УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен[1,2], І. П. Мединський[2,3]

КЛАСИЧНИЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА З ДВОМА ГРУПАМИ ПРОСТОРОВИХ ЗМІННИХ ВИРОДЖЕННЯ. II

Для виродженого рівняння типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження побудовано класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші. Одержано точні оцінки цього розв'язку та його похідних.

Вступ. Ця стаття є продовженням статті [2], у ній збережено позначення і термінологію з [2]. Тут завершуємо доведення сформульованих в [2] теорем 1–3 про існування, оцінки та деякі властивості класичного фундаментального розв'язку задачі Коші (КФРЗК) для вироджених рівнянь типу Колмогорова вигляду

$$L_j(t, x^{(j)}(y), S, \partial_{x_1}) u(t,x) := (S - A(t, x^{(j)}(y), \partial_{x_1})) u(t,x) = 0,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (1_j)$$

де $j \in \mathbb{Z}_3$, $S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}}$, $y := (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^n$, – параметрична точка,

$$A(t, z, \partial_{x_1}) := \sum_{j,\ell=1}^{n_1} a_{j\ell}(t,z) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1\ell}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,z) \partial_{x_{1j}} + a_0(t,z), \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

$$x^{(j)}(y) = \begin{cases} y, & j = 0, \\ (x_1, y'), \quad y' := (y_2, y_3), & j = 1, \\ (x_1, x_2, y_3), & j = 2, \\ x, & j = 3. \end{cases}$$

Згідно з методом Леві [3] КФРЗК Z_j для рівняння (1_j) з $j \in \mathbb{N}_3$ визначається рівностями

$$Z_j(t,x;\tau,\xi;p_j(y')) = G_j(t,x;\tau,\xi;p_j(y')) + W_j(t,x;\tau,\xi;p_j(y')), \qquad (2_j)$$

$$W_j(t,x;\tau,\xi;p_j(y')) := \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G_j(t,x;\beta,\lambda;p_j(y')) Q_j(\beta,\lambda;\tau,\xi;p_j(y'))\, d\lambda, \qquad (3_j)$$

$$0 \le \tau < t \le T, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3},$$

у яких G_j – параметрикс, а функція Q_j – густина об'ємного потенціалу W_j, є розв'язком інтегрального рівняння

$$Q_j(t,x;\tau,\xi;p_j(y')) = K_j(t,x;\tau,\xi;p_j(y')) +$$

$$+ \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_j(t,x;\beta,\lambda;p_j(y')) Q_j(\beta,\lambda;\tau,\xi;p_j(y'))\, d\lambda$$

$$0 \le \tau < t \le T, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}. \qquad (4_j)$$

У формулах (2_j)–(4_j) $p_1(y') = y'$, $p_2(y') = y_3$ і $p_3(y') = 0$. Зауважимо, що функція Z_3 від параметра y не залежить, і для неї використовуватимемо позначення Z, так що $Z(t,x;\tau,\xi) := Z_3(t,x;\tau,\xi;0)$.

Як видно з формул $(2_j)-(4_j)$, побудова та вивчення функцій Z_j, тобто доведення теорем 1–3 з [2], зводиться до визначення та дослідження властивостей функцій G_j, Q_j і W_j. Властивості функцій Q_1 і K_1 наведено в [2] (**пп. 3**, **4**). Тут будемо вивчати функції G_2, G_3, Q_j і W_j, $j \in \mathbb{N}_3$, і завершимо обґрунтування результатів з [2].

При посиланнях на формули зі статті [2] до їх номерів додаватимемо позначку **I**. Як і в [2], однаковими літерами позначаємо різні сталі, якщо їх величини нас не цікавлять.

1. Властивості функції Q_1. Оскільки, згідно з результатами **п. 4** з [2] і твердженням (**I.**31) леми 2 з [2], ядро K_1 інтегрального рівняння (4_1) задовольняє умови леми 1.10 з [3, с. 44], то функція Q_1 визначається рядом

$$Q_1(t,x;\tau,\xi;y') = \sum_{j=1}^{\infty} K_{1j}(t,x;\tau,\xi;y'), \tag{5}$$

у якому

$$K_{1j}(t,x;\tau,\xi;y') = \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,\lambda;y')K_{1(j-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\,d\lambda, \qquad j>1,$$

$$K_{11} := K_1, \qquad 0 \le \tau < t \le T, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}.$$

Лема 1. *За умов* (***i***)–(***iii***) *з* [2] *для функції* Q_1 *справджуються оцінки*

$$\left|\partial_x^k Q_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1} E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{6}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'} Q_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C\,|x_s - z_s|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1-m_s\alpha_s^0} \times$$
$$\times\left(E_c(t-\tau,x,\xi)+E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right), \quad s\in\mathbb{N}_3, \tag{7}$$

$$\left|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} Q_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le$$
$$\le CH_s(h)(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1} E_c(t-\tau,x,\xi), \quad s\in\{2,3\}, \tag{8}$$

$$\left|\partial_x^{k'}\int_{\mathbb{R}^n} Q_1(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-M_{k'}-1+m_1\alpha_1} E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{9}$$

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}\int_{\mathbb{R}^n} Q_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right| \le C|x_1-z_1|^{\alpha_1^0}(t-\tau)^{-M_{k'}-1+m_1(\alpha_1-\alpha_1^0)}, \tag{10}$$

$$\left|\partial_x^{k'}\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Q_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))\,d\xi_2\,d\xi_3\right| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-m_1n_1-M_{k'}-1+m_2\alpha_2} E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1), \quad k'\ne 0, \tag{11}$$

$$\left|\partial_{x_3}^{k_3}\int_{\mathbb{R}^{n_3}} Q_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\right| \le C(t-\tau)^{-m_1(n_1-\alpha_1)-m_2\alpha_2-m_3(|k_3|-\alpha_3)-1} \times$$
$$\times E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)E_c^{21}(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2), \quad k_3\ne 0, \tag{12}$$

де

$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}, \quad z_s \in \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_3,$$

$$k' := (0, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \alpha_1^0 \in (0,1], \quad \{\alpha_2^0, \alpha_3^0\} \subset (0,1],$$

$$H_s(h) := h^{m_s\alpha_s} + |Y_s(h) - z_s|^{\alpha_s}, \quad s \in \{2,3\}, \quad h \in [0,T],$$

α_1, α_2, α_3 – *числа з умов* (**I.**15)–(**I.**17).

