УДК 517.524

Т. М. Антонова[1], О. М. Сусь[2]

ПРО ФІГУРНУ ВІДНОСНУ СТІЙКІСТЬ ДО ЗБУРЕНЬ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ З КОМПЛЕКСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Розглядаються двовимірні неперервні дроби, елементи яких лежать у кутовій множині правої півплощини. Встановлено достатні умови їх фігурної відносної стійкості до збурень. Одержано оцінку відносної похибки фігурних наближень досліджуваних двовимірних неперервних дробів.

Для застосувань неперервних дробів і їх багатовимірних узагальнень, зокрема гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) і двовимірних неперервних дробів (ДНД), важливе значення мають їх збіжність та обчислювальна стійкість. Теоретичні дослідження та численні експерименти показали, що цей апарат наближення має властивість обмеженого нагромадження похибок, що виникають у процесі їх обчислень [14, 10, 15].

Що стосується відносної стійкості до збурень ГЛД, то в роботах П. І. Боднарчука, В. Я. Скоробогатька та їхніх учнів [8, 9] досліджувалась асимптотична стійкість ГЛД.

З використанням властивості відносних похибок у роботах Д. І. Боднара [2, 3], М. О. Недашковського [12] встановлено достатні умови відносної стійкості до збурень ГЛД з додатними елементами та елементами, що задовольняють умови багатовимірного аналогу теореми Ворпіцького та Слешинського – Прінґсгейма. За аналогічною методикою в роботі Х. Й. Кучмінської [11] досліджено відносну стійкість до збурень ДНД з додатними елементами.

З використанням областей елементів і відповідних їм областей значень у роботах Д. І. Боднара та В. Р. Гладуна [5–7] побудовано та досліджено області відносної стійкості до збурень нескінченних ГЛД з додатними та комплексними елементами.

Аналіз оцінок похибок підхідних дробів неперервних дробів і їх багатовимірних узагальнень, одержаних у згаданих роботах, показав, що ці оцінки залежать не тільки від похибок елементів, але й від самих елементів. Тому актуальним є вивчення умов, за яких неперервні дроби та їх багатовимірні узагальнення є стійкими до збурень їх елементів.

Ця робота присвячена подальшому вивченню властивостей ДНД з комплексними елементами, що належать деякій кутовій множині правої півплощини, так званих правильних ДНД типу Ван Флека. Зокрема, в [13] запропоновано методику дослідження їх збіжності та встановлено умови, за яких такі ДНД є збіжними. Робота [1] присвячена дослідженню стійкості ДНД типу Ван Флека до збурень їх елементів. За допомогою формули для обчислення абсолютної похибки встановлено достатні умови, коли ДНД є фігурно абсолютно стійкими до збурень їх елементів. У цій праці продовжено дослідження стійкості ДНД типу Ван Флека до збурень їх елементів: з використанням встановлених в [1, 13] нерівностей і формули для обчислення абсолютної похибки фігурних підхідних дробів знайдено достатні умови, за яких такі ДНД є фігурно відносно стійкими до збурень їх елементів, а також встановлено оцінку відносної похибки їх фігурних підхідних дробів.

Розглянемо нескінченний ДНД вигляду

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b_{k,k} + \Phi_k}, \quad \Phi_k = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{1}{b_{k+j,k}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{1}{b_{k,k+j}}, \quad k = 0,1,\ldots . \tag{1}$$

Досліджуватимемо одну з конструкцій фігурних наближень ДНД (1):

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2017. – 60, № 3 – С. 76-88.

$$f_n = \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{1}{b_{k,k} + \Phi_k^{(n-2k-1)}}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

де

$$\Phi_k^{(0)} = 0, \quad \Phi_k^{(0)} = \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{p} \frac{1}{b_{k+j,k}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{p} \frac{1}{b_{k,k+j}}, \quad k = 0,1,\ldots, \quad p = 1,2,\ldots. \tag{3}$$

Вирази вигляду

$$Q_j^{(0)} = b_{j,j}, \quad Q_j^{(0)} = b_{j,j} + \Phi_j^{(1)}, \quad Q_j^{(p+2)} = b_{j,j} + \Phi_j^{(p+2)} + \frac{1}{Q_j^{(p)}},$$

$$j, p = 0,1,\ldots, \tag{4}$$

називають двовимірними залишками фігурних наближень (2), а вирази вигляду

$$Q_{k+j,k}^{(0)} = b_{k+j,k}, \quad Q_{k+j,k}^{(p+1)} = b_{k+j,k} + \frac{1}{Q_{k+j+1,k}^{(p)}}, \quad j = 1,2,\ldots, \quad k, p = 0,1,\ldots,$$

$$Q_{k,k+j}^{(0)} = b_{k,k+j}, \quad Q_{k,k+j}^{(p+1)} = b_{k,k+j} + \frac{1}{Q_{k,k+j+1}^{(p)}}, \quad j = 1,2,\ldots, \quad k, p = 0,1,\ldots, \tag{5}$$

називають їх одновимірними залишками. З формул (3) і позначень (4), (5) маємо

$$f_n = \frac{1}{Q_0^{(n-1)}}, \quad n = 1,2,\ldots,$$

$$\Phi_k^{(p)} = \frac{1}{Q_{k+1,k}^{(p-1)}} + \frac{1}{Q_{k,k+1}^{(p-1)}}, \quad k = 0,1,\ldots, \quad p = 1,2,\ldots. \tag{6}$$

Нехай $\widehat{b}_{i,i}, \widehat{b}_{i+j,i}, \widehat{b}_{i,i+j}$, $i = 0,1,\ldots$, $j = 1,2,\ldots$, − збурені значення елементів $b_{i,i}, b_{i+j,i}, b_{i,i+j}$, $i = 0,1,\ldots$, $j = 1,2,\ldots$, ДНД (1) відповідно.

ДНД вигляду

$$\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\widehat{b}_{k,k} + \widehat{\Phi}_k}, \quad \widehat{\Phi}_k = \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\widehat{b}_{k+j,k}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\widehat{b}_{k,k+j}}, \quad k = 0,1,\ldots, \tag{7}$$

називатимемо *збуреним* до ДНД (1).

