УДК 517.55

А. І. Бандура[1], О. Б. Скасків[2], В. Л. Цвігун[2]

АНАЛІТИЧНІ В $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОГО $\mathbf{L}$-ІНДЕКСУ ЗА СУКУПНІСТЮ ЗМІННИХ

Розглянуто поняття обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для аналітичних в $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ функцій. Встановлено критерії обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для аналітичних функцій, які описують їх локальні властивості. Отримані критерії застосовано для дослідження обмеженості індексу композицій аналітичних функцій з деформованою показниковою функцією.

Вступ. Використаємо типові позначення: $\mathbb{R}_+=(0,+\infty)$, $\mathbf{0}=(0,0)$, $\mathbf{1}=(1,1)$, $R=(r_1,r_2)\in\mathbb{R}_+^2$, $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{D}\times\mathbb{C}$, $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$. Для $A=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$, $B=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$ використовуємо такі формальні записи: $AB=(a_1b_1,a_2b_2)$, $A/B=(a_1/b_1,a_2/b_2)$, $A^B=a_1^{b_1}a_2^{b_2}$. Запис $A<B$ означає, що $a_j<b_j$, $j\in\{1,2\}$; аналогічний зміст має запис $A\le B$. Для $K=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}_+^2$ позначимо $\|K\|=k_1+k_2$, $K!=k_1!\cdot k_2!$.

При $z^0=(z_1^0,z_2^0)\in\mathbb{C}^2$ через $\mathbb{D}^2(z^0,R)$ позначимо бікруг $\{z\in\mathbb{C}^2: |z_j-z_j^0|<r_j,\ j\in\{1,2\}\}$, через $\mathbb{T}^2(z^0,R)$ – його кістяк $\{z\in\mathbb{C}^2: |z_j-z_j^0|=r_j,\ j\in\{1,2\}\}$, а через $\mathbb{D}^2[z^0,R]$ – замкнений бікруг $\{z\in\mathbb{C}^2: |z_j-z_j^0|\le r_j,\ j\in\{1,2\}\}$. Для $K=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}_+^2$, $z\in\mathbb{C}^2$ та частинних похідних функції $F(z)=F(z_1,z_2)$ використовуємо такий запис

$$F^{(K)}(z)=\frac{\partial^{\|K\|}F(z)}{\partial z^K}=\frac{\partial^{k_1+k_2}F(z)}{\partial z_1^{k_1}\partial z_2^{k_2}}.$$

Нехай $\mathbf{L}(z)=(\ell_1(z),\ell_2(z))$, де $\ell_j(z):\mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}_+$, $j\in\{1,2\}$ – неперервні функції. Ця стаття є продовженням досліджень роботи [2], де запроваджено поняття аналітичних в $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних та доведено критерій, що описує локальну поведінку частинних похідних. Метою даної роботи є отримання практичного критерію обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних та дослідження деяких композицій аналітичних функцій з деформованою показниковою функцією [23].

Означення. Аналітична функція $F:\mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ називається [2] функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу (за сукупністю змінних), якщо існує $n_0\in\mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z\in\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ та всіх $J\in\mathbb{Z}_+^2$ виконується оцінка

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)}\le\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}:\ K\in\mathbb{Z}_+^2,\ \|K\|\le n_0\right\}.$$

Найменше таке ціле число n_0 називається $\mathbf{L}$-індексом за сукупністю змінних функції F і позначається через $N(F,\mathbf{L},\mathbb{D}\times\mathbb{C})$.

Уведене означення є аналогом означення аналітичної функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних (див. [5, 6, 11]).