Д о в е д е н н я. За допомогою рівностей (**I.**93) і (**I.**97), оцінок (**I.**84) і (**I.**101) та інтегрування частинами, подібно до того, як в [1], доводимо формули

$$\partial_x^{k'} K_{1j}(t,x;\tau,\xi;y') = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k'} K_1(t,x;\beta,\lambda;y') K_{1(j-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\, d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,\lambda;y') \partial_\lambda^{k'} K_{1(j-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\, d\lambda,$$

$$j > 1, \quad t_1 := (t+\tau)/2, \tag{13}$$

та оцінки

$$\left|\partial_x^k K_{1j}(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+jm_1\alpha_1} E_{c_0}(t-\tau,x,\xi), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

З (5) та оцінок (14) випливають оцінки (6).

Аналогічно до (13) встановлюємо формулу

$$\partial_x^{k'} Q_1(t,x;\tau,\xi;y') = \partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y') +$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k'} K_1(t,x;\beta,\lambda;y') Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\, d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,\lambda;y') \partial_\lambda^{k'} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\, d\lambda. \tag{15}$$

Оцінки приростів за змінними x_2 і x_3 цих похідних отримуємо за допомогою зображення

$$\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^{k'} Q_1(t,x;\tau,\xi;y') = \sum_{j=1}^{n_s} \int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}} \partial_{\zeta_{sj}} \partial_x^{k'} Q_1(t,\zeta_s^{(j)};\tau,\xi;y')\, d\zeta_{sj} \tag{16}$$

аналогічно до (**I.**96). Використовуючи оцінки (6) і нерівність (**I.**40), маємо

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^{k'} Q_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le \sum_{j=1}^{n_s} \left| \int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}} \left|\partial_{\zeta_{sj}} \partial_x^{k'} Q_1(t,\zeta_s^{(j)};\tau,\xi;y)\right| d\zeta_{sj} \right| \le$$

$$\le C \sum_{j=1}^{n_s} \left| \int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}} (t-\tau)^{-M-1-M_{k'}-m_s+m_1\alpha_1} E_c(t-\tau,\zeta_s^{(j)},\xi)\, d\zeta_{sj} \right| \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-1-M_{k'}-m_s+m_1\alpha_1} \sum_{j=1}^{n_s} |x_{sj} - z_{sj}| E_{c_0}(t-\tau,x,\xi) \le$$

$$\le C|x_{sj} - z_{sj}|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-M-1-M_{k'}+m_1\alpha_1-m_s\alpha_s^0} E_{c_0}(t-\tau,x,\xi).$$

Тут розглянуто випадок, коли $|x_s - z_s|^{1/m_s} \le (t-\tau)/4$, $s \in \{2,3\}$. У протилежному випадку оцінки (7) безпосередньо випливають з оцінок (6).

Тепер оцінимо прирости похідних від функції Q_1 за змінною x_1. Достатньо розглянути випадок, коли $|x_1 - z_1|^2 \le (t-\tau)/4$. Виходячи з (15), запишемо зображення

$$\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}Q_1(t,x;\tau,\xi;y') = \Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}K_1(t,x;\tau,\xi;y') +$$

$$+\int_{\tau}^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}K_1(t,x;\beta,\lambda;y')Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\,d\lambda +$$

$$+\int_{t_1}^{\eta_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}K_1(t,x;\beta,\lambda;y')\partial_\lambda^{k'}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\,d\lambda +$$

$$+\int_{\eta_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}K_1(t,x;\beta,\lambda;y')\partial_\lambda^{k'}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\,d\lambda -$$

$$-\int_{\eta_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}K_1(t,z^{(1)};\beta,\lambda;y')\partial_\lambda^{k'}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\,d\lambda =: \sum_{j=1}^{5}Q_{1j}\,,$$

де $\eta_1 := t - |x_1 - z_1|^2$, $|x_1 - z_1|^2 \le (t-\tau)/4$, а число t_1 таке, як вище.

Доданок Q_{11} має потрібну оцінку з огляду на оцінки (**I.**109).

За допомогою оцінок (**I.**47), (**I.**109) і (6) отримуємо

$$|Q_{12}| \le C|x_1 - z_1|^{\alpha_1}\int_{\tau}^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-M_{k'}-1}E_c(t-\beta,x,\lambda)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1}E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi) \le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\alpha_1}I_0^{03}(x;\xi)(t-\tau)^{M_{k'}-1}\int_{\tau}^{t}(\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha_1}\,d\beta \le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\alpha_1}(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1}E_{c_0}(t-\tau,x,\xi).$$

Далі для $\eta_s := t - |x_s - z_s|^{1/m_s}$, $|x_1 - z_1|^{1/m_s} \le (t-\tau)/4$, $s \in \mathbb{N}_3$, використовуватимемо нерівності

$$J_s(\gamma) := \int_{t_1}^{\eta_1}(t-\beta)^{-1+\gamma}\,d\beta \le \begin{cases} C(t-\tau)^{\gamma}, & \gamma > 0, \\ C|x_s - z_s|^{\gamma/m_s}, & \gamma < 0. \end{cases} \tag{17}$$

Оцінювання інтеграла Q_{13} проводимо за допомогою оцінок (**I.**47), (**I.**109) для $\alpha_1^0 < \alpha_1$ і (6):

$$|Q_{13}| \le C|x_1 - z_1|^{\alpha_1^0}\int_{t_1}^{\eta_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1+m_1(\alpha_1^0-\alpha_1)}E_c(t-\beta,x,\lambda)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1}E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)\,d\lambda \le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\alpha_1^0} (t_1 - \tau)^{-M_{k'}-1+m_1\alpha_1} I_0^{03}(x;\xi) J_1(m_1(\alpha_1 - \alpha_1^0)) \le$$

$$\le C|x_1 - z_1| (t - \tau)^{-M-M_{k'}-1+\alpha_1 - m_1\alpha_1^0} E_{c_0}(t-\tau, x, \xi), \quad \alpha_1^0 < \alpha_1 .$$

На підставі оцінок (**I.**47), (**I.**101) і (6) отримуємо

$$|Q_{14}| \le C \int_{\eta_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1+m_1\alpha_1} E_c(t-\beta, x, \lambda) \times$$

$$\times (\beta - \tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1} E_c(\beta-\tau, \lambda, \xi)\, d\lambda \le$$

$$\le C(t_1 - \tau)^{-M_{k'}-1+m_1\alpha_1} I_0^{03}(x;\xi) \int_{\eta_1}^{t} (t-\beta)^{-1+m_1\alpha_1} d\beta \le$$

$$\le C(t - \eta_1)^{m_1\alpha_1} (t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1} E_{c_0}(t-\tau, x, \xi) =$$

$$= C|x_1 - z_1|^{\alpha_1} (t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1} E_{c_0}(t-\tau, x, \xi) .$$

Оцінка Q_{15} відрізняється від оцінки Q_{14} лише тим, що в ній x замінено на $z^{(1)}$.

