УДК 517.956

І. Д. Пукальський, Б. О. Яшан

НЕЛОКАЛЬНА БАГАТОТОЧКОВА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА ЗІ СКІСНОЮ ПОХІДНОЮ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

Для параболічного рівняння другого порядку розглянуто багатоточкову за часом задачу зі скісною похідною. Коефіцієнти рівняння і крайової умови мають степеневі особливості довільного порядку за часовою і просторовими змінними на деякій множині точок. Знайдено умови існування і єдиності розв'язку поставленої задачі в гельдерових просторах зі степеневою вагою.

Особлива увага в останні десятиліття приділяється задачам з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Інтерес до таких задач зумовлений як потребами загальної теорії крайових задач, так і багатим практичним їх застосуванням (процес дифузії, коливань, соле- та вологопереносу в ґрунтах, фізика плазми, математична біологія тощо). Встановлено, що нелокальні умови можна використати для опису розв'язних розширень диференціальних операторів. У роботах Б. Й. Пташника та його учнів [1, 4, 6, 7] використано метричний підхід для дослідження умовно коректних задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною для лінійних гіперболічних і безтипних рівнянь, а також деяких класів параболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Було доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків розглядуваних задач, з яких випливає коректність задач для майже всіх (стосовно міри Лебеґа) параметрів задач.

У роботах [2, 8–10, 14] в обмежених циліндричних областях вивчено задачі з нелокальними та інтегральними умовами за часовою змінною для параболічних рівнянь зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах рівняння і крайової умови за будь-якими змінними на деякій множині точок. Класичним розв'язкам крайових задач з імпульсною дією для параболічних рівнянь другого порядку, коефіцієнти яких мають степеневі особливості за просторовими змінними, присвячено праці [3, 11, 13].

У цій роботі досліджено багатоточкову за часовою змінною задачу зі скісною похідною для параболічного рівняння другого порядку зі степеневими особливостями і виродженням довільного порядку в коефіцієнтах рівняння і крайової умови за будь-якими змінними на деякій множині точок. У гельдерових просторах зі степеневою вагою знайдено умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі.

1. Постановка задачі й основні обмеження. Нехай D – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D, $\dim D = n$, Ω – деяка обмежена область, $\overline{\Omega} \subset D$, $\dim \Omega \le n-1$, η, t_0, t_1, $\ldots, t_N$, t_{N+1} – фіксовані додатні числа, $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1}$, $t_0 < \eta < t_{N+1}$, $\eta \ne t_\lambda$, $\lambda \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Позначимо: $Q_{(0)} = \{(t,x) : t \in [t_0, t_{N+1}),\ x \in \Omega\} \cup \{(t,x) : t = \eta,\ x \in D\}$, $Q^{(k)} = [t_k, t_{k+1}) \times D$, $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $\Gamma^{(k)} = [t_k, t_{k+1}) \times \partial D$.

В області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ розглянемо задачу про знаходження функції $u(t,x)$, яка при $t \ne t_k$, $(t,x) \notin Q_{(0)}$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} + A_0(t,x)\right] u(t,x) =$$
$$= f(t,x), \qquad (1)$$

багатоточкову умову за змінною t:

$$u(t_k+0,x)=\varphi_k(x), \qquad x\in D\backslash\bar{\Omega}, \quad k\in\{0,1,\dots,N\}, \tag{2}$$

і крайову умову

$$\lim_{x\to z\in\partial D}(Bu-g)(t,x)\equiv\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{i=1}^{n}b_i(t,x)\partial_{x_i}u+b_0(t,x)u-g(t,x)\right]=0 \tag{3}$$

Степеневі особливості коефіцієнтів диференціальних виразів L і B у точці $P(t,x)\in Q\backslash Q_0$ характеризуватимуть функції $s_1(\beta_i^{(1)},t)$ і $s_2(\beta_i^{(2)},x)$:

$$s_1(\beta_i^{(1)},t)=\begin{cases}|t-\eta|^{\beta_i^{(1)}}, & |t-\eta|\le 1,\\ 1, & |t-\eta|\ge 1,\end{cases} \qquad s_2(\beta_i^{(2)},x)=\begin{cases}\rho^{\beta_i^{(2)}}(x), & \rho(x)\le 1,\\ 1, & \rho(x)\ge 1,\end{cases}$$

$\rho(x)=\inf\limits_{z\in\bar{\Omega}}|x-z|$, $\beta_i^{(\nu)}\in(-\infty,\infty)$, $\nu\in\{1,2\}$, $\beta^{(\nu)}=(\beta_1^{(\nu)},\dots,\beta_n^{(\nu)})$, $\beta=(\beta^{(1)},\beta^{(2)})$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)−(3). Позначимо через ℓ, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\mu_j^{(1)}$, $\mu_j^{(2)}$, $\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$ дійсні числа: $\ell\ge 0$, $[\ell]$ − ціла частина ℓ, $\{\ell\}=\ell-[\ell]$; $q^{(\nu)}\ge 0$, $\gamma^{(\nu)}\ge 0$, $\mu_j^{(\nu)}\ge 0$, $\delta^{(\nu)}\ge 0$, $\nu\in\{1,2\}$, $j\in\in\{0,\dots,n\}$; $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(1)})$, $R_i(t^{(1)},x^{(2)})$ − довільні точки із $Q^{(k)}$, $i\in\{1,2,\dots n\}$, $x^{(1)}=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)}=(x_1^{(1)},\dots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)},x_{i+1}^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$.

