^{-1}s - m_1 m_4)\cos s\alpha\sin s\vartheta]\times$$

$$\times \sin(\alpha-\vartheta) + [2m^{-1}m_1\cos s\alpha\cos s\vartheta -$$

$$- m_2 m_4 \sin s\alpha\sin s\vartheta]\cos(\alpha-\vartheta) + \frac{1}{2}s\theta_{ss}^-(s,\vartheta),$$

$$f_{32}(s,\vartheta) = -[s(s-m_2) + 2m^{-1}]\sin\alpha\sin\vartheta\sin s(\alpha-\vartheta) -$$

$$- [2m^{-1}(s-m_1)\cos s\alpha\cos s\vartheta - (2m^{-1}s - m_2 m_4)\times$$

$$\times \sin s\alpha \sin s\vartheta] \sin(\alpha - \vartheta) - [m_1 m_4 \cos s\alpha \sin s\vartheta +$$

$$+2m^{-1} m_2 \sin s\alpha \cos s\vartheta] \cos(\alpha - \vartheta) + m^{-1} s\theta_{\mathrm{sc}}^{-}(s,\ \vartheta),$$

$$f_{k+3,k}(s,\vartheta) = -s^2 \sin\alpha \sin\vartheta \cos s(\alpha - \vartheta) + (m_1^2 \cos s\alpha \cos s\vartheta +$$

$$+ m_2^2 \sin s\alpha \sin s\vartheta) \cos(\alpha - \vartheta) + (-1)^k \frac{1}{2} s[m_1 \theta_{\mathrm{ss}}^{+}(s,\vartheta) +$$

$$+ m_2 \theta_{\mathrm{ss}}^{-}(s,\vartheta)] + m_1 m_2 \sin(\alpha - \vartheta) \sin s(\alpha - \vartheta),$$

$$f_{k+3,3-k}(s,\vartheta) = -s[(-1)^k s + 1] \sin\alpha \sin\vartheta \sin s(\alpha - \vartheta) - \{m_1[s + (-1)^k m_1] \times$$

$$\times \cos s\alpha \cos s\vartheta + m_2[s + (-1)^k m_2] \sin s\alpha \sin s\vartheta\} \times$$

$$\times \sin(\alpha - \vartheta) + (-1)^k m_1 m_2 \cos(\alpha - \vartheta) \sin s(\alpha - \vartheta),$$

$$m_3 = \frac{3m-4}{m}, \quad m_4 = \frac{3m-2}{m}, \quad a_k(s) = \int_0^\infty g_k(r) r^s\, dr, \quad k = 1,2,$$

$$\Delta(s) = m^{-1} m_3 (\cos 2s\alpha - 1) - 2s^2 \sin^2\alpha + 2m_1^2. \tag{52}$$

Три з функцій $f_{jk}(s,\vartheta)$, $j = 1,2,\ldots,5$, $k = 1,2$, при $\vartheta = \alpha$ є непарними за змінною s:

$$f_{12}(-s,\alpha) \equiv -f_{12}(s,\alpha), \qquad f_{21}(-s,\alpha) \equiv -f_{21}(s,\alpha),$$

$$f_{32}(-s,\ \alpha) \equiv -f_{32}(s,\ \alpha), \tag{53}$$

а для нестисливого матеріалу ($m = 2$) при будь-якому ϑ, $0 \le \vartheta \le \alpha$, парними або непарними за s є чотири з цих функцій:

$$f_{12}(-s,\vartheta) \equiv -f_{12}(s,\vartheta), \qquad f_{21}(-s,\vartheta) \equiv -f_{21}(s,\vartheta),$$

$$f_{41}(-s,\vartheta) \equiv f_{41}(s,\vartheta), \qquad f_{52}(-s,\vartheta) \equiv f_{52}(s,\vartheta). \tag{54}$$

1°. У випадку симетричної (антисиметричної) при перетворенні інверсії функції $g_1(r)$ із першої крайової умови (50) і однорідної другої умови (50):

$$r g_1(r) \equiv \pm \frac{\ell^2}{r} g_1\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \qquad g_2(r) \equiv 0, \tag{55}$$

аналогічно до того, як це було зроблено при виведенні властивості (18) для ***задачі I − I***, на підставі другої тотожності (53) знайдемо

$$u_\vartheta(r,\alpha) \equiv \pm u_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\alpha\right). \tag{56}$$

Для нестисливого матеріалу ($m = 2$) із другої та третьої тотожностей (54) отримаємо

$$u_\vartheta(r,\vartheta) \equiv \pm u_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad r\sigma_\vartheta(r,\vartheta) \equiv \pm \frac{\ell^2}{r} \sigma_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right). \tag{57}$$

Приклад 5. У грань $\vartheta = \alpha$ пружного клина на відрізку $\ell_1 \le r \le \ell_2$ поступально вдавлюється штамп з прямолінійною основою (див. рис. 5). Сили тертя в області контакту не враховуються. Грань $\vartheta = 0$ жорстко закріплена, а частина грані $\vartheta = \alpha$ поза областю контакту вільна від напружень.

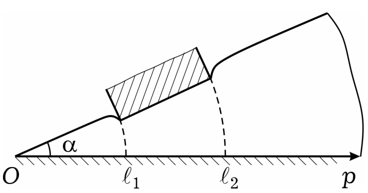

Рис. 5

Крайові умови цієї задачі такі:

$$\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\alpha} = 0, \quad 0 < r < \ell_1, \quad \ell_2 < r < \infty, \quad u_\vartheta\big|_{\vartheta=\alpha} = -\delta, \quad \ell_1 \le r \le \ell_2\ell,$$

$$\tau_{r\vartheta}\big|_{\vartheta=\alpha} = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad u_r\big|_{\vartheta=0} = 0, \quad u_\vartheta\big|_{\vartheta=0} = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad (58)$$

де δ − просідання штампа.