Отже, встановлено оцінки (7) для випадку, коли $\alpha_1^0 \in (0, \alpha_1)$. Ці оцінки справджуються і для $\alpha_1^0 = \alpha_1$. Щоб у цьому переконатися, уточнимо оцінку інтеграла Q_{13}, записавши його у вигляді

$$Q_{13} = \int_{t_1}^{\eta_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1} K_1(t, x; \beta, \lambda; y') \Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)} \partial_{\lambda}^{k'} Q_1(\beta, \lambda; \tau, \xi; y')\, d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^{\eta_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1} K_1(t, x; \beta, \lambda; y')\, d\lambda \right) \partial_{\lambda}^{k'} Q_1(\beta, x; \tau, \xi; y') \Big|_{x = X(t-\beta)} d\beta =:$$

$$=: Q_{13}' + Q_{13}'' .$$

За допомогою оцінок (**I.**35), (**I.**47), (**I.**109) при $\alpha_1^0 = \alpha_1$, оцінки (7) при $\alpha_1^0 < \alpha_1$ і (17) отримуємо

$$|Q_{13}'| \le C|x_1 - z_1|^{\alpha_1} \int_{t_1}^{\eta_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1} E_c(t-\beta, x, \lambda) \times$$

$$\times (\beta-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1} \sum_{s=1}^{3} |X_s(t-\tau) - \lambda_s|^{\alpha_s^0} (\beta-\tau)^{-m_s\alpha_s^0} \times$$

$$\times \sum_{j=s-1}^{s} E_c(\beta-\tau, \Lambda^{0j}(t-\beta), \xi)\, d\lambda \le C|x_1 - z_1|^{\alpha_1} \times$$

$$\times \sum_{s=1}^{3} J_1(m_s\alpha_s^0)(t_1 - \tau)^{-M_{k'}-1+m_1\alpha_1 - m_s\alpha_s^0} \sum_{j=s-1}^{s} I_0^{0j}(x;\xi) \le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\alpha_1} (t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1} E_{c_0}(t, x; \tau, \xi) ,$$

а на підставі оцінок (**I**.42), (**I**.108) при $\alpha_1^0 > \alpha_1$, (6) і (17) маємо

$$|Q''_{13}| \le C \int_{t_1}^{\eta_1} \left(|x_1 - z_1|^{\alpha_1} (t-\beta)^{-1+m_1\alpha_1} + |x_1 - z_1|^{\alpha_1^0} (t-\beta)^{-1-m_1(\alpha_1^0 - \alpha_1)}\right) d\beta \times$$

$$\times (\beta - \tau)^{-M - M_{k'} - 1 + m_1\alpha_1} E_c(t - \tau, X(t-\beta), \xi)\, d\beta \le$$

$$\le C(t_1 - \tau)^{-M - M_{k'} - 1 + m_1\alpha_1} \left(|x_1 - z_1|^{\alpha_1} J_1(m_1\alpha_1) + |x_1 - z_1|^{\alpha_1^0} \times\right.$$

$$\left.\times J_1(-m_1(\alpha_1^0 - \alpha_1))\right) E_c(t - \tau, x, \xi) \le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\alpha_1} (t-\tau)^{-M - M_{k'} - 1 + m_1\alpha_1} E_c(t-\tau, x, \xi)\,.$$

З цих оцінок та оцінок Q_j, $j \in \{1,2,4,5\}$, випливають оцінки (7), у яких $\alpha_1^0 = \alpha_1$. Оцінки (9) і (10) отримуємо інтегруванням відповідно оцінок (6) і (7).

Для отримання оцінок (8) на підставі (4_1) запишемо зображення

$$\Delta_{y_s}^{z_s} Q_1(t,x;\tau,\xi;y') = \Delta_{y_s}^{z_s} K_1(t,x;\tau,\xi;y') +$$

$$+ \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^{k'} K_1(t,x;\beta,\lambda;y') Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\, d\lambda +$$

$$+ \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,\lambda;y')\Big|_{y_s = z_s} \Delta_{y_s}^{z_s} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\, d\lambda\,. \tag{18}$$

Позначивши

$$\Phi_1(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s) = \Delta_{y_s}^{z_s} K_1(t,x;\tau,\xi;y') +$$

$$+ \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{y_s}^{z_s} K_1(t,x;\beta,\lambda;y') Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\, d\lambda\,,$$

отримаємо для функцій $\Delta_{y_s}^{z_s} Q_1$, $s \in \{2,3\}$, такі інтегральні рівняння:

$$\Delta_{y_s}^{z_s} Q_1(t,x;\tau,\xi;y') = \Phi_1(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s) +$$

$$+ \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,\lambda;y')\Big|_{y_s = z_s} \Delta_{y_s}^{z_s} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\, d\lambda, \quad s \in \{2,3\}\,, \tag{19}$$

які є рівняннями такого самого типу, що й (4_1). Оскільки ядро K_1 задовольняє умови леми 1.10 з [3, с. 44], то на підставі цієї леми маємо

$$\Delta_{y_s}^{z_s} Q_1(t,x;\tau,\xi;y') = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{1j}(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s)\,, \tag{20}$$

де

$$\Phi_{1j}(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s) =$$

$$= \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,\lambda;y')\Big|_{y_s = z_s} \Phi_{1(j-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_s,z_s)\, d\lambda, \quad j \ge 2\,,$$

$$\Phi_{11} := \Phi_1, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \{y_s, z_s\} \in \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \{2,3\}\,, \tag{21}$$

причому ряд із (20) рівномірно збігається. Диференціюючи обидві частини рівності (20), отримуємо

$$\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}Q_1(t,x;\tau,\xi;y') = \sum_{j=1}^{\infty}\partial_x^{k'}\Phi_{1j}(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s),\quad k'\in\mathbb{Z}_+^n,\quad s\in\{2,3\}, \tag{22}$$

де

$$\partial_x^{k'}\Phi_{11}(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s) = \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_1(t,x;\tau,\xi;y') +$$

$$+\int_\tau^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_1(t,x;\beta,\lambda;y')Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\,d\lambda +$$

$$+\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{y_s}^{z_s}K_1(t,x;\beta,\lambda;y')\Delta_\lambda^{X(t-\beta)}\partial_x^{k'}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\,d\lambda +$$

$$+\int_\tau^{t_1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{y_s}^{z_s}K_1(t,x;\beta,\lambda;y')d\lambda\right)\partial_x^{k'}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\Big|_{\lambda=X(t-\beta)}d\beta =:$$

$$=:\sum_{j=1}^{4}\Phi_1^j\,, \tag{23}$$

$$\partial_x^{k'}\Phi_{1j}(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s) =$$

$$=\int_\tau^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^{k'}K_1(t,x;\beta,\lambda;y')\Big|_{y_s=z_s}\Phi_{1(j-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_s,z_s)\,d\lambda +$$

$$+\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}K_1(t,x;\beta,\lambda;y')\Big|_{y_s=z_s}\partial_\lambda^{k'}\Phi_{1(j-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_s,z_s)\,d\lambda\,,$$

$$j\ge 2\,. \tag{24}$$

Формули (23) і (24) доводяться аналогічно до доведення (13).