Позначимо через $H^{\ell}(\gamma;\beta;q;Q)$ множину функцій u, які мають неперервні похідні в $Q^{(k)}\backslash Q_{(0)}$ при $t\ne t_k$ вигляду $\partial_t^s\partial_x^r$, (тут $2s+|r|\le[\ell]$, $|r|==r_1+\dots+r_n$, $r=(r_1,r_2,\dots,r_n)$ − мультиіндекс), для яких є скінченною норма

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_0=\sup_k\{\sup_{\bar{Q}^{(k)}}|u|\}\equiv\|u;Q\|_0,$$

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_{\ell}=\sup_k\left\{\sum_{2s+|r|\le[\ell]}\|u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}\|_{2s+|r|}+\left\langle u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}\right\rangle_{\ell}\right\},$$

де, наприклад,

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}\|_{2s+|r|}\equiv\sup_{P\in\bar{Q}^{(k)}}\Big[s_1(q^{(1)}+2s\gamma^{(1)},t)s_2(q^{(2)}+2s\gamma^{(2)},x)\times$$

$$\times\left|\partial_t^s\partial_x^r u(P)\right|\prod_{i=1}^{n}s_1(r_i(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}),t)s_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),x)\Big],$$

$$\left\langle u;\gamma,\beta,q;Q^{(k)}\right\rangle_{\ell}\equiv\sum_{2s+|r|=[\ell]}\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}\Big[\sup_{(P_2,R_\nu)\subset\bar{Q}_k}\Big[s_1(q^{(1)}+2s\gamma^{(1)},t^{(2)})s_2(q^{(2)}+$$

$$+2s\gamma^{(2)},\tilde{x})\prod_{i=1}^{n}s_1(r_i(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}),t^{(2)})s_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),\tilde{x})\times$$

$$\times\left|\partial_t^s\partial_x^r u(P_2)-\partial_t^s\partial_x^r u(R_\nu)\right|\left|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}\right|^{-\{\ell\}}\times$$

$$\times s_1\big(\{\ell\}(\gamma^{(1)}-\beta_\nu^{(1)}),t^{(2)}\big)s_2\big(\{\ell\}(\gamma^{(2)}-\beta_\nu^{(2)}),\tilde{x}\big)\Big]+$$

$$+\sup_{(P_1,P_2)\subset\bar{Q}_k}\Big[s_1\big(q^{(1)}+\ell\gamma^{(1)},\tilde{t}\big)s_2\big(q^{(2)}+(2s+\{\ell\})\gamma^{(2)},x^{(1)}\big)\times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} s_1(-r_i\beta_i^{(1)}, \tilde{t}) s_2(r_i(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}), x^{(1)}) \left| t^{(1)} - t^{(2)} \right|^{-\{\ell/2\}} \times$$

$$\times \left| \partial_t^s \partial_x^r u(P_1) - \partial_t^s \partial_x^r u(P_2) \right| \Big] \Big\},$$

$s_1(q, \tilde{t}) = \min\{s_1(q, t^{(1)}),\ s_1(q^{(1)}, t^{(2)})\}$, $s_2(q, \tilde{x}) = \min\{s_2(q, x^{(1)}),\ s_2(q, x^{(2)})\}$.

Нехай для задачі (1)–(3) виконуються умови:

1°. Для довільного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ і $\forall (t, x) \in Q \setminus Q_{(0)}$ виконується нерівність

$$\pi_1 |\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t, x) s_1(\beta_i^{(1)}, t) s_1(\beta_j^{(1)}, t) s_2(\beta_i^{(2)}, x) s_2(\beta_j^{(2)}, x) \xi_i \xi_j \le \pi_2 |\xi|^2, \quad (4)$$

де π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі, $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, $s_1(\mu_i^{(1)}, t) s_2(\mu_i^{(2)}, x) A_i \in$ $\in H^{\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $i \in \{0, \ldots, n\}$, $A_0 \ge -a$, $a > 0$, $s_1(\delta^{(1)}, t) s_2(\delta^{(2)}, x) b_0 \in H^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $s_1(\beta_i^{(1)}, t) s_1(\beta_j^{(1)}, t) s_2(\beta_i^{(2)}, x) s_2(\beta_j^{(2)}, x) A_{ij} \in H^{\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $s_1(\beta_i^{(1)}, t) s_2(\beta_i^{(2)}, x) b_i \in$ $\in H^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, вектори $b^{(s)} = \{b_1^{(s)}, \ldots, b_n^{(s)}\}$ (де $b_i^{(s)} = s_1(\beta_i^{(1)}, t) s_2(\beta_i^{(2)}, x) b_i$) і $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ (де $e_i = b_i \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{-1/2}$) утворюють з напрямком зовнішньої нормалі n до ∂D у точці $P(t, x) \in \Gamma$ кут, менший від $\frac{\pi}{2}$, $\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D$, $b_0(t, x)\big|_{\Gamma} > 0$.

2°. $f \in H^{\alpha}(\gamma; \beta; \mu_0; Q)$, $\varphi_k \in H^{2+\alpha}(\tilde{\gamma}; \tilde{\beta}, 0; Q \cap (t = t_k))$, $\tilde{\gamma} = (0, \gamma^{(2)})$, $\tilde{\beta} = (0, \beta^{(2)})$,

$$\lim_{x \to z \in \partial D} (B\varphi_k - g)(t_k, x) = 0, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, N\}, \quad g \in H^{1+\alpha}(\gamma; \beta; \delta; Q^{(k)}),$$

$$\gamma^{(\nu)} = \max\left\{ \max_i (1 + \beta_i^{(\nu)}), \max_i (\gamma^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)}), \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2}, \delta^{(\nu)} \right\}, \quad \nu \in \{1, 2\}.$$

Справджується така

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1)–(3) *виконуються умови* ***1°, 2°***. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(3) *із простору* $H^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$ *і є правильною така нерівність*:

$$\| u; \gamma, \beta, 0; Q \|_{2+\alpha} \le c \sup_k \left(\| \varphi_k; Q \cap (t = t_k) \|_{2+\alpha} + \left\| f; Q^{(k)} \right\|_{\alpha} + \left\| g; Q^{(k)} \right\|_{1+\alpha} \right). \quad (5)$$