У роботі [4] задача зведена до інтегрального рівняння з різницевим ядром на інтервалі $0 < \xi < a$, $a = \ln\dfrac{\ell_2}{\ell_1}$, відносно функції $\varphi(\xi) = g_1(\ell_2 e^{-\xi})e^{-\xi}$, $g_1(r) = \dfrac{1}{2G}\sigma_\vartheta\Big|_{\vartheta=\alpha}$, $\ell_1 < r < \ell_2$, яке розв'язано зведенням до нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь методом Вінера − Гопфа. Показано, що розв'язок $\varphi(\xi)$ інтегрального рівняння є парною функцією, що еквівалентно симетричності помножених на r напружень $\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\alpha}$ на інтервалі $\ell_1 < r < \ell_2$ при перетворенні інверсії відносно точки $r = \ell = \sqrt{\ell_1\ell_2}$. Отже, з урахуванням першої з крайових умов (58) функція $r\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\alpha}$ є симетричною на всьому інтервалі $0 < r < \infty$. Тобто маємо випадок симетрії (55) (верхній знак) основної ***задачі I − II***, коли справджуються тотожності (56), (57).

2. У випадку

$$rg_2(r) \equiv \pm\frac{\ell^2}{r}g_2\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \qquad g_1(r) \equiv 0 \qquad (59)$$

з огляду на першу та третю тотожності з (53) знаходимо

$$u_r(r,\alpha) \equiv \pm u_r\left(\frac{\ell^2}{r},\alpha\right), \qquad r\sigma_r(r,\alpha) \equiv \mp\frac{\ell^2}{r}\sigma_r\left(\frac{\ell^2}{r},\alpha\right). \qquad (60)$$

Для $m = 2$ із першої і четвертої тотожності з (54) матимемо

$$u_r(r,\vartheta) \equiv \pm u_r\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad r\tau_{r\vartheta}(r,\vartheta) \equiv \pm\frac{\ell^2}{r}\tau_{r\vartheta}\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right). \qquad (61)$$

1.3. Задача I − III. На грані $\vartheta = \alpha$ клина $0 \le r < \infty$, $0 \le \vartheta \le \alpha$ задано умови першої крайової задачі, а на грані $\vartheta = 0$ − умови гладкого контакту (***задачі III***):

$$\frac{\partial u_\vartheta}{\partial r}\Big|_{\vartheta=0} = g_0(r), \quad \tau_{r\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = 0, \quad \frac{1}{2G}\sigma_\vartheta\Big|_{\vartheta=\alpha} = g_1(r), \quad \frac{1}{2G}\tau_{r\vartheta}\Big|_{\vartheta=\alpha} = g_2(r). \quad (62)$$

Розв'язок цієї крайової задачі має вигляд

$$(u_r, u_\vartheta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\sum_{k=0}^{2}(\tilde f_{1k}(s,\vartheta), \tilde f_{2k}(s,\vartheta))a_k(s)\right]\frac{r^{-s}}{s\Delta^+(s)}ds,$$

$$\frac{1}{2G}(\sigma_r, \sigma_\vartheta, \tau_{r\vartheta}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\sum_{k=0}^{2}(\tilde f_{3k}(s,\vartheta), \tilde f_{4k}(s,\vartheta), \tilde f_{5k}(s,\vartheta))a_k(s)\right]\frac{r^{-s-1}}{\Delta^+(s)}ds. \qquad (63)$$

Тут

$$\tilde f_{10}(s,\vartheta) = (s + m_1)[s\sin\alpha\cos s\vartheta\sin(\alpha-\vartheta) - \sin s\alpha\sin\vartheta\cos s(\alpha-\vartheta)] -$$

$$- m_2[s\sin\alpha\sin s\vartheta\cos(\alpha-\vartheta) - \sin s\alpha\cos\vartheta\sin s(\alpha-\vartheta)],$$

$$\tilde{f}_{20}(s,\vartheta) = (s - m_2)[s\sin\alpha\sin s\vartheta\sin(\alpha-\vartheta) + \sin s\alpha\sin\vartheta\cos s(\alpha-\vartheta)] -$$

$$- m_1[s\sin\alpha\cos s\vartheta\cos(\alpha-\vartheta) + \sin s\alpha\cos\vartheta\cos s(\alpha-\vartheta)]\,,$$

$$\tilde{f}_{30}(s,\vartheta) = s\sin\alpha\sin s\vartheta\cos(\alpha-\vartheta) - \sin s\alpha\cos\vartheta\sin s(\alpha-\vartheta) -$$

$$-(s+2)[s\sin\alpha\cos s\vartheta\sin(\alpha-\vartheta) - \sin s\alpha\sin\vartheta\cos s(\alpha-\vartheta)]\,,$$

$$\tilde{f}_{40}(s,\vartheta) = s^2\sin\alpha\cos s\vartheta\sin(\alpha-\vartheta) + s[\sin\alpha\sin s\vartheta\cos(\alpha-\vartheta) -$$

$$-\sin s\alpha\sin\vartheta\cos s(\alpha-\vartheta)] - \sin s\alpha\cos\vartheta\sin s(\alpha-\vartheta)\,,$$

$$\tilde{f}_{50}(s,\vartheta) = -(s+1)[s\sin\alpha\sin s\vartheta\sin(\alpha-\vartheta) + \sin s\alpha\sin\vartheta\sin s(\alpha-\vartheta)]\,,$$

$$\tilde{f}_{jk}(s,\vartheta) = f^{+}_{jk}(s,\vartheta), \qquad j = 1,2,\ldots,5\,,$$

$$a_0(s) = \frac{2}{m_1}\int_0^\infty g_0(r)r^s\,dr, \qquad a_k(s) = \int_0^\infty g_k(r)r^s\,dr, \qquad k = 1,2\,. \tag{64}$$