Перейдемо до встановлення оцінок. Щоб оцінити $\partial_x^{k'}\Phi_1$, необхідно оцінити доданки Φ_1^j, $j\in\mathbb{N}_4$. Для доданка Φ_1^1 справджується оцінка (**I.**103). За допомогою оцінок (**I.**47), (**I.**103) і (6) отримуємо

$$\left|\Phi_1^2\right| \le CH_s(h)\int_\tau^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-M_{k'}-1}E_c(t-\beta,x,\lambda)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1}E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda \le$$

$$\le CH_s(h)(t-t_1)^{-M_{k'}-1}\int_\tau^{t_1}(\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha_1}\,d\beta\cdot I_0^{03}(x;\xi) \le$$

$$\le CH_s(h)(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1}E_{c_0}(t-\tau,x,\xi)\,.$$

Для оцінки доданків Φ_1^3 і Φ_1^4 спочатку на підставі оцінок (7) запишемо

$$\left|\Delta_\lambda^{X(t-\beta)}\partial_x^{k'}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\right| \le \left|\Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\beta)}\partial_x^{k'}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\Big|_{\lambda=\Lambda^{01}(t-\beta)}\right| +$$

$$+\left|\Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)}\partial_x^{k'}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\Big|_{\lambda=\Lambda^{02}(t-\beta)}\right| +$$

$$+\left|\Delta_\lambda^{\Lambda^{02}(t-\beta)}\partial_\lambda^{k'}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\right| \le C\sum_{\ell=1}^{3}\left|X_\ell(t-\beta)-\lambda_\ell\right|^{\alpha_\ell^0} \times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1-m_\ell\alpha_\ell^0}\sum_{j=\ell-1}^{\ell}E_c(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta),\xi). \quad (25)$$

Покладаючи в оцінках (25) $\alpha_\ell^0 = m_1\alpha_1/m_\ell$, $\ell\in\mathbb{N}_3$, та використовуючи оцінки (**I.**35), (**I.**42), (**I.**47), (**I.**106), (**I.**108) і (17), одержуємо

$$\left|\Phi_1^3\right| \le CH_s(h)\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1}\sum_{\ell=1}^{3}\left|X_\ell(t-\beta)-\lambda_\ell\right|^{\alpha_\ell^0}E_c(t-\beta,x,\lambda)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-M_{k'}-1}\sum_{j=\ell-1}^{\ell}E_c(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta),\xi)\le$$

$$\le CH_s(h)(t_1-\tau)^{-M_{k'}-1}\int_{\tau}^{t}(t-\beta)^{-1+m_1\alpha_1}d\beta\cdot\sum_{\ell=1}^{3}\sum_{j=\ell-1}^{\ell}I_0^{0j}(x;\xi)\le$$

$$\le CH_s(h)(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1}E_{c_0}(t-\tau,x,\xi), \qquad s\in\{2,3\},$$

$$\left|\Phi_1^4\right| \le CH_s(h)\int_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+m_1\alpha_1}(\beta-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1}E_c(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)\,d\beta\le$$

$$\le CH_s(h)(t_1-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1}\int_{\tau}^{t}(t-\beta)^{-1+m_1\alpha_1}\,d\beta\,E_c(t-\tau,x,\xi)\le$$

$$\le CH_s(h)(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\alpha_1}E_c(t-\tau,x,\xi).$$

З оцінок доданків Φ_1^j, $j\in\mathbb{N}_4$, суми (23) і того, що $\Phi_1=\Phi_{11}$, випливає оцінка

$$\left|\partial_x^{k'}\Phi_{11}(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s)\right| \le CH_s(h)(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1}E_{c_0}(t-\tau,x,\xi). \quad (26)$$

Оцінювання інших членів суми з (20) здійснюємо методом математичної індукції з використанням рівності (21) та оцінок (**I.**47), (**I.**101) і (26). Маємо

$$\left|\partial_x^{k'}\Phi_{12}(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s)\right|\le$$

$$\le\int_{\tau}^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\left|\partial_x^{k'}K_1(t,x;\beta,\lambda;y')\Big|_{y_s=z_s}\right|\left|\Phi_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_s,z_s)\right|d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\left|K_1(t,x;\beta,\lambda;y')\Big|_{y_s=z_s}\right|\left|\partial_\lambda^{k'}\Phi_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_s,z_s)\right|d\lambda\le$$

$$\le CH_s(h)\Bigg(\int_{\tau}^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1}E_c(t-\beta,x,\lambda)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1}E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)\,d\lambda+\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1+m_1\alpha_1}\times$$

$$\times E_c(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1} E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)\,d\lambda\Bigg) \le$$

$$\le CH_s(h)\Bigg((t-t_1)^{-M_{k'}-1+m_1\alpha_1}\int_\tau^{t_1}(\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha_1}\,d\beta +$$

$$+(t_1-\tau)^{-M_{k'}-1+m_1\alpha_1}\int_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+m_1\alpha_1}\,d\beta\Bigg)((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n} E_c(t-\beta,x,\lambda)E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)\,d\lambda \le$$

$$\le CH_s(h)(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+2m_1\alpha_1} E_{c_0}(t-\tau,x,\xi)\,,$$

$$\left|\partial_x^{k'}\Phi_{1(j+1)}(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s)\right| \le$$

$$\le \int_\tau^{t_1} d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\left|\partial_x^{k'}K_1(t,x;\beta,\lambda;y')\big|_{y_s=z_s}\right|\left|\Phi_{1j}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_s,z_s)\right|d\lambda +$$

$$+\int_{t_1}^{t} d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\left|K_1(t,x;\beta,\lambda;y')\big|_{y_s=z_s}\right|\left|\partial_\lambda^{k'}\Phi_{1j}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_s,z_s)\right|d\lambda \le$$

$$\le CH_s(h)\Bigg(\int_\tau^{t_1} d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1}E_c(t-\beta,x,\lambda)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+jm_1\alpha_1}E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda +$$

$$+\int_{t_1}^{t} d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1+m_1\alpha_1}E_c(t-\beta,x,\lambda)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-M_{k'}-1+jm_1\alpha_1}E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\Bigg) \le$$

$$\le CH_s(h)\Bigg((t-t_1)^{-M_{k'}-1+m_1\alpha_1}\int_\tau^{t_1}(\beta-\tau)^{-1+jm_1\alpha_1}\,d\beta +$$

$$+(t_1-\tau)^{-M_{k'}-1+jm_1\alpha_1}\int_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+m_1\alpha_1}\,d\beta\Bigg)((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n} E_c(t-\beta,x,\lambda)E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)\,d\lambda \le$$

$$\le CH_s(h)(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+(j+1)m_1\alpha_1} E_{c_0}(t-\tau,x,\xi),\quad j\ge 2\,.$$

З цих оцінок і випливають оцінки (8).