Якщо $f \in H^{\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $g \in H^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q^{(k)})$ *і для задачі* (1)–(3) *виконуються умови* ***1°, 2°***, *то єдиний розв'язок задачі* (1)–(3) *в області* $Q^{(k)}$ *визначається інтегралами Стілтьєса з борелівською мірою* $G(t, x; Z)$:

$$u(t, x) = \int_{Q^{(k)}} G_1^{(k)}(t, x; d\tau, d\xi) f(\tau, \xi) + \int_{D} G_2^{(k)}(t, x; d\xi) \varphi_k(\xi) +$$

$$+ \int_{\Gamma^{(k)}} G_3^{(k)}(t, x; d\tau, d_{\xi} S) g(\tau, \xi), \quad (6)$$

компоненти якої $G_1^{(k)}$, $G_2^{(k)}$, $G_3^{(k)}$ *задовольняють нерівності*

$$\left|\int\limits_{Q^{(k)}} G_1^{(k)}(t,x,d\tau,d\xi)\right| \le \left\|A_0^{-1};Q^{(k)}\right\|_0, \qquad \left|\int\limits_{D} G_2^{(k)}(t,x;d\xi)\right| \le 1,$$

$$\left|\int\limits_{\Gamma^{(k)}} G_3^{(k)}(t,x;d\tau,d_\xi S)\right| \le \left\|b_0^{-1};Q^{(k)}\right\|_0. \tag{7}$$

Для д о в е д е н н я теореми 1 встановимо спочатку коректну розв'язність крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну підпослідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1)–(3).

2. Оцінка розв'язків задач з гладкими коефіцієнтами. Нехай $Q_m^{(k)} = Q^{(k)} \cap \{(t,x)\in Q^{(k)} : s_1(1,t)\ge m_1^{-1}, s_2(1,x)\ge m_2^{-1}, m=(m_1,m_2), m_i>1, i\in\{1,2\}\}$ – послідовність областей, яка при $m_i\to\infty$ збігається до $Q^{(k)}$.

Розглянемо в області $Q=[t_0,t_{N+1})\times D$ задачу про знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1u_m)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t,x)\partial_{x_i} + a_0(t,x)\right]u_m(t,x) =$$

$$= f_m(t,x), \tag{8}$$

які задовольняють багатоточкові умови за змінною t:

$$u_m(t_k+0,x) = \varphi_m^{(k)}(x), \quad k\in\{0,1,\dots,N\}, \tag{9}$$

а на бічній поверхні – крайову умову

$$\lim_{x\to z\in\partial D}(B_1u_m - g_m)(t,x) =$$

$$= \lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{i=1}^n h_i(t,x)\partial_{x_i}u_m + h_0(t,x)u_m - g_m(t,x)\right] = 0. \tag{10}$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, h_i, h_0, а також функції f_m, $\varphi_m^{(k)}$, g_m визначаються таким чином. Якщо $(t,x)\in Q_m^{(k)}$, то коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, h_i, h_0 і функції f_m, $\varphi_m^{(k)}$, g_m співпадають з A_{ij}, A_i, A_0, f, φ_k, g відповідно, а в областях $Q^{(k)}\setminus Q_m^{(k)}$ є неперервними продовженнями коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0, функцій f, φ_k, g із областей $Q_m^{(k)}$ в області $Q^{(k)}\setminus Q_m^{(k)}$ зі збереженням гладкості і норми [12, с. 82].

Справджується така

Теорема 2. *Нехай* u_m *– класичний розв'язок задачі* (8)–(10) *в області* Q *і виконуються умови* ***1°***, ***2°***. *Тоді для* $u_m(t,x)$ *маємо таку оцінку*:

$$|u_m(t,x)| \le \sup_k\left(\left\|\varphi_m^{(k)};Q_k\cap(t=t_k)\right\|_0 + \left\|f_m a_0^{-1};Q^{(k)}\right\|_0 + \left\|g_m h_0^{-1};Q^{(k)}\right\|_0\right). \tag{11}$$

Д о в е д е н н я. Правильність оцінки (11) встановлюємо за методикою доведення теореми 2.2 з [5, с. 25]. Відмінність є лише у випадку, коли $0<\max\limits_{\bar Q^k} u_m = u_m(P_1)$, $P_1\in Q^{(k)}$. Враховуючи достатні умови існування максимуму функції від багатьох змінних у точці P_1, отримуємо виконання співвідношень

$$\partial_t u_m(P_1) \geq 0, \qquad \partial_{x_i} u_m(P_1) = 0, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1)\partial_{x_i x_j} u_m(P_1) \leq 0\,, \quad (12)$$

також при цьому задовольняється рівняння (8).

Остання з нерівностей (12) виконується, оскільки в точці максимуму другі похідні $\partial_{y_i y_j} u_m$ за будь-яким напрямком

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} s_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) s_2(\beta_i^{(2)}, x^{(1)})(x_i - x_i^{(1)}), \qquad \det\|\alpha_{ij}\| \neq 0\,,$$

є недодатними, а

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1)\partial_{x_i x_j} u_m(P_1) =$$

$$= \sum_{\ell,j=1}^{n} \left\{ \sum_{i,k=1}^{n} s_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) s_1(\beta_k^{(1)}, t^{(1)}) s_2(\beta_i^{(2)}, x^{(1)}) s_2(\beta_k^{(2)}, x^{(1)}) \times \right.$$

$$\left. \times\, \alpha_{k\ell}\alpha_{ij} \right\} \partial_{y_j y_\ell} u_m(P_1) = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell \partial_{y_\ell y_\ell} u_m < 0\,.$$