Відмітимо такі умови парності та непарності функцій із (64):

$$\tilde{f}_{12}(-s,\alpha) \equiv \tilde{f}_{12}(s,\alpha), \quad \tilde{f}_{20}(-s,\alpha) \equiv -\tilde{f}_{20}(s,\alpha), \quad \tilde{f}_{21}(-s,\alpha) \equiv \tilde{f}_{21}(s,\alpha)\,,$$

$$\tilde{f}_{32}(-s,\alpha) \equiv \tilde{f}_{32}(s,\alpha), \qquad \frac{1}{-s+1}\tilde{f}_{30}(-s,\alpha) \equiv -\frac{1}{s+1}\tilde{f}_{30}(s,\alpha)\,,$$

$$\tilde{f}_{40}(-s,\vartheta) \equiv \tilde{f}_{40}(s,\vartheta), \quad \tilde{f}_{41}(-s,\vartheta) \equiv -\tilde{f}_{41}(s,\vartheta), \quad \tilde{f}_{52}(-s,\vartheta) \equiv -\tilde{f}_{52}(s,\vartheta)\,,$$

$$\frac{1}{-s-1}\tilde{f}_{42}(-s,\vartheta) \equiv -\frac{1}{s-1}\tilde{f}_{42}(s,\vartheta), \qquad \frac{1}{-s+1}\tilde{f}_{50}(-s,\vartheta) \equiv \frac{1}{s+1}\tilde{f}_{50}(s,\vartheta)\,,$$

$$\frac{1}{-s+1}\tilde{f}_{51}(-s,\vartheta) \equiv -\frac{1}{s+1}\tilde{f}_{51}(s,\vartheta)\,. \tag{65}$$

Крім того, при $m = 2$ маємо

$$\tilde{f}_{12}(-s,\vartheta) \equiv \tilde{f}_{12}(s,\vartheta), \qquad \tilde{f}_{20}(-s,\vartheta) \equiv -\tilde{f}_{20}(s,\vartheta)\,,$$

$$\tilde{f}_{21}(-s,\vartheta) \equiv \tilde{f}_{21}(s,\vartheta), \qquad \frac{1}{-s+1}\tilde{f}_{10}(-s,\vartheta) \equiv -\frac{1}{s+1}\tilde{f}_{10}(s,\vartheta)\,,$$

$$\frac{1}{-s+1}\tilde{f}_{11}(-s,\vartheta) \equiv \frac{1}{s+1}\tilde{f}_{11}(s,\vartheta), \qquad \frac{1}{-s-1}\tilde{f}_{22}(-s,\vartheta) \equiv \frac{1}{s-1}\tilde{f}_{22}(s,\vartheta)\,. \tag{66}$$

1°. У випадку

$$rg_0(r) \equiv -\frac{\ell^2}{r}g_0\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \qquad rg_1(r) \equiv \frac{\ell^2}{r}g_1\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \qquad g_2(r) \equiv 0 \tag{67}$$

маємо

$$u_\vartheta(r,\alpha) \equiv d_7\ln\frac{r}{\ell} + u_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\alpha\right), \qquad d_7 = 2m_1\frac{1-\cos 2\alpha}{2\alpha+\sin 2\alpha}\int_0^\ell g_1(r)\,dr\,,$$

$$r\sigma_\vartheta(r,\vartheta) \equiv \frac{\ell^2}{r}\sigma_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad rT_{r\vartheta}(r,\vartheta) \equiv \frac{\ell^2}{r}T_{r\vartheta}\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right). \tag{68}$$

Для $m = 2$ знаходимо

$$u_\vartheta(r,\vartheta) \equiv d_8\ln\frac{r}{\ell} + u_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad d_8 = 4\frac{\sin\alpha\sin\vartheta}{2\alpha+\sin 2\alpha}\int_0^\ell g_1(r)\,dr\,,$$

$$U_r(r,\vartheta) \equiv d_9 \ln\frac{r}{\ell} + U_r\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad d_9 = -4\frac{\sin\alpha\cos\vartheta}{2\alpha+\sin 2\alpha}\int_0^\ell g_1(r)\,dr. \tag{69}$$

2°. Якщо

$$rg_0(r) \equiv \frac{\ell^2}{r} g_0\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \quad rg_1(r) \equiv -\frac{\ell^2}{r} g_1\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \quad g_2(r) \equiv 0\,, \tag{70}$$

то

$$u_\vartheta(r,\alpha) \equiv h_7 - u_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\alpha\right),$$

$$h_7 = \frac{4}{2\alpha+\sin 2\alpha}\int_0^\ell \left[(\sin\alpha + \alpha\cos\alpha) g_0(r) + \frac{1}{2} m_1 (1-\cos 2\alpha) g_1(r) \ln\frac{r}{\ell}\right] dr\,,$$

$$r\sigma_\vartheta(r,\vartheta) \equiv -\frac{\ell^2}{r}\sigma_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad rT_{r\vartheta}(r,\vartheta) \equiv -\frac{\ell^2}{r} T_{r\vartheta}\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \tag{71}$$