Інтегруванням оцінок (6) і (7) отримуємо оцінки (9) і (10).

Перейдемо до доведення оцінок (11) і (12). Спочатку, зінтегрувавши рівність (**I.**97) та врахувавши рівності (**I.**94) і (**I.**95), отримаємо такі співвідношення:

$$\partial_x^{k'} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} K_1(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi_2\,d\xi_3 = 0, \qquad k' \neq 0\,,$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} K_1(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \neq 0\,.$$

З (13) і цих рівностей за індукцією отримуємо

$$\partial_x^{k'} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} K_{1j}(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi_2\,d\xi_3 = 0, \qquad k' \neq 0, \qquad j \geq 1\,,$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} K_{1j}(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \neq 0, \qquad j \geq 1\,.$$

Отже,

$$\partial_x^{k'} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Q_1(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi_2\,d\xi_3 = 0, \qquad k' \neq 0\,,$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Q_1(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \neq 0\,.$$

На підставі цих рівностей запишемо такі зображення:

$$\partial_x^{k'} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Q_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))\,d\xi_2\,d\xi_3 =$$

$$= \partial_x^{k'} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \left(-\Delta_{y_2}^{\xi_2} Q_1(t,x;\tau,\xi;y')\right)\Big|_{y_2=x_2} d\xi_2\,d\xi_3, \qquad k' \neq 0\,,$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Q_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))\,d\xi_3 =$$

$$= \partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \left(-\Delta_{y_3}^{\xi_3} Q_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))\right)\Big|_{y_3=x_3} d\xi_3, \qquad k_3 \neq 0\,.$$

За допомогою цих зображень та оцінок (**I.**35), (**I.**37), (**I.**38) і (8) отримуємо

$$\left|\partial_x^{k'} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Q_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))\,d\xi_2\,d\xi_3\right| \leq C(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \left((t-\tau)^{m_2\alpha_2} + |X_2(t-\tau)-\lambda_2|^{\alpha_2}\right) E_c(t-\tau,\lambda,\xi)\,d\xi_2\,d\xi_3 \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-m_1(n_1-\alpha_1)-M_{k'}-1+m_2\alpha_2} E_{c_0}^1(t-\tau,x_1-\xi_1), \qquad k' \neq 0\,,$$

$$\left|\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Q_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))\,d\xi_3\right| \leq C(t-\tau)^{-M-m_3|k_3|-1+m_1\alpha_1} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \left((t-\tau)^{m_2\alpha_2} + |X_2(t-\tau)-\lambda_2|^{\alpha_2}\right) E_c(t-\tau,\lambda,\xi)\,d\xi_3 \leq$$

$$\leq CE_{c_0}^1(t-\tau,x_1-\xi_1)(t-\tau)^{-m_1(n_1-\alpha_1)-m_2n_2-1-m_3(|k_3|-\alpha_3)} \times$$

$$\times E_{c_0}^2(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2), \qquad k_3 \neq 0\,.$$

Оцінки (11) і (12) встановлено. Лему 1 доведено. ♦

2. Об'ємний потенціал W_1. Наведемо властивості об'ємного потенціалу (3_1) з першого етапу побудови КФРЗК.

Лема 2. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1_1) *задовольняють умови* $(\boldsymbol{i})$–$(\boldsymbol{iii})$ *з* [2]. *Тоді є правильними такі твердження*:

1°) *функція* (3_1) *має неперервні похідні вигляду* $\partial_x^k W_1$, *де мультиіндекс* $k := (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^n$ *такий, що* $\|k\| := |k_1| + 2(|k_2| + |k_3|) \le 2$. *Похідні визначаються формулами*

$$\partial_{x_1}^{k_1} W_1(t,x;\tau,\xi;y') = \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_1(t,x;\beta,\lambda;y') Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\, d\lambda, \quad |k_1| = 1, \tag{27}$$

$$\partial_{x_1}^{k_1} W_1(t,x;\tau,\xi;y') = \int_\tau^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_1(t,x;\beta,\lambda;y') Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\, d\lambda +$$
$$+ \int_{t_1}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_1(t,x;\beta,\lambda;y') \Delta_\lambda^{X(t-\beta)} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\, d\lambda +$$
$$+ \int_{t_1}^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_1(t,x;\beta,\lambda;y')\, d\lambda \right) Q_1(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi;y')\, d\beta,$$
$$|k_1| = 2, \tag{28}$$

$$\partial_x^{k'} W_1(t,x;\tau,\xi;y') = \int_\tau^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k'} G_1(t,x;\beta,\lambda;y') Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\, d\lambda +$$
$$+ \int_{t_1}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G_1(t,x;\beta,\lambda;y') \partial_x^{k'} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\, d\lambda, \quad |k'| \ne 0; \tag{29}$$

2°) *справджуються оцінки*

$$\left| \partial_{x_1}^{k_1} W_1(t,x;\tau,\xi;y') \right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k+m_1\alpha_1} E_c(t-\tau,x,\xi), \qquad \|k\| \le 2, \tag{30}$$

$$\left| \Delta_{x_s}^{z_s} \partial_{x_1}^{k_1} W_1(t,x;\tau,\xi;y') \right| \le C |x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-M-M_{k'}+m_1\alpha_1-m_s\alpha_s^0} \times$$
$$\times \left(E_c(t-\tau,x,\xi) + E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi) \right), \quad \|k\| = 2, \quad s \in \mathbb{N}_3, \tag{31}$$

$$\left| \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_{x_\ell} W_1(t,x;\tau,\xi;y') \right| \le C H_s(h) (t-\tau)^{-M-m_\ell+m_1\alpha_1} E_c(t-\tau,x,\xi),$$
$$\{s,\ell\} \subset \{2,3\}, \tag{32}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} W_1(t,x;\tau,\xi;y')\, d\xi \right| \le C(t-\tau)^{-M_k+m_1\alpha_1}, \qquad 0 < \|k\| \le 2, \tag{33}$$

$$\left| \Delta_{x_s}^{z_s} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k W_1(t,x;\tau,\xi;y')\, d\xi \right| \le C |x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-M_k-m_s\alpha_s^0+m_1\alpha_1},$$
$$0 < \|k\| \le 2, \qquad s \in \mathbb{N}_3, \tag{34}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k W_1(t,x;\tau,\xi;y')\, d\xi_2\, d\xi_3 \right| \le C(t-\tau)^{-m_1 n_1 - M_k + m_1\alpha_1} E_{c_0}^1(t-\tau, x_1 - \xi_1),$$
$$\|k\| \le 2, \tag{35}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k W_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3\right| \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-m_1n_1 - M_k - m_s\alpha_s^0 + m_1\alpha_1} \times$$