Оскільки $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – характеристичні числа квадратичної форми, то вони є додатними згідно з обмеженням (4). З урахуванням (12) і рівняння (8) у точці P_1 отримуємо нерівність

$$u_m(P_1) \leq f_m(P_1) a_0^{-1}(P_1)\,.$$

Аналогічно, розглядаючи точку найменшого від'ємного значення функції у випадку $\min\limits_{\bar{Q}^{(k)}} u_m = u_m(P_2) < 0$, $P_2 \in Q^{(k)}$, маємо

$$u_m(P_2) \geq f_m(P_2) a_0^{-1}(P_2)\,. \qquad \blacklozenge$$

Знайдемо оцінки похідних від розв'язків $u_m(t,x)$. Введемо у просторі $C^\ell(Q)$ норму $\|u_m;\gamma;\beta;q;Q\|_\ell$, еквівалентну при фіксованих m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і норма $\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_\ell$, тільки замість функцій $s_1(q^{(1)},t)$, $s_2(q^{(2)},x)$ беремо відповідно $d_1(q^{(1)},t)$, $d_2(q^{(2)},x)$:

$$d_1(q^{(1)},t) = \begin{cases} \max\{s_1(q^{(1)},t), m_1^{-q^{(1)}}\}, & q^{(1)} \geq 0, \\ \min\{s_1(q^{(1)},t), m_1^{-q^{(1)}}\}, & q^{(1)} < 0, \end{cases}$$

$$d_2(q^{(2)},x) = \begin{cases} \max\{s_2(q^{(2)},x), m_2^{-q^{(2)}}\}, & q^{(2)} \geq 0, \\ \min\{s_2(q^{(2)},x), m_2^{-q^{(2)}}\}, & q^{(2)} < 0. \end{cases}$$

Справджується

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* **1°**, **2°**. *Тоді для розв'язку задачі* (8)–(10) *є правильною оцінка*

$$\|u_m;\gamma,\beta,0;Q\|_{2+\alpha} \leq c \sup_k \left(\|\varphi_m^{(k)};\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;Q \cap (t=t_k)\|_{2+\alpha} + \|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q_k\|_\alpha + \right.$$

$$\left. + \|g_m;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}\|_{1+\alpha} + \|u_m;Q^{(k)}\|_0 \right). \quad (13)$$

Д о в е д е н н я. В областях $Q^{(k)}$, $k \in \{0,1,\ldots,N\}$, розглянемо задачу

$$(L_1 u_m)(t,x) = f_m(t,x)\,,$$

$$(B_1 u_m - g_m)(t,x)\big|_{\Gamma^{(k)}} = 0,$$

$$u_m(t_k + 0, x) = \varphi_m^{(k)}. \qquad (14)$$

Розв'язок крайової задачі (14) в $Q^{(k)}$ існує і є єдиним у просторі $C^{2+\alpha}(Q^{(k)})$ [5, с. 364]. Знайдемо його оцінку. Використовуючи інтерполяційні нерівності із [9, 12], маємо

$$\left\| u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \right\|_{2+\alpha} \le (1+\varepsilon^\alpha)\left\langle u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \right\rangle_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\left\| u_m; Q^{(k)} \right\|_0,$$

де ε – довільне дійсне число із $(0,1)$. Тому достатньо оцінити півнорму $\left\langle u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \right\rangle_{2+\alpha}$.

З означення півнорми випливає існування в $Q^{(k)}$ точок P_1, P_2, R_i, для яких виконується одна із нерівностей

$$\frac{1}{2}\left\| u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \right\|_{2+\alpha} \le E_e, \qquad e \in \{1,2\}, \qquad (15)$$

де

$$E_1 = \sum_{2s+|r|=2} \Big\{ \sum_{\nu=1}^{n} d_1(2s\gamma^{(1)}, t^{(2)}) d_2(2s\gamma^{(2)}, \tilde{x}) \prod_{i=1}^{n} d_1(r_i(\gamma^{(1)} - \beta_i^{(1)}), t^{(2)}) \times$$

$$\times d_2(r_i(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}), \tilde{x}) \left| \partial_t^s \partial_x^r u_m(P_2) - \partial_t^s \partial_x^r u_m(R_\nu) \right| \times$$

$$\times \left| x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)} \right|^{-\alpha/2} d_1(\alpha(\gamma^{(1)} - \beta_\nu^{(1)}), t^{(1)}) d_2(\alpha(\gamma^{(2)} - \beta_\nu^{(2)}), \tilde{x}) \Big\},$$

$$E_2 = d_1((2+\alpha)\gamma^{(1)}, \tilde{t}) d_2((2s+\alpha)\gamma^{(2)}, x^{(1)}) \prod_{i=1}^{n} d_1(-r_i\beta_i^{(1)}, \tilde{t}) \times$$

$$\times d_2(r_i(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}), x^{(1)}) \left| t^{(1)} - t^{(2)} \right|^{-\alpha/2} \times$$

$$\times \left| \partial_t^s \partial_x^r u_m(P_1) - \partial_t^s \partial_x^r u_m(P_2) \right|.$$

Якщо $\left| x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)} \right| \ge \frac{\varepsilon_1}{4}\frac{1}{n} d_1(\gamma^{(1)}, \tilde{t}) d_2(\gamma^{(2)} - \beta_\nu^{(2)}, \tilde{x}) \equiv T_1$, ε_1 – довільне дійсне число із $(0,1)$, то

$$E_1 \le 2\varepsilon_1^{-\alpha} \left\| u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \right\|_2. \qquad (16)$$