Через $Q(\mathbb{D}\times\mathbb{C})$ позначимо клас функцій $\mathbf{L}$, що задовольняють умови

$$(\forall z\in\mathbb{D}\times\mathbb{C}):\ \ell_1(z)>\beta/(1-|z_2|),$$

$$\left(\forall R \in [0,\beta]^2, \forall r_j \in [0,\beta],\ \ j \in \{1,2\}\right)\ :\ 0 < \lambda_{1,j}(R) \le \lambda_{2,j}(R) < +\infty ,$$

де $\beta > 1$ − деяка стала,

$$\lambda_{1,j}(R) = \inf_{z^0 \in \mathbb{D}\times\mathbb{C}} \inf \left\{ \ell_j(z) / \ell_j(z_0) : z \in \mathbb{D}^2\left[z^0, R / \mathbf{L}(z^0)\right] \right\},$$

$$\lambda_{2,j}(R) = \sup_{z^0 \in \mathbb{D}\times\mathbb{C}} \sup \left\{ \ell_j(z) / \ell_j(z_0) : z \in \mathbb{D}^2\left[z^0, R / \mathbf{L}(z^0)\right] \right\}.$$

Подібні умови використовувалися для інших класів аналітичних функцій обмеженого індексу у випадках однієї та декількох змінних [3, 10, 17, 22].

1. Основний критерій обмеженості індексу. Позначимо: $\mathcal{B}^2 = (0,\beta]\times$ $\times(0,+\infty)$, $\boldsymbol{\beta} := (\beta,\beta)$.

Теорема 1 [2]. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{D}\times\mathbb{C})$. *Аналітична функція* $F : \mathbb{D}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли для кожного* $R \in \mathcal{B}^2$ *знайдуться такі* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p_0 > 0$, *що для всіх* $z^0 \in \mathbb{D}\times\mathbb{C}$ *існує* $K^0 \in \mathbb{Z}_+^2$, $\|K^0\| \le n_0$, *та виконується нерівність*

$$\max\left\{ \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K^0\| \le n_0,\ \ z \in \mathbb{D}^2\left[z^0, R / \mathbf{L}(z^0)\right] \right\} \le p_0 \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}.$$

Наступні твердження можна довести аналогічно до доведення відповідних теорем, отриманих у [5 − 7, 11] для цілих функцій та аналітичних у полікрузі функцій. Для аналітичної функції $F(z)$ покладемо $M(R, z^0, F) =$ $= \max\{|F(z)| : z \in \mathbb{D}^2(z^0, R)\}$.

Теорема 2. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{D}\times\mathbb{C})$. *Якщо аналітична функція* $F : \mathbb{D}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних, то для будь-яких* $R', R'' \in \mathcal{B}^2$, $R' < R''$, *знайдеться* $p_1 = p_1(R', R'') \ge 1$ *таке, що для всіх* $z^0 \in \mathbb{D}\times\mathbb{C}$ *виконується оцінка*

$$M\left(R'' / \mathbf{L}(z^0), z^0, F\right) \le p_1 M\left(R' / \mathbf{L}(z^0), z^0, F\right).$$

Теорема 3 є аналогом відомої теореми Хеймана, яку вперше було отримано для цілих функцій однієї комплексної змінної (див. [15]).

Теорема 3. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{D}\times\mathbb{C})$. *Аналітична функція* $F : \mathbb{D}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існують такі* $p \in \mathbb{Z}_+$, $c \in \mathbb{R}_+$, *що для кожного* $z \in \mathbb{D}\times\mathbb{C}$ *виконується нерівність*

$$\max\left\{ \frac{|F^{(j_1,j_2)}(z)|}{\ell_1^{j_1}(z)\ell_2^{j_2}(z)} : j_1 + j_2 = p + 1 \right\} \le$$

$$\le c\max\left\{ \frac{|F^{(k_1,k_2)}(z)|}{\ell_1^{k_1}(z)\ell_2^{k_2}(z)} : k_1 + k_2 \le p \right\}. \tag{1}$$

Позначимо через $\overline{G}$ замикання області G. Наступний результат є узагальненням тверджень для одновимірного випадку з [18, 22]. Для аналітичних в одиничній кулі функцій теорема 4 отримана в [10].