а при $m = 2$

$$u_\vartheta(r,\vartheta) \equiv h_8 - u_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad U_r(r,\vartheta) \equiv h_9 - U_r\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \tag{72}$$

$$h_8 = \frac{4}{2\alpha+\sin 2\alpha}\times$$

$$\times\int_0^\ell \left\{[\sin\alpha\cos(\alpha-\vartheta) + \alpha\cos\vartheta] g_0(r) + \sin\alpha\sin\vartheta\cdot g_1(r)\ln\frac{r}{\ell}\right\} dr\,,$$

$$h_9 = -\frac{4}{2\alpha+\sin 2\alpha}\times$$

$$\times\int_0^\ell \left\{[\sin\alpha\sin(\alpha-\vartheta) - \alpha\sin\vartheta] g_0(r) + \sin\alpha\cos\vartheta\cdot g_1(r)\ln\frac{r}{\ell}\right\} dr\,.$$

Приклад 6. Пружний клин $0 \le r < \infty$, $-\alpha \le \vartheta \le \alpha$ розклинюється жорсткою пластинкою товщини $2h$ уздовж тріщини $0 \le r < \ell_2$, $\vartheta = 0$ (рис. 6). На відрізку $0 \le r \le \ell_1$, $\ell_1 < \ell_2$, береги тріщини $\vartheta = \pm 0$ гладко контактують з поверхнею пластинки. Грані пружного клина $0 \le r < \infty$, $\vartheta = \pm\alpha$ та береги тріщини поза областю контакту $\ell_1 < r < \ell_2$ вільні від напружень.

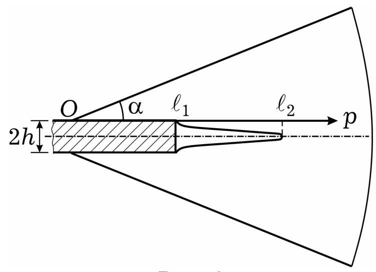

Рис. 6

Зважаючи на симетрію задачі можна обмежитися розглядом верхнього півклина $0 \le r < \infty$, $0 \le \vartheta \le \alpha$, на межі якого крайові є такими:

$$u_\vartheta\big|_{\vartheta=0} = 0,\ 0 \le r \le \ell_1,\ u_\vartheta\big|_{\vartheta=0} = -h,\ \ell_2 \le r < \infty,\ \sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=0} = 0,\ \ell_1 < r < \ell_2,$$

$$\tau_{r\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = 0,\quad 0 < r < \infty,\quad \sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\alpha} = 0,\quad \tau_{r\vartheta}\big|_{\vartheta=\alpha} = 0,\quad 0 < r < \infty. \tag{73}$$

За цими умовами задані на проміжках $0 \le r \le \ell_1$, $\ell_2 \le r < \infty$ відносні переміщення $u_\vartheta\big|_{\vartheta=0} + h/2$ є антисиметричними, а задані на інтервалі $\ell_1 < r < \ell_2$ напруження $\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=0}$, помножені на r, є симетричними за інверсією відносно точки $r = \ell = \sqrt{\ell_1 \ell_2}$.

У роботі [2] задача розв'язана зведенням до інтегрального рівняння з різницевим ядром на інтервалі $0 < \xi < a$, $a = \ln\dfrac{\ell_2}{\ell_1}$, відносно функції $\varphi(\xi) = g_0(\ell_2 e^{-\xi})e^{-\xi}$, $g_0(r) = \left.\dfrac{\partial u_\vartheta}{\partial r}\right|_{\vartheta=0}$, $\ell_1 < r < \ell_2$. Показано, що розв'язок $\varphi(\xi)$ інтегрального рівняння є парною функцією, що еквівалентно антисиметричності відносних переміщень $u_\vartheta|_{\vartheta=0} + h/2$ на інтервалі $\ell_1 < r < \ell_2$. Отже, відносні переміщення $u_\vartheta|_{\vartheta=0} + h/2$ виявляються антисиметричними на всьому проміжку $0 \le r < \infty$. Тобто маємо випадок симетрії (70) основної ***задачі I – III*** ($g_1(r) \equiv 0$), за яким виконуються тотожності (71), (72). Друга з тотожностей (71), зокрема, показує, що нормальні напруження σ_ϑ є від'ємними у секторі $r < \ell$, $-\alpha < \vartheta < \alpha$, додатними при $r > \ell$, $-\alpha < \vartheta < \alpha$ і дорівнюють нулеві на дузі кола $r = \ell$, $-\alpha \le \vartheta \le \alpha$.

У випадку $\alpha = \pi$ маємо задачу про розклинювання пружної площини з півнескінченною тріщиною $-\infty < x < \ell_2$, $y = 0$ скінченною пластинкою ($0 \le x \le \ell_1$) довжини ℓ_1, розв'язок якої [3] виражається через елементарні функції:

$$\left.\frac{\partial u_y}{\partial x}\right|_{y=0} = -\frac{\operatorname{sgn} x \cdot m_1 C}{\sqrt{x(x-\ell_1)(\ell_2 - x)}}, \qquad -\infty < x < 0, \quad \ell_1 < x < \ell_2,$$

$$\frac{1}{2G}\left.\sigma_y\right|_{y=0} = \frac{\operatorname{sgn}(x-\ell_1)C}{\sqrt{x(\ell_1 - x)(\ell_2 - x)}}, \qquad 0 < x < \ell_1, \quad \ell_2 < x < \infty,$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_\vartheta = C\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\sqrt{z(z-\ell_1)(z-\ell_2)}}\left[1 + \frac{i}{2}y\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-\ell_1} + \frac{1}{z-\ell_2}\right)e^{2i\vartheta}\right]\right\},$$

$$C = \frac{h\sqrt{\ell_2}}{2m_1\mathbf{K}\left(\sqrt{1-\ell_1/\ell_2}\right)}, \qquad z = x + iy = re^{i\vartheta}, \tag{74}$$