Якщо $\left| t^{(1)} - t^{(2)} \right| \ge \frac{\varepsilon_1^2}{16} d_1(2\gamma^{(1)}, \tilde{t}) d_2(2\gamma^{(2)}, \tilde{x}) \equiv T_2$, то

$$E_2 \le 2\varepsilon_1^{-\alpha} \left\| u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \right\|_2. \qquad (17)$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності до (16), (17), знаходимо

$$E_e \le \varepsilon^\alpha \left\| u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \right\|_{2+\alpha} + C(\varepsilon)\left\| u_m; Q^{(k)} \right\|_0, \quad e \in \{1,2\}. \qquad (18)$$

Нехай $\left| x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)} \right| \le T_1$, $\left| t^{(1)} - t^{(2)} \right| \le T_2$. Будемо вважати, що $\left| x_\nu^{(1)} - z_\nu \right| \le$ $\le 4T_1$, $z \in \partial D$, і

$$d_1(\gamma^{(1)}, \tilde{t}) = \min\{d_1(\gamma^{(1)}, t^{(1)}), d_1(\gamma^{(1)}, t^{(2)})\} \equiv d_1(\gamma^{(1)}, t^{(1)}),$$

$$d_2(\gamma^{(2)}, \tilde{x}) = \min\{d_2(\gamma^{(2)}, x^{(1)}), d_2(\gamma^{(2)}, x^{(2)})\} \equiv d_2(\gamma^{(2)}, x^{(1)}),$$

$P_1(t^{(1)},x^{(1)})\in Q^{(k)}$, $k\in\{0,1,\dots,N\}$. Приймемо для простоти, що $\nu=n$. Нехай $\mathcal{K}(P)$ − куля радіуса R_0, $R_0\ge 4(T_1 n+T_2)$, з центром в деякій точці $P\in\Gamma^{(k)}$ і нехай точки $\{P_1,P_2,R_i\}\in\Gamma^{(k)}$. Використовуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити $\partial D\bigcap\mathcal{K}(P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x=\eta(\xi)$ із [12, стор.126]. В результаті такого перетворення область $Q^{(k)}\bigcap\mathcal{K}(P)$ перейде в область $D_{(k)}$, для точок якої $\xi_n\ge 0$. Вважаємо, що $u_m(t,x)$, P_1, P_2, R_i, E_μ, $d_2(\gamma^{(2)},x^{(1)})$, T_1, T_2 при цьому перетворенні переходять відповідно в $v_m(t,\xi)$, $M_1(t^{(1)},\xi^{(1)})$, $M_2(t^{(2)},\xi^{(1)})$, $Z_i(t^{(2)},\xi^{(2)})$, $E_\mu^{(1)}$, $d_3(\gamma^{(2)},x^{(1)})$, $T_1^{(1)}$, $T_2^{(1)}$. Коефіцієнти диференціальних виразів L_1, B_1 в області $D_{(k)}$ позначимо через $\tilde a_{ij}(t,\xi)$, $\tilde a_i(t,\xi)$, $\tilde a_0(t,\xi)$, $\tilde h_k(t,\xi)$, $\tilde h_0(t,\xi)$. Тоді $v_m(t,\xi)$ буде розв'язком задачі

$$\Big[\partial_t-\sum_{i,j=1}^n\tilde a_{ij}(M_1)\partial_{\xi_i\xi_j}\Big]v_m(t,\xi)=\sum_{i,j=1}^n[\tilde a_{ij}(t,\xi)-\tilde a_{ij}(M_1)]\partial_{\xi_i\xi_j}v_m-$$

$$-\sum_{i=1}^n\tilde a_i(t,\xi)\partial_{\xi_i}v_m-\tilde a_0(t,\xi)v_m+f_m(t,\eta(\xi))\equiv F_m(t,\xi;v_m),\quad(19)$$

$$v_m(t_k+0,\xi)=\varphi_m^{(k)}(\eta(\xi)),\quad(20)$$

$$\sum_{i=1}^n\tilde h_i(M_1)\partial_{\xi_i}v_m(t,\xi)\Big|_{\xi_n=0}=\Big\{\sum_{i=1}^n[\tilde h_i(M_1)-\tilde h_i(t,\xi)]\partial_{\xi_i}v_m-\tilde h_0(t,\xi)v_m+$$

$$+g_m(t,\eta(\xi))\Big\}\Big|_{\xi_n=0}=G_m(t,\xi,v_m)\big|_{\xi_n=0}.\quad(21)$$

Нехай $\Pi_\tau^{(1)}$ − область із $D_{(k)}$:

$$\Pi_\tau^{(1)}=\big\{(t,\xi)\in D_{(k)}:\big|\xi_\nu-\xi_\nu^1\big|\le\tau T_1^{(1)},\ \nu\in\{1,\dots,n\},\ \big|t-t^{(1)}\big|\le\tau^2T_2^{(1)}\big\}.$$

Зробивши в задачі (19)−(21) заміну

$$v_m(t,\xi)=\omega_m(t,y),\qquad \xi_\nu=d_1(\beta_\nu^{(1)},t^{(1)})d_3(\beta_\nu^{(2)},\xi^{(1)})y_\nu,$$

одержимо

$$(L_2\omega_m)(t,y)\equiv\Big[\partial_t-\sum_{i,j=1}^n d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_1(\beta_j^{(1)},t^{(1)})d_3(\beta_i^{(2)},\xi^{(1)})d_3(\beta_j^{(2)},\xi^{(1)})\times$$

$$\times\tilde a_{ij}(t^{(1)},\xi^{(1)})\partial_{y_iy_j}\Big]\omega_m=F_m(t,Y;\omega_m),\quad(22)$$

$$\omega_m(t_k+0,y)=\varphi_m^{(k)}(\eta(Y)),\quad(23)$$

$$(B_2\omega_m)(t,y)\big|_{y_m=0}\equiv\Big[\sum_{i=1}^n\tilde h_i(t^{(1)},\xi^{(1)})d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_3(\beta_i^{(2)},\xi^{(1)})\partial_{y_i}\omega_m\Big]\Big|_{y_n=0}=$$

$$=G_m(t,Y,\omega_m)\big|_{y_n=0},\quad(24)$$

де $Y=\big(d_1(-\beta_1^{(1)},t^{(1)})d_3(-\beta_1^{(2)},\xi^{(1)})y_1,\dots,d_1(-\beta_n^{(1)},t^{(1)})d_3(-\beta_n^{(2)},\xi^{(1)})y_n\big)$.