Розглядаючи стійкість ДНД як їх неперервну залежність від елементів, за аналогією з ГЛД [5, 6], означимо множини фігурної відносної стійкості до збурень ДНД (1).

Означення. Послідовність множин $G_{i,j}$, $i, j = 0,1,\ldots$, називають послідовністю множин фігурної відносної стійкості до збурень ДНД (1), якщо:

- послідовність множин $G_{i,j}$, $i, j = 0,1,\ldots$, є послідовністю множин фігурної збіжності ДНД (1) та ДНД (7), тобто з умов $b_{i,j} \in G_{i,j}$, $\widehat{b}_{i,j} \in$ $\in G_{i,j}$, $i, j = 0,1,\ldots$, випливає існування скінченних границь $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{f}_n$, де f_n, $\widehat{f}_n$ − n-і фігурні наближення ДНД (1) та ДНД (7);
- для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для кожного $b_{i,j} \in G_{i,j}$, $b_{i,j} \neq 0$, $i, j = 0,1,\ldots$, та кожного $\widehat{b}_{i,j} \in G_{i,j}$, $i, j = 0,1,\ldots$, таких, що $\left| \dfrac{\widehat{b}_{i,j} - b_{i,j}}{b_{i,j}} \right| < \delta$, виконуються нерівності

  $$\left| \frac{\widehat{f}_n - f_n}{f_n} \right| < \varepsilon, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Нехай $\Delta b_{i,j}$, Δf_n – абсолютні, а $\beta_{i,j}$, ε_n – відносні похибки елементів $b_{i,j}$ і наближення (2) ДНД (1) відповідно, тобто

$$\Delta b_{i,j} = \hat{b}_{i,j} - b_{i,j}, \quad \hat{b}_{i,j} = (1+\beta_{i,j})b_{i,j}, \quad i,j = 0,1,\ldots, \tag{8}$$

$$\Delta f_n = \hat{f}_n - f_n, \quad f_n \neq 0, \quad \hat{f}_n = (1+\varepsilon_n)f_n, \quad n = 1,2,\ldots. \tag{9}$$

Для оцінки залежності від абсолютних похибок $\Delta b_{i,j}$ елементів $b_{i,j}$ абсолютної похибки Δf_n наближення (2) ДНД (1) встановлено формули [4]

$$\Delta f_1 = \hat{f}_1 - f_1 = -\frac{\Delta b_{0,0}}{Q_0^{(0)}\hat{Q}_0^{(0)}},$$

$$\Delta f_n = \hat{f}_n - f_n = \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} \frac{(-1)^{i+1}\Delta b_{i,i}}{\prod_{j=0}^{i} Q_j^{(n-2j-1)} \prod_{j=0}^{i} \hat{Q}_j^{(n-2j-1)}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{[n/2]-1} \frac{(-1)^{i+1}}{\prod_{j=0}^{i} Q_j^{(n-2j-1)} \prod_{j=0}^{i} \hat{Q}_j^{(n-2j-1)}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\ell=1}^{n-2i-1} \frac{(-1)^{\ell}\Delta b_{i+\ell,i}}{\prod_{j=1}^{\ell} Q_{i+j,i}^{(n-2i-1-j)} \prod_{j=1}^{\ell} \hat{Q}_{i+j,i}^{(n-2i-1-j)}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\ell=1}^{n-2i-1} \frac{(-1)^{\ell}\Delta b_{i,i+\ell}}{\prod_{j=1}^{\ell} Q_{i,i+j}^{(n-2i-1-j)} \prod_{j=1}^{\ell} \hat{Q}_{i,i+j}^{(n-2i-1-j)}} \right\}, \quad n = 2,3,\ldots, \tag{10}$$

де $\hat{Q}_i^{(p)}$, $\hat{Q}_{i+j,i}^{(p)}$, $\hat{Q}_{i,i+j}^{(p)}$, $i,p = 0,1,\ldots$, $j = 1,2,\ldots$, – залишки фігурних наближень збуреного ДНД (7), які визначаються за формулами (4), (5) та у яких елементи $b_{i,j}$ замінено на елементи $\hat{b}_{i,j}$, $i,j = 0,1,\ldots$.

У цій роботі розглядаємо правильні ДНД типу Ван Флека, тобто вважаємо, що елементи ДНД (1) та елементи збуреного ДНД (7) належать кутовій множині правої півплощини

$$G_\theta = \left\{ z : |\arg z| < \theta,\ \theta < \frac{\pi}{2} \right\}. \tag{11}$$

У роботі [13] встановлено додаткові умови, за яких ДНД (1) та ДНД (7) з елементами з множини (11) збігаються та фігурно збігаються, і отримано оцінку швидкості збіжності.

Далі аналізуємо властивість фігурної відносної стійкості до збурень.

Теорема 1. *Нехай елементи ДНД* (1) *та збуреного до нього ДНД* (7) *належать кутовій множині правої півплощини* (11), *і відносні похибки елементів ДНД* (1) *є рівномірно обмеженими*:

$$|\beta_{i,i}| \le \beta, \quad |\beta_{i+j,i}| \le \beta, \quad |\beta_{i,i+j}| \le \beta, \quad 0 < \beta < 1,$$
$$i = 0,1,\ldots, \quad j = 1,2,\ldots. \tag{12}$$

Якщо існують послідовності $\{\mu'_\ell\}$, $\{\mu''_\ell\}$, $\ell = 1,2,\ldots$, $\{\mu_j\}$, $j = 1,2,\ldots$, *додатних чисел таких, що*

$$\mu'_{k+1} \le \operatorname{Re} b_{i+k+1,i} \operatorname{Re} b_{i+k,i}, \quad \mu'_{k+1} \le \operatorname{Re} \widehat{b}_{i+k+1,i} \operatorname{Re} \widehat{b}_{i+k,i}, \quad i,k = 0,1,\dots, \tag{13}$$

$$\mu''_{k+1} \le \operatorname{Re} b_{i,i+k+1} \operatorname{Re} b_{i,i+k}, \quad \mu''_{k+1} \le \operatorname{Re} \widehat{b}_{i,i+k+1} \operatorname{Re} \widehat{b}_{i,i+k}, \quad i,k = 0,1,\dots, \tag{14}$$

$$\mu_j = \operatorname{Re} b_{j-1,j-1} \operatorname{Re} b_{j,j}, \qquad \mu_j = \operatorname{Re} \widehat{b}_{j-1,j-1} \operatorname{Re} \widehat{b}_{j,j}, \quad j = 1,2,\dots, \tag{15}$$