Теорема 4. *Нехай* F − *аналітична в* $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ *функція,* G − *обмежена область в* $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$, $d = \inf_{(z_1,z_2)\in\overline{G}} (1 - |z_1|) > 0$ *та* $\beta > 1$. *Якщо* $\ell_2 : \mathbb{D}\times\mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$

– неперервна функція та $\ell_1 : \mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}_+$ *– така неперервна функція, що* $\ell_1(z)\ge\beta/d$ *для всіх* $z\in\mathbb{D}\times\mathbb{C}$*, то існує* $m\in\mathbb{Z}_+$ *таке, що для всіх* $z\in\overline{G}$ *та* $J=(j_1,j_2)\in\mathbb{Z}_+^2$ *виконується нерівність*

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)}\le\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : K\in\mathbb{Z}_+^n, \|K\|\le m\right\}, \tag{2}$$

де $\mathbf{L}(z)=(\ell_1(z),\ell_2(z))$.

Д о в е д е н н я. Якщо $F(z)\equiv 0$, то нерівність (2) є очевидною. Нехай $F(z)\not\equiv 0$. Для кожного фіксованого $z^0\in\overline{G}$ вираз $\dfrac{|F^{(J)}(z^0)|}{J!\mathbf{L}^J(z^0)}$ є модулем коефіцієнта розвинення у степеневий ряд функції $F(z)$ у точці $z\in\mathbb{D}^2\left(z^0,\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}(z^0)}\right)$. Оскільки функція $F(z)$ є аналітичною, то для кожного $z^0\in\overline{G}$ вираз $\dfrac{|F^{(J)}(z^0)|}{J!\mathbf{L}^J(z^0)}$ прямує до нуля при $j_1+j_2\to+\infty$, тобто знайдеться таке $m_0=m(z^0)$, для якого виконується нерівність (2).

Припустимо, що множина значень m_0 не є рівномірно обмеженою по z^0, тобто $\sup\limits_{z^0\in\overline{G}} m_0=+\infty$. Тоді для кожного $m\in\mathbb{Z}_+$ існують такі $z_m\in\overline{G}$, $J^m\in\mathbb{Z}_+^2$, що виконується оцінка

$$\frac{|F^{(J^m)}(z^m)|}{J^m!\mathbf{L}^{J^m}(z_m)}>\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z^m)|}{K!\mathbf{L}^K(z^m)} : K\in\mathbb{Z}_+^n, \|K\|\le m\right\}. \tag{3}$$

Оскільки $z^m\in\overline{G}$, то знайдеться підпослідовність $z'^m\to z'\in\overline{G}\subset\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ при $m\to+\infty$. За інтегральною формулою Коші для кожного $J\in\mathbb{Z}_+^2$ маємо

$$\frac{F^{(J)}(z^0)}{J!}=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{z\in\mathbb{T}^2(z^0,R)}\frac{F(z)}{(z-z^0)^{J+1}}\,dz.$$

Запишемо оцінку (3) у вигляді

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z^m)|}{K!\mathbf{L}^K(z^m)} : K\in\mathbb{Z}_+^2, \|K\|\le m\right\}\le$$

$$\le\frac{1}{(2\pi)^2\mathbf{L}^{J^m}(z^m)}\int\limits_{z\in\mathbb{T}^2\left(z^0,\frac{R}{\mathbf{L}(z^m)}\right)}\frac{|F(z)|}{|z-z^m|^{J^m+\mathbf{1}}}\,|dz|\le$$

$$\le\frac{1}{R^{J^m}}\max\{|F(z)| : z\in G_R\}, \tag{4}$$

де $G_R=\bigcup\limits_{z^*\in\overline{G}}\mathbb{D}^2\left[z^*,\dfrac{R}{\mathbf{L}(z^*)}\right]$, $R=(r_1,r_2)$, $r_2>1$, $r_1\in(1,\beta]$. Перейдемо у нерівності (4) до границі при $m\to+\infty$. Отримаємо

$$(\forall K\in\mathbb{Z}_+^2):\ \frac{|F^{(K)}(z')|}{K!\mathbf{L}^K(z')}\le\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{R^{J^m}}\max\{|F(z)| : z\in G_R\}=0.$$