де $\mathbf{K}(k)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду. За цими виразами виконання першої з тотожностей (70) і продиференційованої першої з тотожностей (71), а також другої з тотожностей (71) як для $\vartheta = 0$ ($y = 0$, $x > 0$), так і для довільного ϑ, $-\alpha \le \vartheta \le \alpha$, можна перевірити безпосередньо.

3°. Якщо

$$rg_2(r) \equiv \frac{\ell^2}{r}g_2\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \qquad g_0(r) \equiv 0, \qquad g_1(r) \equiv 0, \tag{75}$$

то

$$u_r(r,\alpha) \equiv d_{10}\ln\frac{r}{\ell} + u_r\left(\frac{\ell^2}{r},\alpha\right), \quad d_{10} = -2m_1\frac{1+\cos 2\alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha}\int_0^\ell g_3(r)\,dr,$$

$$r\sigma_r(r,\alpha) \equiv -\frac{\ell^2}{r}\sigma_r\left(\frac{\ell^2}{r},\alpha\right),$$

$$r\tau_{r\vartheta}(r,\vartheta) \equiv \frac{\ell^2}{r}\tau_{r\vartheta}\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad rS_\vartheta(r,\vartheta) \equiv \frac{\ell^2}{r}S_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \tag{76}$$

а при $m = 2$

$$u_r(r,\vartheta) \equiv d_{11}\ln\frac{r}{\ell} + u_r\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \quad d_{11} = -4\frac{\cos\alpha\cos\vartheta}{2\alpha + \sin 2\alpha}\int_0^\ell g_3(r)\,dr. \tag{77}$$

4°. Якщо

$$rg_2(r) \equiv -\frac{\ell^2}{r} g_2\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \qquad g_0(r) \equiv 0, \qquad g_1(r) \equiv 0\,, \tag{78}$$

то

$$u_r(r,\alpha) \equiv h_{10} - u_r\left(\frac{\ell^2}{r},\alpha\right), \qquad h_{10} = -2m_1 \frac{1+\cos 2\alpha}{2\alpha+\sin 2\alpha} \int_0^\ell g_3(r) \ln\frac{r}{\ell}\, dr\,,$$

$$r\sigma_r(r,\alpha) \equiv \frac{\ell^2}{r} \sigma_r\left(\frac{\ell^2}{r},\alpha\right),$$

$$r\tau_{r\vartheta}(r,\vartheta) \equiv -\frac{\ell^2}{r} \tau_{r\vartheta}\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad rS_\vartheta(r,\vartheta) \equiv -\frac{\ell^2}{r} S_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \tag{79}$$

а при $m = 2$

$$u_r(r,\vartheta) \equiv h_{11} - u_r\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad h_{11} = -4 \frac{\cos\alpha\cos\vartheta}{2\alpha+\sin 2\alpha} \int_0^\ell g_3(r) \ln\frac{r}{\ell}\, dr\,. \tag{80}$$

Коли клин є чвертьплощиною ($\alpha = \pi/2$), маємо

$$\Delta^+(s) = \sin \pi s, \qquad \frac{1}{s} \tilde{f}_{20}(s,\pi/2) \equiv \tilde{f}(s) = -m_1 \cos\frac{\pi s}{2}\,,$$

$$\Delta^\pm(-s+2n) \equiv -\Delta^\pm(s), \qquad \tilde{f}(-s+2n) \equiv (-1)^n \tilde{f}(s), \qquad n = 0,\pm1,\pm2,\ldots . \tag{81}$$

5°. Нехай для $\alpha = \pi/2$

$$r^n g_0(r) \equiv \pm\left(\frac{\ell^2}{r}\right)^n g_0\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \quad n = 0,\pm1,\pm2,\ldots, \quad g_1(r) \equiv 0, \quad g_2(r) \equiv 0\,. \tag{82}$$

Тоді аналогічно до випадку ***5° задачі I – I***, спираючись на тотожності (81), отримаємо

$$r^{n-1} u_\vartheta\left(r,\frac{\pi}{2}\right) \equiv \pm\chi_5(r) \mp \left(-\frac{\ell^2}{r}\right)^{n-1} u_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{r},\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\chi_5(r) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0(2k) r^{n-2k-1}, \qquad n = 1,2,\ldots,$$

$$\chi_5(r) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{-n-1} (-1)^k a_0(-2k) r^{n+2k-1}, \qquad n = 0,-1,\ldots . \tag{83}$$

Зауважимо, що випадок **5°** виникає також і для $\alpha = 3\pi/2$. Його розгляд опускаємо.