і збігаються ряди

$$\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{\mu_j + \cos\theta}, \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{1}{\mu'_j + \cos\theta}, \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{1}{\mu''_j + \cos\theta}, \tag{16}$$

то для відносної похибки n *-го підхідного дробу ДНД (1) справджується оцінка*

$$\varepsilon_n \le \frac{1}{\cos\theta} \frac{\beta}{1-\beta} (S+1)(1+S'+S''), \qquad n = 1,2,\dots, \tag{17}$$

де S , S' , S'' *− суми першого, другого і третього рядів з (16) відповідно.*

Д о в е д е н н я. Використовуючи формули (6), (9), отримаємо

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta f_n}{f_n} = \Delta f_n Q_0^{(n-1)}, \qquad n = 1,2,\dots, \tag{18}$$

де

$$\Delta f_1 = \widehat{f}_1 - f_1 = -\frac{\Delta b_{0,0}}{Q_0^{(0)} \widehat{Q}_0^{(0)}}, \qquad \varepsilon_1 = \Delta f_1 Q_0^{(0)} = -\frac{\beta_{0,0}}{(1+\beta_{0,0})},$$

$$\varepsilon_2 = \Delta f_2 Q_0^{(1)} = -\frac{\Delta b_{0,0}}{\widehat{Q}_0^{(1)}} + \frac{\Delta b_{1,0}}{Q_{1,0}^{(0)} \widehat{Q}_0^{(1)} \widehat{Q}_{1,0}^{(0)}} + \frac{\Delta b_{0,1}}{Q_{0,1}^{(0)} \widehat{Q}_0^{(1)} \widehat{Q}_{0,1}^{(0)}}.$$

З формул (10), (18) випливає, що для $n = 2,3,\dots$ маємо оцінку

$$|\varepsilon_n| \le \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} I(i,n) \left|Q_0^{(n-1)}\right| \left|\Delta b_{i,i}\right| + \sum_{i=0}^{[n/2]-1} I(i,n) \left|Q_0^{(n-1)}\right| \times$$
$$\times \sum_{\ell=1}^{n-2i-1} \left(T_1(\ell, n-2i-1) + T_2(\ell, n-2i-1)\right), \tag{19}$$

де позначено

$$I(i,n) = \frac{1}{\prod_{j=0}^{i} \left|Q_j^{(n-2j-1)}\right| \prod_{j=0}^{i} \left|\widehat{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|}, \tag{20}$$

$$T_1(\ell,m) = \frac{\left|\Delta b_{i+\ell,i}\right|}{\prod_{j=1}^{\ell} \left|Q_{i+j,i}^{(m-j)}\right| \left|\widehat{Q}_{i+j,i}^{(m-j)}\right|}, \qquad T_2(\ell,m) = \frac{\left|\Delta b_{i,i+\ell}\right|}{\prod_{j=1}^{\ell} \left|Q_{i,i+j}^{(m-j)}\right| \left|\widehat{Q}_{i,i+j}^{(m-j)}\right|}. \tag{21}$$

Зауважимо, що елементи правильних ДНД (1), ДНД (7) типу Ван Флека мають таку властивість:

$$\operatorname{Re} b_{i,j} > \left|b_{i,j}\right| \cos\theta, \quad \operatorname{Re} \widehat{b}_{i,j} > \left|\widehat{b}_{i,j}\right| \cos\theta, \quad i,j = 0,1,\dots. \tag{22}$$

У роботі [13] для одновимірних (5) і двовимірних (4) залишків фігурних наближень ДНД (1) встановлено такі оцінки:

$$\left|Q_{i+j,i}^{(p)}\right| \ge \operatorname{Re} b_{i+j,i}, \quad \left|Q_{i,i+j}^{(p)}\right| \ge \operatorname{Re} b_{i,i+j}, \quad \left|Q_{i}^{(p)}\right| \ge \operatorname{Re} b_{i,i}, \quad i,p = 0,1,\dots, \quad j = 1,2,\dots, \tag{23}$$

а також

$$\left|Q_{i+k,i}^{(p)} Q_{i+k+1,i}^{(p-1)}\right| \ge \mu'_{k+1} + \cos\theta, \quad \left|Q_{i,i+k}^{(p)} Q_{i,i+k+1}^{(p-1)}\right| \ge \mu''_{k+1} + \cos\theta, \quad i = 0,1,\dots, \quad k,p = 1,2,\dots, \tag{24}$$

$$\left|Q_{i}^{(p)} Q_{i+1}^{(p-1)}\right| \ge \mu_{i+1} + \cos\theta, \quad \left|Q_{i}^{(p)} Q_{i+1,i}^{(p-1)}\right| \ge \mu'_{i+1} + \cos\theta,$$

$$\left|Q_{i}^{(p)} Q_{i+1,i}^{(p-1)}\right| \ge \mu''_{i+1} + \cos\theta, \quad i = 0,1,\dots, \quad p = 1,2,\dots, \tag{25}$$

де числа μ'_j, μ''_j, μ_j, $j = 1,2,\dots$, задовольняють умови (13)–(15).