Отже, всі частинні похідні функції F у точці z' рівні 0. Тому за теоремою єдиності $F(z) \equiv 0$, що неможливо. ♦

2. Деформована показникова функція. Деформована показникова функція [23]

$$F(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} z_1^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{z_2^n}{n!}$$

визначена для всіх комплексних z_1 та z_2 таких, що $|z_1| \le 1$. Вона аналітична в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ та неперервна у $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{C}$. Ця функція має багато цікавих властивостей та часто зустрічається в комбінаториці, теорії графів, статистичній механіці, комплексному аналізі [23−25]. Вона є єдиним розв'язком диференційно-функціонального рівняння

$$\frac{\partial F(z_1, z_2)}{\partial z_2} = F(z_1, z_1 z_2),$$

який для кожного заданого z_1 справджує умову $F(z_1, 0) = 1$. Це рівняння є окремим випадком рівняння пантографа [12, 16].

L. Wang і C. Zhang [24] зауважили, що для довільного комплексного числа z_1 такого, що $|z_1| \le 1$, розподіл нулів функції $F(z_1, z_2)$ не вдається описати. Відомо багато праць та гіпотез про їхній розподіл (див. широку бібліографію та опис у [24, 25]). Але поняття розподілу нулів тісно пов'язане з функціями обмеженого індексу. Необхідною умовою обмеженості індексу є рівномірний розподіл нулів в деякому сенсі (див. логарифмічний криетрій для різних класів аналітичних функцій в [1, 4, 9, 11, 14, 13, 17]). У зв'язку з цим постає таке питання: якою є додатна неперервна вектор-функція $\mathbf{L} : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2_+$, *що деформована показникова функція має обмежений* $\mathbf{L}$ *-індекс за сукупністю змінних?*

Деформована показникова функція справджує таку систему рівнянь із частинними похідними:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(z_1, z_2)}{\partial z_1} = \dfrac{z_2^2}{2} F(z_1, z_1^2 z_2), \\ \dfrac{\partial F(z_1, z_2)}{\partial z_2} = F(z_1, z_1 z_2). \end{cases}$$

Для встановлення обмеженості індекса аналітичних розв'язків деяких систем лінійних рівнянь із частинними похідними використовують теорему Хеймана та її аналоги [9, 10]. Але в цьому разі невідомо, як саме застосувати цю теорему до наведеної вище системи. Зважаючи на це, розглянемо простішу задачу. *Нехай* $F : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *− аналітична функція обмеженого* $\mathbf{L}$ *-індексу за сукупністю змінних. Якими є додатні неперервні вектор-функції* $\mathbf{L}_1 : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2_+$ *та* $\mathbf{L}_2 : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2_+$ *такі, що* $F(z_1, z_1 z_2)$ *та* $F(z_1, z_1^2 z_2)$ *мають обмежений* $\mathbf{L}_1$ *- та* $\mathbf{L}_2$ *-індекс за сукупністю змінних відповідно?* Це не тривільна задача, бо є добре відомий приклад цілої функції обмеженого індексу такої, що її похідна має необмежений індекс [21].

Теорема 5. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{D} \times \mathbb{C})$ *і* $F : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *− аналітична функція обмеженого* $\mathbf{L}$ *-індексу за сукупністю змінних. Тоді* $F(z_1, z_1 z_2)$ *і* $F(z_1, z_1^2 z_2)$ *мають обмежений* $\mathbf{L}_1$ *- та* $\mathbf{L}_2$ *-індекс за сукупністю змінних відповідно, де*

$$\mathbf{L}_1(z_1, z_2) = (\ell_1(z_1, z_1 z_2), (|z_1| + |z_2| + 1) \cdot \ell_2(z_1, z_1 z_2)),$$

$$\mathbf{L}_2(z_1, z_2) = (\ell_1(z_1, z_1^2 z_2), (|z_1| + |z_2| + 1)^2 \cdot \ell_2(z_1, z_1^2 z_2)).$$