$$\times \left(E_{c_0}^1(t-\tau, x_1 - \xi_1) + E_{c_0}^1(t-\tau, z_1 - \xi_1)\right), \quad \|k\| = 2, \quad s \in \mathbb{N}_3, \tag{36}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_x^k W_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3\right| \le C(t-\tau)^{-m_1n_1 - m_2n_2 - M_k + m_1\alpha_1} E_{c_0}^1(t-\tau, x_1-\xi_1) \times$$

$$\times E_{c_0}^2(t-\tau, X_2(t-\tau) - \xi_2), \qquad \|k\| \le 2, \tag{37}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_x^k W_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3\right| \le C|x_s - z_s|^{\alpha_s^0} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-m_1n_1 - m_2n_2 - M_k - m_s\alpha_s^0 + m_1\alpha_1} E_{c_0}^1(t-\tau, x_1 - \xi_1) \times$$

$$\times E_{c_0}^2(t-\tau, X_2(t-\tau) - \xi_2), \qquad \|k\| \le 2, \quad s \in \mathbb{N}_3, \tag{38}$$

$$\partial_x^{k'} W_1(t,x;\tau,\xi;y') = (-\partial_\xi)^{k'} W_1(t,x;\tau,\xi;y'), \qquad k' \ne 0. \tag{39}$$

У формулах (27)–(39)

$$0 \le \tau < t \le T, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}, \quad z_s \in \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_3,$$

$$k' := (0,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+^n, \ \ \alpha_1^0 \in (0,1], \ \ \{\alpha_2^0, \alpha_3^0\} \subset (0,1], \ \ s \in \{2,3\}, \ \ h \in [0,T],$$

$H_s(h)$ *і числа* α_1, α_2, α_3 *такі, як у лемі 1.*

Д о в е д е н н я. Існування похідних від W_1 і формули (27)–(29) для них доводяться подібно до встановлення властивості 2.6 з [3]. Для цього треба довести рівномірну збіжність інтегралів

$$I_\beta^{(k,s')} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G_1(t,x;\beta,\lambda;y') \partial_\lambda^{s'} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\,d\lambda, \quad \|k\| \le 2, \quad \|s'\| \le 2,$$

$$J_\beta^{(k_1)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_1(t,x;\beta,\lambda;y') \Delta_\lambda^{X(t-\beta)} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\,d\lambda, \quad |k_1| = 2,$$

$$0 \le \tau < \beta < t \le T, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3},$$

яка випливає з їх наступних оцінок.

За допомогою оцінок (**I.**35), (**I.**47), (**I.**84), (6) і (25) маємо

$$\left|I_\beta^{(k,s')}\right| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-M_k} E_c(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-M_{s'}-1+m_1\alpha_1} \times$$

$$\times E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)\,d\lambda = C(t-\beta)^{-M_k}(\beta-\tau)^{-M_{s'}-1+m_1\alpha_1} I_0^{03}(x;\xi) \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M}(t-\beta)^{-M_k}(\beta-\tau)^{-M_{s'}-1+m_1\alpha_1} E_{c_0}(t-\tau,x,\xi),$$

$$\left|J_\beta^{(k_1)}\right| \le C \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1} E_c(t-\beta,x,\lambda) \sum_{\ell=1}^{3} |X_\ell(t-\beta) - \lambda_\ell|^{\alpha_\ell^0} \times$$

$$\times (\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_\ell\alpha_\ell^0} \sum_{j=\ell-1}^{\ell} E_c(\beta-\tau, \Lambda^{0j}(t-\beta), \xi)\, d\lambda \le$$

$$\le C\sum_{\ell=1}^{3} (t-\beta)^{-1+m_\ell\alpha_\ell^0} (\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha_1-m_\ell\alpha_\ell^0} (t-\tau)^{-M} \times$$

$$\times E_{c_0}(t-\tau, x, \xi)\,. \tag{40}$$

Використовуючи формули (27)–(29) та оцінки (**I.**42), (**I.**87), (6) і (40), отримуємо

$$\left|\partial_{x_1}^{k_1} W_1\right| \le C(t-\tau)^{-M} E_{c_0}(t-\tau, x, \xi) \int_\tau^t (t-\beta)^{-m_1|k_1|} (\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha_1}\, d\beta =$$

$$= C(t-\tau)^{-M-m_1(|k_1|-\alpha_1)} E_{c_0}(t-\tau, x, \xi), \qquad |k_1| \le 1\,,$$

$$\left|\partial_{x_1}^{k_1} W_1\right| \le C(t-\tau)^{-M} E_{c_0}(t-\tau, x, \xi) \left(\int_\tau^{t_1} (t-\beta)^{-m_1|k_1|} (\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha_1}\, d\beta + \right.$$

$$+ \int_{t_1}^{t} \sum_{\ell=1}^{3} (t-\beta)^{-1+m_\ell\alpha_\ell^0} (\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha_1-m_\ell\alpha_\ell^0}\, d\beta +$$

$$\left. + \int_{t_1}^{t} (t-\beta)^{-m_1(|k_1|-\alpha_1)} (\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha_1}\, d\beta \right) \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-m_1(|k_1|-\alpha_1)} E_{c_0}(t-\tau, x, \xi), \qquad |k_1| = 2\,,$$

$$\left|\partial_x^{k'} W_1\right| \le C(t-\tau)^{-M} E_{c_0}(t-\tau, x, \xi) \left(\int_\tau^{t_1} (t-\beta)^{-M_{k'}} (\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha_1}\, d\beta + \right.$$

$$\left. + \int_{t_1}^{t} (\beta-\tau)^{-M_{k'}-1+m_1\alpha_1}\, d\beta \right) \le C(t-\tau)^{-M-M_{k'}+m_1\alpha_1} \times$$

$$\times E_{c_0}(t-\tau, x, \xi), \qquad \|k'\| = 2\,.$$

З цих оцінок випливають оцінки (30).