Аналогічні нерівності справджуються для одновимірних і двовимірних залишків фігурних наближень збуреного ДНД (7):

$$\left|\widehat{Q}_{i+j,i}^{(p)}\right| \ge \operatorname{Re} \widehat{b}_{i+j,i}, \quad \left|\widehat{Q}_{i,i+j}^{(p)}\right| \ge \operatorname{Re} \widehat{b}_{i,i+j}, \quad \left|\widehat{Q}_{i}^{(p)}\right| \ge \operatorname{Re} \widehat{b}_{i,i}, \quad i,p = 0,1,\dots, \quad j = 1,2,\dots, \tag{26}$$

$$\left|\widehat{Q}_{i+k,i}^{(p)} \widehat{Q}_{i+k+1,i}^{(p-1)}\right| \ge \mu'_{k+1} + \cos\theta, \quad \left|\widehat{Q}_{i,i+k}^{(p)} \widehat{Q}_{i,i+k+1}^{(p-1)}\right| \ge \mu''_{k+1} + \cos\theta, \quad i = 0,1,\dots, \quad k,p = 1,2,\dots, \tag{27}$$

$$\left|\widehat{Q}_{i}^{(p)} \widehat{Q}_{i+1}^{(p-1)}\right| \ge \mu_{i+1} + \cos\theta, \quad \left|\widehat{Q}_{i}^{(p)} \widehat{Q}_{i+1,i}^{(p-1)}\right| \ge \mu'_{i+1} + \cos\theta,$$

$$\left|\widehat{Q}_{i}^{(p)} \widehat{Q}_{i+1,i}^{(p-1)}\right| \ge \mu''_{i+1} + \cos\theta, \quad i = 0,1,\dots, \quad p = 1,2,\dots. \tag{28}$$

Оцінимо суми у правій частині нерівності (19), враховуючи позначення (20), (21), нерівності (22)–(28) і методику роботи [13].

Розглянемо вираз $I(i,n)\left|\Delta b_{i,i}\right|$. Для $i = 0$, $i = 1$ маємо

$$I(0,n)\left|\Delta b_{0,0}\right|\left|Q_0^{(n-1)}\right| = \frac{\left|\Delta b_{0,0}\right|}{\left|\widehat{Q}_0^{(n-1)}\right|} \le \frac{\left|\Delta b_{0,0}\right|}{\operatorname{Re} \widehat{b}_{0,0}} \le \frac{\left|\Delta b_{0,0}\right|}{\left|\widehat{b}_{0,0}\right| \cos\theta} \le \frac{\left|\beta_{0,0}\right|}{\left|1 + \beta_{0,0}\right| \cos\theta}, \tag{29}$$

$$I(1,n)\left|\Delta b_{i,i}\right|\left|Q_0^{(n-1)}\right| \le \frac{\left|\Delta b_{1,1}\right|}{\left|Q_1^{(n-3)}\right|\left|\widehat{Q}_0^{(n-1)}\right|\left|\widehat{Q}_1^{(n-3)}\right|} \le \frac{\left|\Delta b_{1,1}\right|}{\operatorname{Re} b_{1,1}} \frac{1}{\operatorname{Re} \widehat{b}_{0,0} \operatorname{Re} \widehat{b}_{1,1}} \le$$

$$\le \frac{\left|\Delta\beta_{1,1}\right|}{\cos\theta(\mu_1 + \cos\theta)}. \tag{30}$$

Якщо $i = 2s$, $2 \le 2s \le \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$, тоді

$$I(i,n)\left|\Delta b_{i,i}\right|\left|Q_0^{(n-1)}\right| = \frac{\left|\Delta b_{i,i}\right|}{\left|\widehat{Q}_i^{(n-2i-1)}\right|} \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{i}\left|Q_j^{(n-2j-1)}\right| \prod\limits_{j=0}^{i-1}\left|\widehat{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|\Delta b_{i,i}\right|}{\operatorname{Re} \widehat{b}_{i,i}} \times \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{s}\left|Q_{2j-1}^{(n-4j+1)} Q_{2j}^{(n-4j-1)}\right| \prod\limits_{j=0}^{s-1}\left|\widehat{Q}_{2j}^{(n-4j-1)} \widehat{Q}_{2j+1}^{(n-4j-3)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|\beta_{i,i}\right|}{\left|1 + \beta_{i,i}\right| \cos\theta} \cdot \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{2s}(\mu_j + \cos\theta)}. \tag{31}$$

Якщо $i = 2s - 1$, $4 \le 2s \le \left[\frac{n-1}{2}\right] + 1$, тоді

$$I(i,n)\left|\Delta b_{i,i}\right|\left|Q_0^{(n-1)}\right| = \frac{\left|\Delta b_{i,i}\right|}{\left|Q_i^{(n-2j-1)}\right|} \frac{1}{\prod_{j=1}^{i-1}\left|Q_j^{(n-2j-1)}\right| \prod_{j=0}^{i}\left|\widehat{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|\Delta b_{i,i}\right|}{\operatorname{Re} b_{i,i}} \times \frac{1}{\prod_{j=1}^{s-1}\left| Q_{2j-1}^{(n-4j+1)} Q_{2j}^{(n-4j-1)}\right| \prod_{j=0}^{s-1}\left|\widehat{Q}_{2j}^{(n-4j-1)}\widehat{Q}_{2j+1}^{(n-4j-3)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|\beta_{i,i}\right|}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\prod_{j=1}^{2s-1}(\mu_j + \cos\theta)}. \tag{32}$$

Подібно оцінимо добутки $I(i,n)T_1(\ell, n-2i-1)$, $I(i,n)T_2(\ell, n-2i-1)$ для різних значень індексів i та ℓ.

Випадок 1°: $i = 2s$, $0 \le 2s \le \left[\frac{n}{2}\right] - 1$, $\ell = 2r - 1$, $2 \le 2r \le n - 4s$.

а) $s = 0$, $r = 1$:

$$I(0,n)T_1(1,n-1)\left|Q_0^{(n-1)}\right| = \frac{\left|\Delta b_{1,0}\right|}{\left|\widehat{Q}_0^{(n-1)}\right|} \frac{1}{\left|Q_{1,0}^{(n-2)}\widehat{Q}_{1,0}^{(n-2)}\right|} \le \frac{\left|\beta_{1,0}\right|}{\cos\theta(\mu_1' + \cos\theta)}.$$