1.4. Задача II – III. У клині $0 \le r < \infty$, $0 \le \vartheta \le \alpha$ грань $\vartheta = 0$ закріплена, а на грані $\vartheta = \alpha$ задано умови гладкого контакту:

$$u_r\big|_{\vartheta=0} = 0, \quad u_\vartheta\big|_{\vartheta=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_\vartheta}{\partial r}\right|_{\vartheta=\alpha} = g_0(r), \quad \tau_{r\vartheta}\big|_{\vartheta=\alpha} = 0\,. \tag{84}$$

Розв’язок цієї задачі має вигляд (51), (52), де необхідно покласти

$$g_1(r) = -\frac{1}{2m(m-1)} g_0(r), \quad g_2(r) \equiv 0, \quad \Delta(s) = m_3 \sin 2s\alpha - s\sin 2\alpha \tag{85}$$

та накласти умову

$$\int_0^\infty g_0(r)\, dr = 0\,, \tag{86}$$

яка з огляду на рівність

$$\sigma_\vartheta(\infty,\vartheta) = \frac{4\cos(\alpha-\vartheta)}{2(3m-4)\alpha - m\sin 2\alpha}\int_0^\infty g_0(r)\,dr \tag{87}$$

є еквівалентною до умови згасання на нескінченності напружень σ_ϑ, необхідної для можливості застосування інтегрального перетворення Мелліна.

Те, що розв'язок ***задачі II − III*** з урахуванням замін (85) повторює розв'язок (51), (52) ***задачі I − II***, пояснюється наступним. Три із чотирьох крайових умов (50) і (84) є однорідними та спільними для обох задач. Це веде до того, що в системах лінійних алгебричних рівнянь четвертого порядку для визначення сталих, які входять до трансформант переміщень і напружень, три рівняння є також однорідними та спільними для обох задач. Тому три будь-які сталі виражаються через четверту сталу однаково, або всі чотири сталі знаходяться між собою в одних і тих же відношеннях у кожній із задач. Отже, вирази для трансформант переміщень і напружень цих задач є пропорційними. Характеристичні визначники $\Delta(s)$ ***задач I − II***, ***II − III*** відрізняються між собою.

У випадку

$$r g_0(r) \equiv \pm\frac{\ell^2}{r}\, g_0\!\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \tag{88}$$

як випливає із (55)–(57), з урахуванням умови (86) маємо

$$r\sigma_\vartheta(r,\alpha) \equiv \mp\frac{\ell^2}{r}\,\sigma_\vartheta\!\left(\frac{\ell^2}{r},\alpha\right), \qquad m \ge 2\,,$$

$$u_\vartheta(r,\vartheta) \equiv \mp u_\vartheta\!\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \quad r\sigma_\vartheta(r,\vartheta) \equiv \mp\frac{\ell^2}{r}\,\sigma_\vartheta\!\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \quad m = 2\,. \tag{89}$$

1.5. Задача III − III. На обох гранях $\vartheta = \pm\alpha$ клина $0 \le r < \infty$, $-\alpha \le \vartheta \le$ $\le \alpha$ задано умови гладкого контакту:

$$\left.\frac{\partial u_\vartheta}{\partial r}\right|_{\vartheta=\alpha} = g_{10}(r), \quad \left.\tau_{r\vartheta}\right|_{\vartheta=\alpha} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_\vartheta}{\partial r}\right|_{\vartheta=-\alpha} = g_{20}(r), \quad \left.\tau_{r\vartheta}\right|_{\vartheta=-\alpha} = 0\,. \tag{90}$$

Як і в ***задачі I − I***, введенням функцій

$$g_0^{\pm}(r) = \frac{1}{2}\left[g_{10}(r) \pm g_{20}(r)\right], \tag{91}$$

перейдемо до симетричної та антисиметричної задачі з крайовими умовами:

$$\left.\frac{\partial u_\vartheta^+}{\partial r}\right|_{\vartheta=\pm\alpha} = \pm g_0^+(r), \qquad \left.\tau_{r\vartheta}^+\right|_{\vartheta=\alpha} = 0\,,$$

$$\left.\frac{\partial u_\vartheta^-}{\partial r}\right|_{\vartheta=\pm\alpha} = g_0^-(r), \qquad \left.\tau_{r\vartheta}^-\right|_{\vartheta=\alpha} = 0 \tag{92}$$

відповідно.

Розв'язок задачі з умовами (90) має вигляд (5) − (7), де необхідно покласти

$$g_1(r) = \frac{1}{2(m-1)}\,g_{10}(r), \quad g_3(r) = \frac{1}{2(m-1)}\,g_{20}(r), \quad g_{2,4}(r) \equiv 0\,,$$

$$g_1^{\pm}(r) = \frac{1}{2(m-1)}\,g_0^{\pm}(r), \quad g_2^{\pm}(r) \equiv 0, \quad \Delta^{\pm}(s) = \cos 2s\alpha \mp \cos 2\alpha\,. \tag{93}$$

У випадку

$$rg_0(r) \equiv \mp \frac{\ell^2}{r} g_0\left(\frac{\ell^2}{r}\right) \qquad (94)$$

справджуються рівності (19), (20), (25), (26), у яких

$$d_2 = 0, \qquad d_3 = 0\,,$$

$$h_2 = -\frac{2}{\sin 2\alpha}\int_0^{\ell}[\sin(\alpha - \vartheta)g_{10}(r) + \sin(\alpha + \vartheta)g_{20}(r)]\,dr\,,$$

$$h_3 = \frac{1}{\sin 2\alpha}\int_0^{\ell}[\cos(\alpha + \vartheta)g_{10}(r) - \cos(\alpha - \vartheta)g_{20}(r)]\,dr\,. \qquad (95)$$

2. Антиплоска деформація. Єдина тотожно відмінна від нуля компонента u_z вектора переміщень є гармонічною функцією. Через u_z напруження виражаються так:

$$\tau_{rz} = G\frac{\partial u_z}{\partial r}, \qquad \tau_{\vartheta z} = G\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \vartheta}\,. \qquad (96)$$