Позначимо

$$y_\nu^{(1)} = d_1(-\beta_\nu^{(1)}, t^{(1)}) d_3(-\beta_\nu^{(2)}, \xi^{(1)}) x_\nu^{(1)},$$

$$V_\tau = \left\{ (t, y) : \left| t - t^{(1)} \right| \le \tau^2 T_2^{(1)}, \left| y_\nu - y_\nu^{(1)} \right| \le \frac{\tau}{n} \sqrt{T_2^{(1)}} \right\}$$

і виберемо тричі диференційовну функцію $\psi(t, y)$:

$$\psi(t, y) =$$

$$= \begin{cases} 1, & (t, y) \in V_{1/2}, \quad 0 \le \psi(t, y) \le 1, \\ 0, & (t, y) \notin V_{3/4}, \quad \left| \partial_t^s \partial_x^r \psi \right| \le c_{rs} d_1(-(2s + |r|)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) d_3(-(2s + |r|)\gamma^{(2)}, \xi^{(1)}), \end{cases}$$

Тоді функція $W_m(t, y) = \omega_m(t, y)\psi(t, y)$ буде розв'язком крайової задачі

$$(L_2 W_m)(t, y) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(t^{(1)}, \xi^{(1)}) d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)}) d_3(\beta_i^{(2)}, \xi^{(1)}) \times$$

$$\times d_3(\beta_j^{(2)}, \xi^{(1)}) \{ \partial_{y_i} \omega_m \partial_{y_j} \psi + \partial_{y_j} \omega_m \partial_{y_i} \psi + \omega_m \partial_{y_i y_j} \psi \} -$$

$$- \omega_m \partial_t \psi + \psi F_m \equiv F_m^{(1)}(t, Y, \omega_m), \tag{25}$$

$$W_m(t_k + 0, y) = \psi(t_k, y) \varphi_m^{(k)}(\eta(Y)) \equiv \Phi_m(t_k, y), \tag{26}$$

$$(B_2 W_m)(t, y)\big|_{y_m = 0} = \Big\{ \psi(t, y) G_m(t, Y, \omega_m) -$$

$$- \omega_m \sum_{i=1}^{n} \tilde{h}_i(t^{(1)}, \xi^{(1)}) d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) \times$$

$$\times d_3(\beta_i^{(2)}, \xi^{(1)}) \partial_{y_i} \psi \Big\}\Big|_{y_n = 0} = \Pi_m(t, Y; \omega_m)\big|_{y_n = 0}. \tag{27}$$

Коефіцієнти рівняння (25) і крайової умови (27) обмежені сталими, незалежними від точки M_1. Тому, зважаючи на теорему 6.1 [5, с. 364], для довільних точок $(M_3, M_4) \subset V_{1/2}$ буде виконуватись нерівність

$$d^{-\alpha}(M_3, M_4) \left| \partial_t^s \partial_y^r \omega_m(M_3) - \partial_t^s \partial_y^r \omega_m(M_4) \right| \le c \Big(\left\| F_m^{(1)} \right\|_{C^\alpha(V_{3/4})} +$$

$$+ \left\| \Phi_m \right\|_{C^{2+\alpha}(V_{3/4} \cap (t = t_k))} + \left\| \Pi_m \right\|_{C^{1+\alpha}(V_{3/4})} \Big), \quad 2s + |r| = 2, \tag{28}$$

$d(M_3, M_4)$ – параболічна відстань між точками M_3, M_4.

Враховуючи властивості функції $\psi(t, y)$, знаходимо оцінки норм виразів $F_m^{(1)}$, Φ_m, Π_m:

$$\left\| F_m^{(1)} \right\|_{C^\alpha(V_{3/4})} \le c d_1(-(2 + \alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) d_3(-(2 + \alpha)\gamma^{(2)}, \xi^{(1)}) \times$$

$$\times \left(\left\| f_m; \gamma; 0, 2\gamma; V_{3/4} \right\|_\alpha + \left\| \omega_m; V_{3/4} \right\|_0 + \left\| \omega_m; \gamma; 0, 0; V_{3/4} \right\|_2 \right), \tag{29}$$

$$\left\| \Phi_m \right\|_{C^{2+\alpha}(V_{3/4} \cap (t = t_k))} \le c d_1(-(2 + \alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) d_3(-(2 + \alpha)\gamma^{(2)}, \xi^{(1)}) \times$$

$$\times \left\| \varphi_m^{(k)}; \tilde{\gamma}; 0; 0; V_{3/4} \cap (t = t_k) \right\|_{2+\alpha}, \tag{30}$$

$$\|\Pi_m\|_{C^{1+\alpha}(V_{3/4})} \le cd_1(-(2+\alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)})d_3(-(2+\alpha)\gamma^{(2)}, \xi^{(1)}) \times$$

$$\times\left(\left\|G_m;\gamma;0;\gamma;V_{3/4}\right\|_\alpha + \left\|\omega_m;V_{3/4}\right\|_0 + \left\|\omega_m;\gamma;0,0;V_{3/4}\right\|_2\right). \quad (31)$$