Д о в е д е н н я. Позначимо $G(z_1,z_2)=F(z_1,z_1z_2)$. Зрозуміло, що $G^{(0,1)}(z_1,z_2)=z_1F^{(0,1)}(z_1,z_1z_2)$, $G^{(1,0)}(z_1,z_2)=F^{(1,0)}(z_1,z_1z_2)$. За індукцією можна показати, що для всіх $J=(j_1,j_2)\in\mathbb{Z}_+^2$

$$G^{(j_1,j_2)}(z_1,z_2)=P_{j_2}(z_1,z_2)F^{(j_1,j_2)}(z_1,z_1z_2),$$

де $P_{j_2}(z_1,z_2)$ − деякий многочлен степеня j_2.

Оскільки $F(z_1,z_2)$ має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних, то для цієї функції F виконується нерівність (1). Тому можна отримати таку ж нерівність для функції G

$$\max_{j_1+j_2=p+1}\frac{|G^{(j_1,j_2)}(z_1,z_2)|}{\mathbf{L}_1^J(z_1,z_2)}=$$

$$=\max_{j_1+j_2=p+1}\frac{|P_{j_2}(z_2)F^{(j_1,j_2)}(z_1,z_1z_2)|}{(|z_1|+|z_2|+1)^{j_2}\ell^{j_1}(z_1,z_1z_2)\ell_2^{j_2}(z_1,z_1z_2)}\le$$

$$\le\max_{j_1+j_2=p+1}\frac{|P_{j_2}(z_1,z_2)|}{(|z_1|+|z_2|+1)^{j_2}}\max_{j_1+j_2=p+1}\frac{|F^{(j_1,j_2)}(z_1,z_1z_2)|}{\ell^{j_1}(z_1,z_1z_2)\ell_2^{j_2}(z_1,z_1z_2)}\le$$

$$\le c_1\max_{j_1+j_2=p+1}\frac{|F^{(j_1,j_2)}(z_1,z_1z_2)|}{\ell^{j_1}(z_1,z_1z_2)\ell_2^{j_2}(z_1,z_1z_2)}\le$$

$$\le c_1c\max\left\{\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z_1,z_1z_2)|}{\ell_1^{k_1}(z_1,z_1z_2)\ell_2^{k_2}(z_1,z_1z_2)}:k_1+k_2\le p\right\}=$$

$$=c_1c\max\left\{\frac{|P_{k_1}(z_1,z_2)F^{(k_1,k_2)}(z_1,z_1z_2)|}{|P_{k_1}(z_1,z_2)|\,\ell_1^{k_1}(z_1,z_1z_2)\ell_2^{k_2}(z_1,z_1z_2)}:k_1+k_2\le p\right\}\le$$

$$\le c_1c\max_{0\le k_1+k_2\le p}\frac{(|z_1|+|z_2|+1)^{k_1}}{|P_{k_1}(z_1,z_2)|}\times$$

$$\times\max_{0\le k_1+k_2\le p}\frac{|P_{k_1}(z_1,z_2)F^{(k_1,k_2)}(z_1,z_1z_2)|}{(|z_1|+|z_2|+1)^{k_1}\ell_1^{k_1}(z_1,z_1z_2)\ell_2^{k_2}(z_1,z_1z_2)}\le$$

$$\le c_1cc_2\max\left\{\frac{|G^{(k_1,k_2)}(z_1,z_1z_2)|}{\mathbf{L}_1^K(z_1,z_2)}:k_1+k_2\le p\right\}$$

для всіх $|z_1|\ge r_1$, $|z_2|\ge r_2$, $K=(k_1,k_2)$. Згідно з теоремами 2 та 4 звідси випливає, що функція G має обмежений $\mathbf{L}_1$-індекс за сукупністю змінних. Друга частина цього твердження про обмеженість $\mathbf{L}_2$-індексу доводиться аналогічно. ♦

За допомогою теореми Хеймана можна розглянути інші композиції. У статті [8] встановлено обмеженість ℓ-індексу композиції $f(1/(1-z))$, де f − ціла функція обмеженого ℓ-індексу. В загальному випадку невідомо, чи умова «функція $f(1/(1-z))$ має обмежений $\ell(1/(1-|z|))$-індекс» гарантує, що «функція f має обмежений ℓ-індекс». Цей висновок вдалося отримати в [8] за додаткових припущень. Для композиції $f(z_2/(1-z_1))$ за теоремою 2 буде правильним такий наслідок.