2.1. Задача Неймана. На гранях $\vartheta = \pm\alpha$ клина $0 \le r < \infty$, $-\alpha \le \vartheta \le \alpha$ задано напруження:

$$\frac{1}{G}\tau_{\vartheta z}\Big|_{\vartheta=\alpha} = g_1(r), \qquad \frac{1}{G}\tau_{\vartheta z}\Big|_{\vartheta=-\alpha} = g_2(r)\,. \qquad (97)$$

Інтегральним перетворенням Мелліна отримаємо розв'язок задачі

$$u_z = \frac{1}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\left(\frac{\sin s\vartheta}{\cos s\alpha} - \frac{\cos s\vartheta}{\sin s\alpha}\right)a_1(s) + \left(\frac{\sin s\vartheta}{\cos s\alpha} + \frac{\cos s\vartheta}{\sin s\alpha}\right)a_2(s)\right]\frac{r^{-s}}{s}\,ds\,,$$

$$a_k(s) = \int_0^{\infty} g_k(r)r^s\,dr, \qquad k = 1,2\,. \qquad (98)$$

1°. У випадку

$$rg_k(r) \equiv \frac{\ell^2}{r} g_k\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \qquad k = 1,2\,, \qquad (99)$$

аналогічно до виведення формул (18) знаходимо тотожності

$$u_z(r,\vartheta) \equiv d'\ln\frac{r}{\ell} + u_z\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad d' = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\ell}[g_1(r) - g_2(r)]\,dr\,,$$

$$r\tau_{rz}(r,\vartheta) \equiv d'G - \frac{\ell^2}{r}\tau_{rz}\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \quad r\tau_{\vartheta z}(r,\vartheta) \equiv \frac{\ell^2}{r}\tau_{\vartheta z}\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right). \qquad (100)$$

При цьому дві останні тотожності отримані диференціюванням першої з тотожностей (100) згідно з рівностями (96).

2°. У випадку

$$rg_k(r) \equiv -\frac{\ell^2}{r} g_k\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \qquad k = 1,2\,, \qquad (101)$$

отримуємо

$$u_z(r,\vartheta) \equiv h' - u_z\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad h' = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\ell}[g_1(r) - g_2(r)]\ln\frac{r}{\ell}\,dr\,,$$

$$r\tau_{rz}(r,\vartheta) \equiv \frac{\ell^2}{r}\tau_{rz}\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \quad r\tau_{\vartheta z}(r,\vartheta) \equiv -\frac{\ell^2}{r}\tau_{\vartheta z}\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right). \qquad (102)$$

2.2. Задача Діріхле. На гранях $\vartheta = \pm\alpha$ клина $0 \le r < \infty$, $-\alpha \le \vartheta \le \alpha$ задано переміщення:

$$u_z\big|_{\vartheta=\alpha} = g_{10}(r), \qquad u_z\big|_{\vartheta=-\alpha} = g_{20}(r),$$

$$g_{10}(0) = 0, \qquad g_{20}(0) = 0. \tag{103}$$

Розв'язок задачі має вигляд

$$u_z = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\left(\frac{\cos s\vartheta}{\cos s\alpha} + \frac{\sin s\vartheta}{\sin s\alpha}\right)a_1(s) + \left(\frac{\cos s\vartheta}{\cos s\alpha} - \frac{\sin s\vartheta}{\sin s\alpha}\right)a_2(s)\right]r^{-s}\,ds,$$

$$a_k(s) = \int\limits_0^\infty g_{k0}(r)r^{s-1}\,dr, \qquad k = 1,2. \tag{104}$$

1°. У випадку

$$g_{k0}(r) \equiv g_{k0}(\infty) - g_{k0}\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \qquad k = 1,2, \tag{105}$$

маємо тотожності

$$u_z(r,\vartheta) \equiv h_1' - u_z\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad h_1' = \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{\vartheta}{\alpha}\right)g_{10}(\infty) + \left(1-\frac{\vartheta}{\alpha}\right)g_{20}(\infty)\right],$$

$$r\tau_{rz}(r,\vartheta) \equiv \frac{\ell^2}{r}\tau_{rz}\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right), \qquad r\tau_{\vartheta z}(r,\vartheta) \equiv h_2'G - \frac{\ell^2}{r}\tau_{\vartheta z}\left(\frac{\ell^2}{r},\vartheta\right),$$

$$h_2' = \frac{1}{2\alpha}[g_{10}(\infty) - g_{20}(\infty)]. \tag{106}$$

2°. Якщо

$$g_{k0}(r) \equiv g_{k0}\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \qquad k = 1,2, \tag{107}$$

приходимо до тотожностей (100), у яких $d' = 0$.

2.3. Основна змішана задача. На грані $\vartheta = 0$ клина $0 \le r < \infty$, $0 \le \vartheta \le$ $\le \alpha$ задано переміщення, а на грані $\vartheta = \alpha$ − напруження:

$$u_z\big|_{\vartheta=0} = g_0(r), \qquad g_0(0) = 0, \qquad \frac{1}{G}\tau_{\vartheta z}\Big|_{\vartheta=\alpha} = g_1(r). \tag{108}$$

Розв'язок цієї задачі виражається у вигляді

$$u_z = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}[sa_0(s)\cos s(\alpha-\vartheta) + a_1(s)\sin s\vartheta]\frac{r^{-s}\,ds}{s\cos s\alpha},$$

$$a_0(s) = \int\limits_0^\infty g_0(r)r^{s-1}\,dr, \qquad a_1(s) = \int\limits_0^\infty g_1(r)r^s\,dr. \tag{109}$$

1°. У випадку

$$g_0(r) \equiv g_0\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \qquad rg_1(r) \equiv \frac{\ell^2}{r}g_1\left(\frac{\ell^2}{r}\right) \tag{110}$$

маємо тотожності (100) при $d' = 0$.