б) $s = 0$, $4 \le 2r \le n$:

$$I(0,n)T_1(2r-1,n-1)\left|Q_0^{(n-1)}\right| =$$

$$= \frac{1}{\left|\widehat{Q}_0^{(n-1)}\right|\left|\widehat{Q}_{1,0}^{(n-2)}\right|} \frac{\left|\Delta b_{2r-1,0}\right|}{\prod_{k=1}^{2r-1}\left|Q_{k,0}^{(n-1-k)}\right| \prod_{k=2}^{2r-1}\left|\widehat{Q}_{k,0}^{(n-1-k)}\right|} \le$$

$$\le \frac{1}{\mu_1' + \cos\theta} \cdot \frac{\left|\Delta b_{2r-1,0}\right|}{\left|Q_{2r-1,0}^{(n-2r)}\right|} \frac{\left|\Delta b_{2r-1,0}\right|}{\prod_{k=1}^{2r-2}\left|Q_{k,0}^{(n-1-2k)}\right| \prod_{k=2}^{2r-1}\left|\widehat{Q}_{k,0}^{(n-1-k)}\right|} \le$$

$$\le \frac{1}{\mu_1' + \cos\theta} \cdot \frac{\left|\Delta b_{2r-1,0}\right|}{\operatorname{Re} b_{2r-1,0}} \times$$

$$\times \frac{\left|\Delta b_{2r-1,0}\right|}{\prod_{k=1}^{r-1}\left|Q_{2k-1,0}^{(n-4k+1)}\right|\left|Q_{2k,0}^{(n-4k-1)}\right| \prod_{k=1}^{r-1}\left|\widehat{Q}_{2k,0}^{(n-4k-1)}\right|\left|\widehat{Q}_{2k+1,0}^{(n-4k-3)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|\beta_{2r-1,0}\right|}{\cos\theta} \frac{1}{\mu_1' + \cos\theta} \frac{1}{\prod_{k=1}^{r-1}(\mu_{2k}' + \cos\theta)\prod_{k=1}^{r-1}(\mu_{2k+1}' + \cos\theta)} =$$

$$= \frac{\left|\beta_{2r-1,0}\right|}{\cos\theta} \frac{1}{\prod_{k=1}^{2r-1}(\mu_k' + \cos\theta)}.$$

в) $2 \le 2s \le \left[\dfrac{n}{2}\right] - 1, \quad r = 1:$

$$I(2s,n)T_1(1, n-4s-1)\left|Q_0^{(n-1)}\right| =$$

$$= \frac{1}{\prod_{j=1}^{2s}\left|Q_j^{(n-2j-1)}\right|\prod_{j=0}^{2s-1}\left|\widehat{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|}\frac{\left|\Delta b_{2s+1,2s}\right|}{\left|Q_{2s+1,2s}^{(n-4s-2)}\widehat{Q}_{2s}^{(n-4s-1)}\widehat{Q}_{2s+1,2s}^{(n-4s-2)}\right|} =$$

$$= \frac{\left|\Delta b_{2s+1,2s}\right|}{\operatorname{Re} b_{2s+1,2s}}\frac{1}{\prod_{j=1}^{2s}\left|Q_j^{(n-2j-1)}\right|\prod_{j=0}^{2s-1}\left|\widehat{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|}\cdot\frac{1}{\mu_1' + \cos\theta} \le$$

$$\le \frac{\left|\beta_{2s+1,2s}\right|}{\cos\theta(\mu_1' + \cos\theta)} \times$$

$$\times \frac{1}{\prod_{j=1}^{s}\left|Q_{2j-1}^{(n-4j+1)}\right|\left|Q_{2j}^{(n-4j-1)}\right|}\ \frac{1}{\prod_{j=0}^{s-1}\left|Q_{2j+1}^{(n-4j-1)}\right|\left|Q_{2j}^{(n-4j-1)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|\beta_{2s+1,2s}\right|}{\cos\theta(\mu_1' + \cos\theta)}\frac{1}{\prod_{j=1}^{2s}(\mu_j + \cos\theta)}.$$

г) $2 \le 2s \le \left[\dfrac{n}{2}\right] - 1, \quad 4 \le 2r \le n - 4s:$

$$I(2s,n)T_1(2r-1, n-4s-1)\left|Q_0^{(n-1)}\right| =$$

$$= \frac{1}{\prod_{j=1}^{2s}\left|Q_j^{(n-2j-1)}\right|\prod_{j=0}^{2s}\left|\widehat{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|}\ \frac{\left|\Delta b_{2s+2r-1,2s}\right|}{\prod_{k=1}^{2r-1}\left|Q_{2s+k,2s}^{(n-4s-1-k)}\widehat{Q}_{2s+k,2s}^{(n-4s-1-k)}\right|} =$$

$$= \frac{\left|\Delta b_{2s+2r-1,2s}\right|}{\left|Q_{2s+2r-1,2s}^{(n-4s-2r)}\right|}\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^{2s}\left|Q_j^{(n-2j-1)}\right|\prod_{j=0}^{2s-1}\left|\widehat{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|} \times$$

$$\times \frac{1}{\left|\widehat{Q}_{2s}^{(n-4s-1)}\right|\left|\widehat{Q}_{2s+1,2s}^{(n-4s-2)}\right|} \times$$

$$\times \frac{1}{\prod_{k=1}^{2r-2}\left|Q_{2s+k,2s}^{(n-4s-1-k)}\right|\prod_{k=2}^{2r-1}\left|\widehat{Q}_{2s+k,2s}^{(n-4s-1-k)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|\beta_{2s+2r-1,0}\right|}{\cos\theta}\frac{1}{\prod_{j=1}^{2s}(\mu_j + \cos\theta)}\cdot\frac{1}{\prod_{k=1}^{2r-1}(\mu_k' + \cos\theta)}.$$

Випадок 2°: $\quad i = 2s, \quad 0 \le 2s \le \left[\frac{n}{2}\right] - 1, \quad \ell = 2r, \quad 2 \le 2r \le n - 4s - 1\,.$

а) $\quad s = 0, \quad r = 1:$

$$I(0,n)T_1(2,n-1)\left|Q_0^{(n-1)}\right| = \frac{1}{\left|\widehat{Q}_0^{(n-1)}\widehat{Q}_{1,0}^{(n-2)}\right|}\frac{\left|\Delta b_{2,0}\right|}{\left|Q_{1,0}^{(n-2)}Q_{2,0}^{(n-3)}\widehat{Q}_{2,0}^{(n-3)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|\beta_{2,0}\right|}{\left|1+\beta_{2,0}\right|\cos\theta}\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{2}(\mu'_k + \cos\theta)}\,.$$