Наслідок 1. *Нехай* $\ell \in Q$, f *– ціла функція обмеженого* ℓ *-індексу. Тоді функція* $F(z_1, z_2) = f(z_2/(1-z_1))$ *має обмежений* $\mathbf{L}$ *-індекс за сукупністю змінних, де*

$$\mathbf{L}(z_1, z_2) = \left(\frac{\ell(z_2/(1-z_1))}{(1-|z_1|)^2}, \frac{\ell(z_2/(1-z_1))}{1-|z_1|} \right).$$

1. *Бандура А. І., Скасків О. Б.* Логарифмічна похідна за напрямком та розподіл нулів цілої функції обмеженого L-індексу за напрямком // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 3. – С. 426–432.
   Те саме: *Bandura A. I., Skaskiv O. B.* Directional logarithmic derivative and the distribution of zeros of an entire function of bounded L-index along the direction // Ukr. Math. J. – 2017. – **69,** No.3. – P. 500–508.
   https://www.doi.org/10.1007/s11253-017-1377-8
2. *Бандура А. І., Скасків О. Б., Цвігун В. Л.* Аналітичні в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ функції обмеженого індексу за сукупністю змінних // Прикарпат. вісн. НТШ. Число. – 2018. – **42**, № 1. (в друці).
3. *Строчик С. Н., Шеремета М. М.* Аналітичні в одиничному крузі функції обмеженого індексу // Доп. НАН України. – 1993. – № 1. – С. 19–22.
4. *Шеремета М. Н., Кузык А. Д.* Логарифмическая производная и нули целой функции ограниченного ℓ -индекса // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, № 2. – С. 142–150.
   Те саме: *Sheremeta M. N., Kuzyk A. D.* Logarithmic derivative and zeros of an entire function of bounded ℓ -index // Sib. Math. J. – 1992. – **33,** No 2. – P. 304–312. – https://www.doi.org/10.1007/BF00971102
5. *Bandura A. I., Bordulyak M. T., Skaskiv O. B.* Sufficient conditions of boundedness of L -index in joint variables // Мат. студії. – 2016. – **45**, № 1. – С. 12–26.
   https://www.doi.org/10.15330/ms.45.1.12-26
6. *Bandura A. I., Petrechko N. V., Skaskiv O. B.* Analytic in a polydisc functions of bounded $\mathbf{L}$ -index in joint variables // Мат. студії. – 2016. – **46,** № 1. – С. 72–80.
   https://www.doi.org/10.15330/ms.46.1.72-80
7. *Bandura A., Petrechko N., Skaskiv O.* Maximum modulus in a bidisc of analytic functions of bounded $\mathbf{L}$ -index and an analogue of Hayman's theorem // Mat. Bohemica – 2018. – **143,** No.3. – P. 1–16.
   https://www.doi.org/10.21136/MB.2017.0110-16
8. *Bandura A. I., Sheremeta M. M.* Bounded ℓ -index and $\ell - M$ -index and compositions of analytic functions // Мат. студії. – 2018. – **48,** №2. – С. 180–188.
   https://www.doi.org/10.15330/ms.48.2.180-188
9. *Bandura A., Skaskiv O.* Analytic functions in the unit ball. Bounded L-index in joint variables and solutions of systems of PDE's. – Beau-Bassin: LAP Lambert Acad. Publ., 2017. – 100 p.
10. *Bandura A. I., Skaskiv O. B.* Analytic functions in the unit ball of bounded $\mathbf{L}$ -index: asymptotic and local properties // Мат. студії. – 2017. – **48,** № 1. – С. 37–73. – https://www.doi.org/10.15330/ms.48.1.37-73
11. *Bandura A., Skaskiv O.* Entire functions of several variables of bounded index. – Lviv: Chyslo, 2016. – 128 p.
12. *Fox L., Mayers D. F., Ockendon J. R., Tayler A. B.* On a functional differential equation // IMA J. Appl. Math. – 1971. – **8**, No. 3. – P. 271–307.
   https://doi.org/10.1093/imamat/8.3.271
13. *Fricke G. H.* Entire functions of locally slow growth // J. Anal. Math. – 1975. – **28**, No.1. – P. 101–122. https://www.doi.org/10.1007/BF02786809
14. *Fricke G. H.* Functions of bounded index and their logarithmic derivatives // Math. Ann. – 1973. – **206**, No. 3. – P. 215–223.
   https://www.doi.org/10.1007/BF01429209
15. *Hayman W. K.* Differential inequalities and local valency // Pacific J. Math. – 1973. – **44,** No. 1. – P. 117–137.