З означення $H^\ell(\gamma;\beta;q;Q)$ випливає виконання нерівностей

$$c_1\left\|\omega_m;\gamma;0;0;V_{3/4}\right\|_\ell \le \left\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi_{3/4}^{(1)}\right\|_\ell \le c_2\left\|\omega_m;\gamma;0;0;V_{3/4}\right\|_\ell$$

Підставляючи (29)–(31) у (28) і повертаючись до змінних (t,x), одержимо нерівності

$$E_\mu \le (\varepsilon^\alpha(n+2) + \varepsilon_1 Cn^2)\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha} + C\left(\left\|u_m;Q^{(k)}\right\|_0 + \right.$$

$$+\left\|f_m;\gamma;\beta;2\gamma;Q^{(k)}\right\|_\alpha + \left\|g_m;\gamma;\beta;\gamma;Q^{(k)}\right\|_{1+\alpha} +$$

$$\left. + \left\|\varphi_m^{(k)};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha}\right). \quad (32)$$

Нехай $\left|x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)}\right| \le T_1$, $\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right| \le T_2$, $\left|x_\nu^{(1)} - z_\nu\right| \ge 4T_1$, $z \in \partial D$. В області $Q^{(k)}$ задачу (14) запишемо у вигляді

$$\left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(P_1)\partial_{x_i x_j}\right]u_m = \sum_{i,j=1}^n [a_{ij}(P) - a_{ij}(P_1)]\partial_{x_i x_j}u_m - \sum_{i=1}^n a_i(P)\partial_{x_i}u_m -$$

$$- a_0(P)u_m + f_m(t,\lambda) \equiv F(t,x,u_m),$$

$$u_m(t_k+0,x) = \varphi_m^{(k)}(x),$$

$$\left.\sum_{i=1}^n h_i(P_1)\partial_{x_i}u_m\right|_{\Gamma^{(k)}} = \left.\left\{\sum_{i=1}^n [h_i(P_1) - h_i(P)]\partial_{x_i}u_m - h_0(P)u_m + g_m(P)\right\}\right|_{\Gamma^{(k)}} =$$

$$= \Phi_m(t,x,u_m)|_{\Gamma^{(k)}}.$$

Повторюючи наведені вище міркування і використовуючи теорему 5.3 із [5, с. 364], одержимо нерівність

$$E_\mu \le (\varepsilon^\alpha(n+2) + \varepsilon_1 Cn^2)\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha} + C\left(\left\|u_m;Q^{(k)}\right\|_0 + \right.$$

$$+\left\|f_m;\gamma;\beta;2\gamma;Q^{(k)}\right\|_\alpha + \left\|g_m;\gamma;\beta;\gamma;Q^{(k)}\right\|_{1+\alpha} +$$

$$\left. + \left\|\varphi_m^{(k)};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha}\right). \quad (33)$$

Об'єднуючи нерівності (15), (18), (32), (33), одержимо оцінку (13).

Д о в е д е н н я **теореми 1**. Оскільки

$$\left\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\right\|_\alpha \le c\left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\right\|_\alpha,$$

$$\left\|g_m;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}\right\|_{1+\alpha} \le c\left\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}\right\|_{1+\alpha},$$

$$\left\|\varphi_m^{(k)};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha} \le c\left\|\varphi_k;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha},$$

то враховуючи нерівності (11) і (13), маємо

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;Q\right\|_{2+\alpha} \le c\sup_k\left(\left\|\varphi_k;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha} + \left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\right\|_\alpha + \right.$$

$$\left. + \left\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}\right\|_{1+\alpha}\right). \quad (34)$$

Права частина нерівності (34) не залежить від m_1, m_2 і послідовності

$$\{U_m^{(0)} \equiv u_m(P)\},$$

$$\{U_m^{(1)} \equiv d_1(\gamma^{(1)} - \beta_i^{(1)}, t) d_2(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}, x) \partial_{x_i} u_m\},$$

$$\{U_m^{(2)} \equiv d_1(2\gamma^{(1)}, t) d_2(2\gamma^{(2)}, x) \partial_t u_m\},$$

$$\{U_m^{(3)} \equiv d_1(\gamma^{(1)} - \beta_i^{(1)}, t) d_1(\gamma^{(1)} - \beta_j^{(1)}, t) d_2(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}, x) \times$$

$$\times d_2(\gamma^{(2)} - \beta_j^{(2)}, x) \partial_{x_i x_j} u_m\}, \quad P(t,x) \in Q^{(k)},$$

рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні в $Q^{(k)}$. За теоремою Арцела, існують підпослідовності $\{U_{m(\ell)}^{(\mu)}\}$, рівномірно збіжні до U^{μ} в $Q^{(k)}$, $\mu \in \{0,1,2,3\}$. Переходячи до границі при $m(\ell) \to \infty$ в задачі (8)–(10), одержимо, що $u(t,x) = U_0^{(0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1)–(3), $u \in H^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ і виконується оцінка (5).

Оскільки $H^{\ell}(\gamma;\beta;q;Q) \subset H^{\ell}(\gamma;\beta;0;Q)$, то для $f(t,x) \in H^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ і $g(t,x) \in H^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ маємо оцінки

$$\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\|_{\alpha} \le c\|f;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{\alpha},$$

$$\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}\|_{1+\alpha} \le c\|g;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{1+\alpha}. \tag{35}$$

Використовуючи оцінки (5) і (35) для розв'язку задачі (1)–(3), встановлюємо правильність оцінки

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c \sup_k \left(\|\varphi_k;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;Q \cap (t=t_k)\|_{2+\alpha} + \|f;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{\alpha} + \right.$$

$$\left. + \|g;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{1+\alpha} \right). \tag{36}$$

Зазначимо, що простір $H_{\alpha} = H^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q^{(k)}) \times H^{2+\alpha}(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;Q \cap (t=t_k))$ вкладається у простір $C(Q^{(k)})$, $H_{\alpha} \subset C(Q^{(k)})$. Тому, використовуючи теорему Рісса, можна вважати, що при фіксованих $(t,x) \in Q^{(k)}$ лінійний неперервний функціонал $u(t,x)$ породжує борелівську міру $G(t,x,Z^{(k)})$, яка визначається на σ-алгебрі підмножин $Z^{(k)}$ області $Q^{(k)}$, включаючи $Q^{(k)}$ і всі її відкриті підмножини такі, що значення функціонала визначається формулою (6).