б) $\quad s = 0, \quad 4 \le 2r \le n-1:$

$$I(0,n)T_1(2r,n-1)\left|Q_0^{(n-1)}\right| =$$

$$= \frac{1}{\left|\widehat{Q}_0^{(n-1)}\widehat{Q}_{1,0}^{(n-2)}\right|}\frac{\left|\Delta b_{2r,0}\right|}{\left|\widehat{Q}_{2r,0}^{(n-1-k)}\right|\prod\limits_{k=1}^{2r}\left|Q_{k,0}^{(n-1-k)}\right|\prod\limits_{k=2}^{2r-1}\left|\widehat{Q}_{k,0}^{(n-1-k)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|\beta_{2r,0}\right|}{\left|1+\beta_{2r,0}\right|\cos\theta}\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{2r}(\mu'_k + \cos\theta)}\,.$$

в) $\quad 2 \le 2s \le \left[\frac{n}{2}\right] - 1, \quad r = 1:$

$$I(2s,n)T_1(2,n-4s-1)\left|Q_0^{(n-1)}\right| =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{2s}\left|Q_j^{(n-2j-1)}\right|\prod\limits_{j=0}^{2s-1}\left|\widehat{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|}\frac{\left|\Delta b_{2s+2,2s}\right|}{\left|\widehat{Q}_{2s+2,2s}^{(n-4s-3)}\right|}\times$$

$$\times\frac{1}{\left|\widehat{Q}_{2s}^{(n-4s-1)}\widehat{Q}_{2s+1,2s}^{(n-4s-2)}\right|\prod\limits_{k=1}^{2}\left|Q_{2s+k,2s}^{(n-4s-1-k)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|\beta_{2s+2,2}\right|}{\left|1+\beta_{2s+2,2}\right|\cos\theta}\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{2s}(\mu_j + \cos\theta)}\cdot\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{2}(\mu'_j + \cos\theta)}\,.$$

г) $\quad 2 \le 2s \le \left[\frac{n}{2}\right] - 1, \quad 4 \le 2r \le n-4s-1:$

$$I(2s,n)T_1(2r,n-4s-1)\left|Q_0^{(n-1)}\right| =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{2s}\left|Q_j^{(n-2j-1)}\right|\prod\limits_{j=1}^{2s-1}\left|\widehat{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|}\frac{1}{\left|\widehat{Q}_{2s}^{(n-4s-1)}\right|\left|\widehat{Q}_{2s+1,2s}^{(n-4s-2)}\right|}\times$$

$$\times\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{2r}\left|Q_{2s+k,2s}^{(n-4s-1-k)}\right|\prod\limits_{k=2}^{2r-1}\left|\widehat{Q}_{2s+k,2s}^{(n-4s-1-k)}\right|}\frac{\left|\Delta b_{2s+2r,2s}\right|}{\left|\widehat{Q}_{2s+2r,2s}^{(n-4s-2r-1)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|\beta_{2s+2r,2s}\right|}{\left|1+\beta_{2s+2r,2s}\right|\cos\theta}\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{2s}(\mu_j + \cos\theta)}\cdot\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{2r}(\mu'_j + \cos\theta)}\,.$$

Випадок 3°: $\quad i = 2s-1, \quad 2 \le 2s \le \left[\frac{n}{2}\right], \quad \ell = 2r-1, \quad 2 \le 2r \le n-4s+2\,.$

а) $\quad s = 1, \quad r = 1:$

$$I(1,n)T_1(1,n-3)\left|Q_0^{(n-1)}\right| = \frac{1}{\left|\widehat{Q}_0^{(n-1)}\widehat{Q}_1^{(n-3)}\right|}\,\frac{\left|\Delta b_{2,1}\right|}{\left|Q_1^{(n-3)}Q_{2,1}^{(n-4)}\right|\left|\widehat{Q}_{2,1}^{(n-4)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|\beta_{2,1}\right|}{\left|\beta_{2,1}+1\right|\cos\theta}\,\frac{1}{(\mu_1+\cos\theta)(\mu_1'+\cos\theta)}\,.$$

б) $\quad s = 1, \quad 4 \le 2r \le n-2:$

$$I(1,n)T_1(2r-1,n-3)\left|Q_0^{(n-1)}\right| =$$

$$= \frac{1}{\left|Q_1^{(n-3)}Q_{2,1}^{(n-4)}\right|\left|\widehat{Q}_0^{(n-1)}\widehat{Q}_1^{(n-3)}\right|}\,\frac{\left|\Delta b_{2r,1}\right|}{\left|\widehat{Q}_{2r,1}^{(n-2-2r)}\right|}\times$$

$$\times\frac{1}{\prod\limits_{k=2}^{2r-1}\left|Q_{k+1,1}^{(n-3-k)}\right|\prod\limits_{k=1}^{2r-2}\left|\widehat{Q}_{k+1,1}^{(n-3-k)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|\beta_{2r,1}\right|}{\left|1+\beta_{2r,1}\right|\cos\theta\,(\mu_1+\cos\theta)\prod\limits_{k=1}^{2r-1}(\mu_k'+\cos\theta)}\,.$$

в) $\quad 4 \le 2s \le \left[\frac{n}{2}\right], \quad r = 1:$

$$I(2s-1,n)T_1(1,n-4s+1)\left|Q_0^{(n-1)}\right| = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{2s-2}\left|Q_j^{(n-2j-1)}\right|\prod\limits_{j=0}^{2s-1}\left|\widehat{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|}\times$$

$$\times\frac{\left|\Delta b_{2s,2s-1}\right|}{\left|Q_{2s-1}^{(n-4s+1)}Q_{2s,2s-1}^{(n-4s)}\right|\left|\widehat{Q}_{2s,2s-1}^{(n-4s)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|\beta_{2s,2s-1}\right|}{\left|1+\beta_{2s,2s-1}\right|\cos\theta}\,\frac{1}{(\mu_1'+\cos\theta)\prod\limits_{j=1}^{2s-1}(\mu_j+\cos\theta)}\,.$$