16. *Iserles A.* On the generalized pantograph functional-differential equation // Eur. J. Appl. Math. – 1993. – **4**, No. 1. – P. 1–38.
https://doi.org/10.1017/S0956792500000966
17. *Kushnir V. O., Sheremeta M. M.* Analytic functions of bounded ℓ-index // Мат. студії. – 1999. – **12**, № 1. – С. 59–66.
18. *Lepson B.* Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index // Proc. Sympos. Pure Math. – 1968. – **11**. – P. 298–307.
19. *Nuray F., Patterson R. F.* Multivalence of bivariate functions of bounded index // Le Matematiche. – 2015. – **70**, No. 2. – P. 225–233.
20. *Salmassi M.* Functions of bounded indices in several variables // Indian J. Math. – 1989. – **31**, No. 3. – P. 249–257.
21. *Shah S. M.* On entire functions of bounded index whose derivatives are of unbounded index // J. Lond. Math. Soc. – 1971. – **s2-4,** No. 1. – P. 127–139.
https://doi.org/10.1112/jlms/s2-4.1.127
22. *Sheremeta M.* Analytic functions of bounded index. – Lviv: VNTL Publishers, 1999. – 141 p. – (Math. Studies: Monograph. Ser. – Vol. 6.)
23. *Sokal A.* Some wonderful conjectures (but almost no theorems) at the boundary between analysis, combinatorics and probability // Talk at Inst. Henri Poincaré, Nov. 9, 2009. – http://ipht.cea.fr/statcomb2009/misc/Sokal_20091109.pdf
24. *Wang L., Zhang C.* Zeros of the deformed exponential function // Adv. Math. – 2018. – **332**, No. 9. – P. 311–348. – https://doi.org/10.1016/j.aim.2018.05.006
25. *Zhang C.* An asymptotic formula for the zeros of the deformed exponential function // J. Math. Anal. Appl. – 2016. – **441,** No. 2. – P. 565–573.
https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.04.027

АНАЛИТИЧЕСКИЕ В $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОГО $\mathbf{L}$-ІНДЕКСА ПО СОВОКУПНОСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрено понятие ограниченности $\mathbf{L}$-индекса по совокупности переменных для аналитических функций в $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$. Установлены критерии ограниченности $\mathbf{L}$-индекса для аналитических функций по совокупности переменных, описывающие их локальные свойства. Полученные критерии применены к исследованию ограниченности индекса некоторых композиций аналитических функций, связанных с деформированной показательной функцией.

ANALYTIC IN $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ FUNCTIONS OF BOUNDED $\mathbf{L}$-INDEX IN JOINT VARIABLES

A concept of boundedness of $\mathbf{L}$-index in joint variables is considered for analytic functions in $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$. We deduced criteria of boundedness of $\mathbf{L}$-index for analytic functions in joint variables which describe their local properties. The obtained criteria are aplied for analysis of index boundedness for some compositions of analytic functions associated with the deformed exponential function.

[1] Івано-Франківський нац. тех. ун-т
нафти і газу, Івано-Франківськ,
[2] Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
08.10.17