Оцінимо прирости старших похідних за просторовими змінними. На підставі рівності (28) запишемо для випадку, коли $|x_1 - z_1|^{1/m_1} \le (t-\tau)/4$, зображення

$$\Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_1}^{k_1} W_1(t, x; \tau, \xi; y') = \int_\tau^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_1}^{k_1} G_1(t, x; \beta, \lambda; y') Q_1(\beta, \lambda; \tau, \xi; y')\, d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^{\eta_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_1}^{k_1} G_1(t, x; \beta, \lambda; y') \Delta_\lambda^{X(t-\beta)} Q_1(\beta, \lambda; \tau, \xi; y')\, d\lambda +$$

$$+ \int_{\eta_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_1(t, x; \beta, \lambda; y') \Delta_\lambda^{X(t-\beta)} Q_1(\beta, \lambda; \tau, \xi; y')\, d\lambda -$$

$$- \int\limits_{\eta_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_1(t, z^{(1)}; \beta, \lambda; y') \Delta_{\lambda}^{Z^{(1)}(t-\beta)} Q_1(\beta, \lambda; \tau, \xi; y')\, d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{\eta_1} \Delta_{x_1}^{z_1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_1(t, x; \beta, \lambda; y')\, d\lambda \right) Q_1(\beta, X(t-\beta); \tau, \xi; y')\, d\beta +$$

$$+ \int\limits_{\eta_1}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_1(t, x; \beta, \lambda; y')\, d\lambda \right) Q_1(\beta, X(t-\beta); \tau, \xi; y')\, d\beta -$$

$$- \int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_1(t, z^{(1)}; \beta, \lambda; y')\, d\lambda \right) Q_1(\beta, Z^{(1)}(t-\beta); \tau, \xi; y')\, d\beta\,,$$

$$t_1 = (t+\tau)/2, \quad \eta_1 = t - |x_1 - z_1|^{1/m_1}, \quad |k_1| = 2. \tag{41}$$

Інтеграли з формули (41) оцінюються подібно до інтегралів з (27)–(29), тільки додатково треба використовувати оцінки (**I.**85) і (**I.**88). Для прикладу оцінимо другий доданок із (41), який позначимо через W_{12}, при цьому в оцінці (**I.**85) візьмемо $\alpha_1^0 > \alpha_1$, а в оцінці (**I.**88) – $\alpha_s^0 = m_1\alpha_1/m_s$, $s \in \mathbb{N}_3$:

$$|W_{12}| \le C|x_1 - z_1|^{\alpha_1^0} \int\limits_{t_1}^{\eta_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1-m_1\alpha_1^0} E_c(t-\beta, x, \lambda) \times$$

$$\times (\beta - \tau)^{-M-1+m_1\alpha_1 - m_\ell\alpha_\ell} \sum_{\ell=1}^{3} |X_\ell(t-\beta) - \lambda_\ell|^{\alpha_\ell^0} \times$$

$$\times \sum_{j=\ell-1}^{\ell} E_c(\beta - \tau, \Lambda^{0j}(t-\beta), \xi) \le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\alpha_1^0} J_1(m_1(\alpha_1 - \alpha_1^0))(t_1 - \tau)^{-1} \sum_{\ell=0}^{3} I_0^{0\ell}(x;\xi) \le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\alpha_1^0} |x_1 - z_1|^{\alpha_1 - \alpha_1^0} (t-\tau)^{-M-1} E_{c_0}(t-\tau, x, \xi) \le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\alpha_1} (t-\tau)^{-M-1} E_{c_0}(t-\tau, x, \xi)\,.$$

Результатом оцінювань інтегралів із (41) є оцінка (31) для $s = 1$. Для отримання оцінки (31) при $s \in \{2, 3\}$ зауважимо, що подібно до формул (28) і (29) виводиться формула

$$\partial_{x_1}^{k_1} \partial_x^{k'} W_1(t, x; \tau, \xi; y') = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} \partial_x^{k'} G_1(t, x; \beta, \lambda; y') Q_1(\beta, \lambda; \tau, \xi; y')\, d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_1(t, x; \beta, \lambda; y') \Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)} \partial_x^{k'} Q_1(\beta, \lambda; \tau, \xi; y')\, d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_1(t, x; \beta, \lambda; y')\, d\lambda \right) \partial_x^{k'} Q_1(\beta, X(t-\beta); \tau, \xi; y')\, d\beta\,,$$

$$|k_1| = 2, \quad k' \in \mathbb{Z}_+^n,$$

тобто старші похідні за основною змінною x_1 мають ще похідні за змінними групи виродження x_2 і x_3. Це дозволяє для приростів за змінними x_2 і x_3 записати подібне до (**I.**96) зображення:

$$\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k W_1(t,x;\tau,\xi;y') = \sum_{j=1}^{n_s}\int_{x_{sj}}^{z_{sj}} \partial_{\zeta_{sj}}\partial_x^k W_1(t,\zeta_s^{(j)};\tau,\xi;y')\,d\zeta_{sj}, \qquad s\in\{2,3\},$$

та обґрунтувати правильність оцінок (31) у цьому випадку.

Щоб оцінити прирости $\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_{x\ell}W_1$, $\{s,\ell\}\subset\{2,3\}$, використаємо зображення

$$\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}W_1(t,x;\tau,\xi;y') = \int_\tau^{t_1} d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}G_1(t,x;\beta,\lambda;y')Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\,d\lambda +$$

$$+\int_\tau^{t_1} d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^{k'}G_1(t,x;\beta,\lambda;y')\Big|_{y_s=z_s}\Delta_{y_s}^{z_s}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\,d\lambda +$$

$$+\int_{t_1}^{t} d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{y_s}^{z_s}G_1(t,x;\beta,\lambda;y')\partial_x^{k'}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')\,d\lambda +$$

$$+\int_{t_1}^{t} d\beta\int_{\mathbb{R}^n}G_1(t,x;\beta,\lambda;y')\Big|_{y_s=z_s}\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda,$$

$$s\in\{2,3\},\qquad k'\in\mathbb{Z}_+^n,$$

та оцінки (**I.**84), (**I.**86), (6) і (8).

Інтегруванням (30) і (31) відповідно за $\xi\in\mathbb{R}^n$, $(\xi_2,\xi_3)\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}$ і $\xi_3\in$ $\in\mathbb{R}^{n_3}$ отримуємо оцінки (33)–(37).

Враховуючи рівність (**I.**93) для G_1, для доведення рівності (39) достатньо довести аналогічну рівність для Q_1, а для цього – таку саму рівність для ядра K_1 і його повторних ядер K_{1j}, $j\ge 2$. Потрібна рівність для K_1 випливає з (**I.**93) і (**I.**97), а за її допомогою і з використанням рекурентних співвідношень (13) – також і для ядер K_{1j}.

Лема 4 з [2], а також леми 1 і 2 на підставі формули (2_1) обґрунтовують твердження теореми 1 з [2] про КФРЗК Z_1 і завершують перший етап його побудови.

3. Другий і третій етапи побудови КФРЗК. Дослідження властивостей функцій G_j, K_j, Q_j і W_j, $j\in\{2,3\}$, у другому та третьому етапах проводиться за методикою, використаною в першому етапі. Ці дослідження в принципі повторюють з природними особливостями відповідні дослідження в першому етапі. Коротко зупинимося на цих особливостях.