г) $\quad 4 \le 2s \le \left[\frac{n}{2}\right], \quad 4 \le 2r \le n-4s+2:$

$$I(2s-1,n)T_1(2r-1,n-4s+1)\left|Q_0^{(n-1)}\right| =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{2s-2}\left|Q_j^{(n-2j-1)}\right|\prod\limits_{j=0}^{2s-1}\left|\widehat{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|}\times\frac{1}{\left|Q_{2s-1}^{(n-4s+1)}\right|\left|Q_{2s,2s-1}^{(n-4s)}\right|}\times$$

$$\times\frac{1}{\prod\limits_{k=2}^{2r-1}\left|Q_{2s+k,2s}^{(n-4s+1-k)}\right|\prod\limits_{k=1}^{2r-2}\left|\widehat{Q}_{2s+k,2s}^{(n-4s+1-k)}\right|}\,\frac{\left|\Delta b_{2s+2r-2,2s-1}\right|}{\left|\widehat{Q}_{2s+2r-2,2s-1}^{(n-4s-2r+2)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|\beta_{2s+2r-2,2s-1}\right|}{\left|1+\beta_{2s+2r-2,2s-1}\right|\cos\theta}\,\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{2s-1}(\mu_j+\cos\theta)}\cdot\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{2r-1}(\mu_j'+\cos\theta)}\,.$$

Випадок 4°: $\qquad i = 2s-1, \quad 2 \le 2s \le \left[\frac{n}{2}\right], \quad \ell = 2r, \quad 2 \le 2r \le n-4s+1.$

а) $\quad s = 1, \quad r = 1:$

$$I(1,n)T_1(2,n-3)\left|Q_0^{(n-1)}\right| =$$

$$= \frac{1}{\left|\widehat{Q}_0^{(n-1)}\widehat{Q}_1^{(n-3)}\right|} \frac{1}{\left|Q_1^{(n-3)}Q_{2,1}^{(n-4)}\right|\left|\widehat{Q}_{2,1}^{(n-3)}\widehat{Q}_{3,1}^{(n-4)}\right|} \frac{\left|\Delta b_{3,1}\right|}{\left|Q_{3,1}^{(n-4)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|\beta_{3,1}\right|}{\left|1+\beta_{3,1}\right|\cos\theta} \frac{1}{(\mu_1+\cos\theta)} \frac{1}{(\mu_1'+\cos\theta)(\mu_2'+\cos\theta)}.$$

б) $\quad s = 1, \quad 4 \le 2r \le n-3:$

$$I(1,n)T_1(2r,n-3)\left|Q_0^{(n-1)}\right| = \frac{1}{\left|\widehat{Q}_0^{(n-1)}\widehat{Q}_1^{(n-3)}\right|} \frac{1}{\left|Q_1^{(n-3)}Q_{2,1}^{(n-4)}\right|} \times$$

$$\times \frac{\left|\Delta b_{2r+1,1}\right|}{\left|Q_{2r+1,1}^{(n-3-2r)}\right| \prod\limits_{k=2}^{2r-1}\left|Q_{k+1,1}^{(n-3-k)}\right| \prod\limits_{k=1}^{2r}\left|\widehat{Q}_{k+1,1}^{(n-3-k)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|\beta_{2r+1,1}\right|}{(\mu_1+\cos\theta)\cos\theta} \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{2r}(\mu_k'+\cos\theta)}.$$

в) $\quad 4 \le 2s \le \left[\frac{n}{2}\right], \quad r = 1:$

$$I(2s-1,n)T_1(2,n-4s+1)\left|Q_0^{(n-1)}\right| =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{2s-2}\left|Q_j^{(n-2j-1)}\right| \prod\limits_{j=0}^{2s-1}\left|\widehat{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|} \frac{1}{\left|Q_{2s-1}^{(n-4s+1)}Q_{2s,2s-1}^{(n-4s)}\right|} \times$$

$$\times \frac{\left|\Delta b_{2s+1,2s-1}\right|}{\left|Q_{2s+1,2s-1}^{(n-4s-1)}\right| \prod\limits_{k=1}^{2}\left|\widehat{Q}_{2s-1+k,2s-1+k}^{(n-4s+1-k)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|\beta_{2s+1,2s-1}\right|}{\cos\theta} \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{2s-1}(\mu_j+\cos\theta)\prod\limits_{k=1}^{2}(\mu_k'+\cos\theta)}.$$

г) $\quad 4 \le 2s \le \left[\frac{n}{2}\right], \quad 4 \le 2r \le n-4s+1:$

$$I(2s-1,n)T_1(2,n-4s+1)\left|Q_0^{(n-1)}\right| =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{2s-2}\left|Q_j^{(n-2j-1)}\right| \prod\limits_{j=0}^{2s-1}\left|\widehat{Q}_j^{(n-2j-1)}\right|} \frac{1}{\left|Q_{2s-1}^{(n-4s+1)}Q_{2s,2s-1}^{(n-4s)}\right|} \times$$

$$\times \frac{1}{\prod_{k=2}^{2r-1}\left|Q_{2s-1+k,2s-1}^{(n-4s+1-k)}\right|\prod_{k=1}^{2r}\left|\widehat{Q}_{2s-1+k,2s-1}^{(n-4s+1-k)}\right|}\frac{\left|\Delta b_{2s+2r-1,2s-1}\right|}{\left|Q_{2s+2r-1,2s-1}^{(n-4s-2r+2)}\right|}\le$$

$$\le \frac{\left|\beta_{2s+2r-1,2s-1}\right|}{\cos\theta}\frac{1}{\prod_{j=1}^{2s-1}(\mu_j+\cos\theta)\prod_{k=1}^{2r}(\mu'_k+\cos\theta)}.$$

Враховуючи умови (12), маємо

$$\frac{\left|\beta_{i,j}\right|}{\left|1+\beta_{i,j}\right|}\le\frac{\beta}{1-\beta},\quad i,j=0,1,\dots, \tag{33}$$

а беручи до уваги ще й оцінки (29)–(32), одержуємо

$$\sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} I(i,n)\left|Q_0^{(n-1)}\right|\left|\Delta b_{i,i}\right|<$$

$$<\frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{\cos\theta}\sum_{i=1}^{[(n-1)/2]}\frac{1}{\prod_{j=1}^{i}(\mu_j+\cos\theta)}. \tag{34}$$

Враховуючи оцінки для $I(i,n)T_1(\ell,n-2i-1)$, отримані при розгляді ***випадків 1°–4°***, а також нерівність (33), маємо

$$I(0,n)T_1(\ell,n-1)\le\frac{\beta}{(1-\beta)\cos\theta}\frac{1}{\prod_{k=1}^{\ell}(\mu'_k+\cos\theta)},$$

$$I(i,n)T_1(\ell,n-2i-1)\le\frac{\beta}{(1-\beta)\cos\theta}\frac{1}{\prod_{j=1}^{i}(\mu_j+\cos\theta)\prod_{k=1}^{\ell}(\mu'_k+\cos\theta)}.$$

Оцінки для $I(i,n)T_2(\ell,n-2i-1)$ аналогічні.