З теореми 2 випливає виконання для розв'язку задачі (1)–(3) нерівностей (7):

$$|u_1| \equiv \left| \int_{Q_k} G_1^{(k)}(t,x;d\tau,d\xi) f(\tau,\xi) \right| \le \|f A_0^{-1};Q^{(k)}\|_0,$$

$$|u_2| \equiv \left| \int_D G_2^{(k)}(t,x;0,d\xi) \varphi_k(\xi) \right| \le \|\varphi_k;Q \cap (t=t_k)\|_0,$$

$$|u_3| \equiv \left| \int_{\Gamma^{(k)}} G_3^{(k)}(t,x;d\tau,d_{\xi}S) g(\tau,\xi) \right| \le \|g b_0^{-1};Q^{(k)}\|_0, \tag{37}$$

де u_1 − довільний розв'язок задачі (1)–(3) при $g \equiv 0$, $\varphi_k \equiv 0$; u_2 − розв'язок крайової задачі (1)–(3) при $f \equiv 0$, $g \equiv 0$; u_3 − розв'язок крайової задачі (1)–(3) при $f \equiv 0$, $\varphi_k \equiv 0$.

Підставляючи в нерівності (37) відповідно $f(t,x) \equiv 1$, $\varphi_k(x) \equiv 1$, $g(t,x) \equiv \equiv 0$, одержимо нерівності (6). ♦

1. *Власій О. Д., Пташник Б. Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 8. – С. 1022–1034.
   Те саме: *Vlasii O. D., Ptashnyk B. I.* A problem with nonlocal conditions for partial differential equations unsolved with respect to the leading derivative // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, No. 8. – P. 1238–1253.
2. *Исарюк И. М., Пукальский И. Д.* Краевые задачи для параболических уравнений с нелокальным условием и вырождениями // Укр. мат. вісн. – 2014. – **11**, № 4. – С. 480–496.
   Те саме: *Isaryuk I. M., Pukalskyi I. D.* The boundary value problems for parabolic equations with a nonlocal condition and degenerations // J. Math. Sci. – 2015. – **207**, No. 1. – P. 26–38.
3. *Ісарюк І. М., Пукальський І. Д.* Крайові задачі з імпульсними умовами для параболічних рівнянь з виродженнями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59,** № 3. – С. 55–67.
4. *Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 12. – С. 1604–1613.
   Те саме: *Klyus I. S., Ptashnyk B. I.* A multipoint problem for partial differential equations unresolved with respect to the higher time derivative // Ukr. Math. J. – 1999. – **51**, No. 12. – P. 1813–1823.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
   Те саме: *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. – Transl. Math. Monogr., Vol. 23. – Providence, RI: AMS, 1968. – xi+648 p.
6. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кмітъ І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
7. *Пташник Б. Й., Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами // Доп. НАН України. – 2008. – № 12. – С. 34–39.
8. *Пукальский И. Д.* Задача с косой производной для неравномерно параболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2001. – **37**, № 12. – С. 1637–1645.
   Те саме: *Pukal's'kii I. D.* The oblique derivative problem for a nonuniformly parabolic equation // Differ. Equat. – 2001. – **37**, No. 12. – P. 1720–1730.
9. *Пукальський І. Д.* Крайова задача для параболічних рівнянь з імпульсними умовами і виродженнями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58,** № 2. – С. 55–63.
   Те саме: *Pukal's'kyi I. D.* Boundary-value problem for parabolic equations with impulsive conditions and degenerations // J. Math. Sci. – 2017. – **223**, No. 1. – P. 60–71.
10. *Пукальський І. Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 2008. – 253 с.
11. *Пукальський І. Д., Ісарюк І. М.* Нелокальні параболічні крайові задачі з особливостями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 4. – С. 54–66.
    Те саме: *Pukal's'kyi I. D., Isaryuk I. M.* Nonlocal parabolic boundary-value problems with singularities // J. Math. Sci. – 2015. – **208**, No. 3. – P. 327–343.
12. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.
    Те саме: *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964. – xiv + 347 p.
13. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Systems with impulse effect: Stability, theory and applications. – New York etc.: Halsted Press, 1989. – 255 p.
14. *DiBenedetto E.* Degenerate parabolic equations. – New York: Spinger-Verlag, 1993. – xvi+388 p.

НЕЛОКАЛЬНАЯ МНОГОТОЧЕЧНАЯ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧА С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Для параболического уравнения второго порядка рассмотрена многоточечная по времени задача с косой производной. Коэффициенты уравнения и краевого условия имеют степенные особенности произвольного порядка по временной и пространственным переменным на некотором множестве точек. Найдены условия существования и единственности решения поставленной задачи в гельдеровых пространствах со степенным весом.

NONLOCAL MULTIPOINT IN TIME PROBLEM WITH OBLIQUE DERIVATIVE FOR A PARABOLIC EQUATION WITH DEGENERATION

For a second-order parabolic equation the multipoint in time problem with an oblique derivative are considered. The coefficients of the equation and the boundary condition have power singularities of arbitrary order in time and space variables on a certain set of points. Conditions for the existence and uniqueness of the solution of the problem in Hölder's spaces with power weight are found.

Чернів. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано 09.03.17