Так, властивості параметриксу G_2 є такими, як і сформульовані в теоремі 1 з [2] для Z_2 з тією відмінністю, що $\alpha_2^0\in(0,\alpha_2]$ для Z_2 і $\alpha_2^0\in(0,1]$ для G_2, тобто Z_2 має, взагалі кажучи, нижчий показник гладкості за змінною x_2, ніж G_2. Це зумовлено тим, що саме таку гладкість має об'ємний потенціал W_2. Причина цього криється у властивостях густини Q_2, яка, взагалі кажучи, не має похідної за змінною x_2, а є лише неперервною за цією змінною за Гельдером з показником α_2. Тому для похідної $\partial_{x_2}^{k_2} W_2$, $|k_2| = 1$, треба використати формулу

$$\partial_{x_2}^{k_2} W_2(t,x;\tau,\xi;y_3) = \int_\tau^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_2(t,x;\beta,\lambda;y_3) Q_2(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)\, d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_2}^{k_2} G_2(t,x;\beta,\lambda;y') d\lambda_2 d\lambda_3 \right) \times$$

$$\times \Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\beta)} Q_2(\beta,\Lambda^{01}(t-\beta);\tau,\xi;y_3)\, d\lambda_1 +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_2(t,x;\beta,\lambda;y_3) \times$$

$$\times \big(\Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)} Q_2(\beta,\Lambda^{02}(t-\beta);\tau,\xi;y_3) +$$

$$+ \Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(t-\beta)} Q_2(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3) \big)\, d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_2(t,x;\beta,\lambda;y_3) d\lambda \right) Q_2(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi;y_3)\, d\beta. \quad (42)$$

Оцінивши звичайним способом, подібно до попереднього, інтеграли з (42), отримаємо оцінку

$$\left| \partial_{x_2}^{k_2} W_2(t,x;\tau,\xi;y_3) \right| \le C(t-\tau)^{-M-m_2(1-\alpha_2)} E_{c_0}(t-\tau,x,\xi),$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}, \quad |k_2| = 1.$$

Тут використано те, що $-m_2(1-\alpha_2) = -1 + (3\alpha_2 - 1)/2$ і $3\alpha_2 - 1 > 0$, оскільки згідно з умовою (**I.**16) $\alpha_2 \in (1/3, 2/3]$.

Аналогічна ситуація виникає на третьому етапі. На цьому етапі G_3, Q_3 і W_3 від параметра y вже не залежать. Формули для похідних $\partial_{x_3}^{k_3} W_3$, $|k_3| = 1$, мають вигляд

$$\partial_{x_3}^{k_3} W_3(t,x;\tau,\xi;0) = \int_\tau^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_3}^{k_3} G_3(t,x;\beta,\lambda;0) Q_3(\beta,\lambda;\tau,\xi;0)\, d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} G_3(t,x;\beta,\lambda;0)\, d\lambda_2\, d\lambda_3 \right) \times$$

$$\times \Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\beta)} Q_3(\beta,\Lambda^{01}(t-\beta);\tau,\xi;0) d\lambda_1 +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} G_3(t,x;\beta,\lambda;0)\, d\lambda_3 \right) \times$$

$$\times \Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{\Lambda^{02}(t-\beta)} Q_3(\beta,\Lambda^{01}(t-\beta);\tau,\xi;0)\, d\lambda_1 +$$

$$+\int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_3}^{k_3} G_3(t,x;\beta,\lambda;0)\Delta_\lambda^{\Lambda^{02}(t-\beta)} Q_3(\beta,\lambda;\tau,\xi;0)\,d\lambda +$$

$$+\int_{t_1}^{t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_3}^{k_3} G_3(t,x;\beta,\lambda;0)d\lambda \right) Q_3(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi;0)\,d\beta\,.$$

Оцінювання інтегралів із цієї формули приводить до такого результату:

$$\left|\partial_{x_3}^{k_3} W_3(t,x;\tau,\xi;0)\right| \le C(t-\tau)^{-M-m_3(1-\alpha_3)} E_{c_0}(t-\tau,x,\xi)\,,$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad |k_3| = 1\,.$$

де $-m_3(1-\alpha_3) = -1 + (5\alpha_3 - 3)/2$ і $5\alpha_3 - 3 > 0$, оскільки за умовою (**I.**17) $\alpha_3 \in (3/5,\ 2/3]$.

З властивостей функцій G_j і W_j, $j \in \{2,3\}$, випливають твердження теореми 2 з [2], а також твердження теореми 3 з [2] про існування КФРЗК $Z := Z_3$ та його оцінки (**I.**82). Оцінка (**I.**83) випливає з оцінок (**I.**82) і того, що Z є розв'язком рівняння (1_3).

Отже, основним результатом дослідження, розпочатого в [2] і завершеного в цій статті, є така

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1_3) *виконуються умови* (***i***)−(***iii***) *з* [2]. *Тоді для рівняння* (1_3) *існує КФРЗК* Z, *для якого справджуються оцінки*

$$\left|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E_c(t-\tau,x,\xi)\,,$$

$$|SZ(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-1} E_c(t-\tau,x,\xi)\,,$$

у яких

$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad k = (k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+^n\,,$$

$m_1|k_1| + |k_2| + |k_3| \le 1$, C *і* c − *додатні сталі.*

Висновки. У статті запропоновано умови (умови (***i***)−(***iii***) з [2]) на коефіцієнти ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами змінних виродження, за яких новою модифікацією класичного методу Леві побудовано КФРЗК та одержано точні оцінки Z і його похідних. Для випадку однієї групи виродження згідно з [1] умова (***iii***) не накладається. Ці результати і методика їх отримання знайдуть застосування для побудови й дослідження ФРЗК для загальніших рівнянь, а також для встановлення коректної розв'язності та інтегрального зображення розв'язків задачі Коші.

1. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Диференц. рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. В. А. Михайлець. − 2016. − **13**, № 1. − С. 108−155.
2. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. I // Мат. методи та фіз.-мех. поля. − 2017. − **60**, № 3. − С. 9−31.
3. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. − Basel: Birkhдuser, 2004. − 390 p. − Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. − Vol. 152. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9.

КЛАССИЧЕСКОЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОЛМОГОРОВА С ДВУМЯ ГРУППАМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ВЫРОЖДЕНИЯ. II

Для вырожденного ультрапараболического уравнения типа Колмогорова с двумя группами пространственных переменных вырождения построено классическое фундаментальное решение задачи Коши. Получены точные оценки этого решения и его производных.

CLASSICAL FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ULTRAPARABOLIC KOLMOGOROV-TYPE EQUATIONS WITH TWO GROUPS OF SPATIAL VARIABLES OF DEGENERATION. II

The classical fundamental solution of the Cauchy problem for degenerate ultraparabolic equation of Kolmogorov type with two groups of spatial variables of degeneration is constructed. Exact estimations of this solution and its derivatives are obtained.

[1] Нац. техн. ун-т України
«Київ. політех. ін-т ім. І. Сікорського», Київ,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[3] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
20.10.17