Далі,

$$\sum_{i=0}^{[n/2]-1} I(i,n)\left|Q_0^{(n-1)}\right|\sum_{\ell=1}^{n-2i-1}\big(T_1(\ell,n-2i-1)+T_2(\ell,n-2i-1)\big)=$$

$$=I(0,n)\left|Q_0^{(n-1)}\right|\sum_{\ell=1}^{n-1}\big(T_1(\ell,n-1)+T_2(\ell,n-1)\big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{[n/2]-1} I(i,n)\left|Q_0^{(n-1)}\right|\sum_{\ell=1}^{n-2i-1}\big(T_1(\ell,n-2i-1)+T_2(\ell,n-2i-1)\big)\le$$

$$\le\frac{\beta}{(1-\beta)\cos\theta}\left(\sum_{\ell=1}^{n-1}\frac{1}{\prod_{k=1}^{\ell}(\mu'_k+\cos\theta)}+\sum_{\ell=1}^{n-1}\frac{1}{\prod_{k=1}^{\ell}(\mu''_k+\cos\theta)}\right)+$$

$$+\frac{\beta}{(1-\beta)\cos\theta}\sum_{i=1}^{[n/2]-1}\frac{1}{\prod_{j=1}^{i}(\mu_j+\cos\theta)}\times$$

$$\times\left(\sum_{\ell=1}^{n-2i-1}\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\ell}(\mu'_k+\cos\theta)}+\sum_{\ell=1}^{n-2i-1}\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\ell}(\mu''_k+\cos\theta)}\right). \tag{35}$$

З нерівностей (34), (35) випливає правильність оцінки (17).

Отже, теорему доведено. ♦

Висновки. У роботі для встановлення оцінки відносної похибки використано формулу для обчислення абсолютної похибки фігурних підхідних дробів ДНД (1). Така методика може бути використана для дослідження стійкості до збурень інших наближень ДНД. Доцільно також продовжити дослідження стійкості до збурень різних наближень ДНД для кутових множин при зменшенні кута θ.

1. *Антонова Т., Сусь О.* Про абсолютну стійкість до збурень двовимірних неперервних дробів із комплексними елементами // Зб. наук. праць, присвячений 80-річчю Б. Й. Пташника «Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь». – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017. – С. 8–21.
2. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
3. *Боднар Д. И.* Оценка погрешности вычисления ветвящихся цепных дробей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. – № 12. – С. 1059–1062.
4. *Боднар Д. І., Воделанд Х., Кучмінська Х. Й., Сусь О. М.* Про стійкість гіллястих ланцюгових дробів // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1994. – Вып. 37. – С. 3–7.
   Те саме: *Bodnar D. I., Waadeland H., Kuchmins'ka K. I., Sus' O. M.* On the stability of branching continued fractions // J. Math. Sci. – 1996. – **79**, No. 6. – P. 1373–1377. – https://doi.org/10.1007/BF02362785
5. *Боднар Д. І., Гладун В. Р.* Деякі області стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Сер. Математика. – 2006. – Вип. 288. – С. 18–27.
6. *Боднар Д. І., Гладун В. Р.* Достатні умови стійкості гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45,** № 1. – С. 22–27.
7. *Боднар Д. І., Гладун В. Р.* Параболічні області обчислювальної стійкості гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 2000. – № 411. – С. 44–48.
   http://ena.lp.edu.ua:8080/handle/ntb/37988
8. *Боднарчук П. И., Иванел В. К., Дзюбка Б. Е., Пустомельников И. П., Слоневский Р. В.* Вычислительная устойчивость цепных и ветвящихся цепных дробей // Цепные дроби и их прим. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 12–14.
9. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. – Київ: Наук. думка, 1974. – 272 с.
10. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
    Те саме: *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. – Reading, MA: Addison-Wesley Publ. Co., 1980. – xxii+428 p. – Encyclopedia of Mathematics and its Applications / Ed. G.-C. Rota. – Vol. 11.
11. *Кучмінська Х. Й.* Стійкість при обчисленні двовимірних неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 4. – С. 15–23.
    Те саме: *Kuchmins'ka Kh. Yo.* Stability in the calculation of two-dimensional continued fractions // J. Math. Sci. – 2015. – **208**, No. 3. – P. 277–288.
    https://doi.org/10.1007/s10958-015-2445-y
12. *Недашковский Н. А.* Решение систем линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1980. – 17 с.
13. *Сусь О. М.* Про оцінку швидкості збіжності двовимірних неперервних дробів з комплексними елементами // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2008. – Вип. 6. – С. 115–123.
14. *Терских В. П.* Метод цепных дробей в применении к исследованию колебаний механических систем: В 2 т. – Ленинград: Судпромгиз, 1955. – Т. 1. – 376 с.; Т. 2. – 332 с.

15. *Jones W. B., Thron W. J.* Numerical stability in evaluating continued fractions. – Math. Comp. – 1974. – **28**, No. 127. – P. 795–810.
https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1974-0373265-5

О ФИГУРНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ К ВОЗМУЩЕНИЯМ ДВУМЕРНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Рассматриваются двумерные непрерывные дроби, элементы которых принадлежат угловой области правой полуплоскости. Установлены достаточные условия их фигурной относительной устойчивости к возмущениям. Получена оценка относительной погрешности фигурных приближений исследуемых двумерных непрерывных дробей.

ON FIGURED RELATIVE STABILITY UNDER PERTURBATIONS OF TWO-DIMENSIONAL CONTINUED FRACTIONS WITH COMPLEX ELEMENTS

Two-dimensional continued fractions whose elements belong to angular domain of right half-plane are considered. Sufficient conditions of their figured relative stability under perturbations are established. An estimate of relative error for figured approximants of investigated two-dimensional continued fractions is obtained.

[1] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.04.17