2°. У випадку

$$g_0(r) \equiv g_0(\infty) - g_0\left(\frac{\ell^2}{r}\right), \qquad rg_1(r) \equiv -\frac{\ell^2}{r}g_1\left(\frac{\ell^2}{r}\right) \tag{111}$$

отримуємо тотожності (102), у першій із яких $h' = g_0(\infty)$.

Висновки. У задачах плоскої деформації пружного клина з симетричними відносно перетворення інверсії крайовими умовами розв'язки також мають симетрію інверсії для своїх окремих компонент. У першій крайовій задачі для пружного клина (***задачі I − I***) у випадку, коли на гранях клина дотичні напруження відсутні, а нормальні напруження, помножені на радіальну координату, симетричні при перетворенні інверсії, нормальні колові напруження, помножені на радіальну координату, є також симетричними на кожному із променів всередині клина, які виходять із його вершини, а нормальні переміщення є симетричними тільки на гранях клина. Аналогічна властивість розв'язку першої крайової задачі для клина має місце для дотичних напружень всередині клина і радіальних переміщень на гранях клина у випадку відсутності нормальних напружень і симетричності дотичних напружень, помножених на радіальну координату, на гранях клина. Крім того, для нестисливого матеріалу нормальні та радіальні переміщення відповідно виявляються симетричними всередині клина. Такого ж типу симетрії мають розв'язки ***задач I − III*** і ***III − III***, коли на одній або обох гранях клина задано умови гладкого контакту з симетричними за інверсією нормальними переміщеннями. У ***задачах I − II***, ***II − III***, коли одна із граней клина жорстко закріплена, аналогічні властивості симетрії справедливі тільки на незакріпленій грані клина, а для нестисливого матеріалу − і всередині клина.

У випадках, коли клин є півплощиною або площиною з півнескінченним розрізом, для розв'язків ***задачі I − I*** можливі й інші типи симетрії інверсії відносно напружень і радіальних похідних від переміщень, помножених на цілу степінь радіальної координати. Для ***задачі I − III*** такі типи симетрії розв'язків для радіальної похідної від заданих на одній грані клина нормальних переміщень і нормальних переміщень на іншій грані клина мають місце у випадках, коли клин складається із одного або трьох квадрантів.

Розв'язки крайових задач для клина у випадку антиплоскої деформації мають симетрію інверсії як на гранях, так і всередині клина, якщо таку ж симетрію мають крайові умови.

Властивості симетрії інверсії розв'язків отримано для основних крайових задач, коли кожна з крайових умов формулюється на всій грані клина. Для власне змішаних крайових задач, коли на різних ділянках однієї або обох граней клина ставляться різні умови, наявність симетрії у крайових умовах не обов'язково веде до симетрії розв'язку, як у задачах із ***прикладів 5, 6***. Так, якщо в задачі із ***прикладу 5*** умови закріплення грані $\vartheta = 0$ замінити умовами гладкого контакту з прямолінійною жорсткою стінкою, що еквівалентно задачі про вдавлювання двох штампів у пружний клин, то розв'язок такої задачі не буде мати симетрії інверсії. Пояснюється це тим, що ні ядро, ні розв'язок інтегрального рівняння цієї задачі не будуть парними функціями через наявність простого полюса трансформанти ядра на дійсній осі.

1. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. − Москва: Мир, 1989. − 510 с.
   Те саме: *Johnson K. L.* Contact mechanics. − Cambridge ect.: Cambridge Univ. Press, 1987. − 452 p.
2. *Некислих К. М., Острик В. І.* Розклинювання пружного клина // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. − 2009. − Вип. 3. − С. 91−96.
3. *Острик В. І.* Контактна механіка: Підручник. − Київ: ВПЦ «Київський університет», 2015. − 560 с.
4. *Острик В. І., Щокотова О. М.* Ковзний контакт штампа з пружним клином // Фіз.-хім. механіка матеріалів. − 2011. − **47,** № 4. − С. 82−91.
   Те саме: *Ostryk V. I., Shchokotova O. M.* Sliding contact of a punch with elastic wedge // Mater. Sci. − 2012. − **47,** No. 4. − P. 514−526.
5. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. − Ленинград: Наука, 1967. − 402 с.

СИММЕТРИЯ ИНВЕРСИИ РЕШЕНИЙ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНА

С применением интегрального преобразования Меллина получены решения двумерных основных задач для упругого клина. Показано, что в случае краевых условий, симметричных относительно преобразования инверсии, отдельные компоненты решений задач плоской деформации и решения задач антиплоской деформации для клина также имеют симметрию инверсии.

THE INVERSION SYMMETRY OF SOLUTIONS OF THE BASIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF TWO-DIMENSIONAL ELASTIC THEORY FOR THE WEDGE

Using the Mellin integral transformation, solutions of two-dimensional basic problems for an elastic wedge are obtained. It is shown that in the case of boundary conditions, symmetric with respect to the inversion transformation, separate components of solutions of plane strain problems and solutions of antiplane strain problems for the wedge also have the inversion symmetry.

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ

Одержано
21.12.17