УДК 517.524

Д. І. Боднар[1], І. Б. Біланик[2]

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ У КУТОВИХ ОБЛАСТЯХ

Досліджено кутові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з комплексними частинними знаменниками. Використовуючи достатню ознаку збіжності цих дробів з додатними елементами та теорему Стілтьєса – Віталі, встановлено багатовимірний аналог ознаки збіжності ван Флека для неперервних дробів, а також інші достатні ознаки збіжності при накладанні додаткових умов на елементи дробу. У цих кутових областях одержано оцінки швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду.

В аналітичній теорії неперервних дробів значна увага приділяється питанню збіжності. Багато ознак збіжності формулюються як теореми про множини збіжності. Вивчаються кругові, овальні, параболічні, кутові та інші області збіжності. Однією з класичних ознак збіжності неперервних дробів з частинними чисельниками, рівними одиниці, є ознака збіжності ван Флека [7, 15–17], в якій досліджено збіжність неперервних дробів саме у кутовій області.

Ця теорема отримала продовження в роботі [13], де було одержано різні оцінки швидкості збіжності підхідних дробів, зокрема:

Теорема 1. *Нехай для елементів неперервного дробу*

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_i}$$

виконуються умови

$$b_i \neq 0, \ \ |\arg b_i| < \theta, \ \ \theta < \frac{\pi}{2}, \ \ i = 0, 1, 2, \ldots .$$

Тоді

1°) *існують скінченні границі парних і непарних підхідних дробів;*

2°) *послідовність підхідних дробів $\{f_n\}$ збігається тоді і тільки тоді, коли ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|$ розбігається;*

3°) *справджується оцінка*

$$|f_m - f_{n-1}| \le \frac{1}{d_n}, \ \ m \ge n,$$

де

$$d_n \ge \frac{\Re(b_1)}{2 + \Re(b_1)} \cos\theta \ln\left(1 + (\Re(b_1))^2 \min\left\{1, \frac{1}{|b_1|^2}\right\} \cos\theta \sum_{i=1}^{n} |b_i|\right), \ n \ge 1. \quad (1)$$

У роботі [4] встановлено багатовимірний аналог теореми ван Флека для гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) з N гілками розгалужень. Двовимірне узагальнення цієї теореми при інших умовах на розбіжність рядів, складених з елементів двовимірного неперервного дробу, розглянуто в роботі [6]. Оцінку швидкості збіжності таких дробів у кутовій області встановлено в [10].

Об'єктом нашого дослідження є ГЛД спеціального вигляду

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{b_{i(k)}}, \quad (2)$$

де $b_0, b_{i(k)}$ – комплексні числа, $i(k) \in I$,

$$I = \{i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k \ : \ 1 \le i_k \le i_{k-1} \le \ldots \le i_0, \ \ k \ge 1, \ \ i_0 = N\},$$

значення i_0 визначає розмірність дробу. Для таких дробів встановлено багатовимірне узагальнення теореми ван Флека, а також досліджено оцінки швидкості збіжності у кутових областях.

ГЛД спеціального вигляду були об'єктом досліджень у багатьох роботах, зокрема [1, 2, 3, 5, 8, 9, 11, 12, 14], у яких були встановлені аналоги ознак збіжності неперервних дробів Ворпіцького, Прінґсгейма, Лейтона – Уолла, параболічні теореми та ін.

Суттєво використовується достатня ознака збіжності ГЛД спеціального вигляду з додатними елементами [11]:

Теорема 2. *ГЛД* (2) *з додатними елементами є збіжним, якщо розбіжними є ряди*

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_{m[p]}, \qquad m = 1, \ldots, N,$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_{i(n)m[p]}, \quad m = 1, \ldots, N, \ \ i(n) \in I^{(m+1)},$$

де

$$I^{(m)} = \{i(n) = i_1 i_2 \ldots i_n \ : \ m \le i_n \le i_{n-1} \le \ldots \le i_0, \ \ n \ge 1, \ \ i_0 = N\}, \tag{3}$$

$$m = 2, \ldots, N, \ \ m[p] = \underbrace{mm \ldots m}_{p}.$$

Використовуючи техніку множин елементів та множин значень, теорему Стілтьєса – Віталі [7, теорема 4.30] та методику, запропоновану в роботі [6], встановлено багатовимірний аналог теореми ван Флека.

Теорема 3. *Нехай частинні знаменники ГЛД* (2) *належать області*

$$G(\varepsilon) = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ z \ne 0, |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right\}, \tag{4}$$

де ε *– довільне додатне число,* $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$.

Тоді

1°) *кожне* n*-е наближення* f_n *ГЛД* (2) *належить області* (4)*;*

2°) *існують скінченні границі парних і непарних підхідних дробів;*

3°) *ГЛД* (2) *збігається, якщо розбігаються ряди*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left| b_{m[p]} \right|, \qquad m = 1, \ldots, N,$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left| b_{i(n)m[p]} \right|, \quad m = 1, \ldots, N-1, \ \ i(n) \in I^{(m+1)}. \tag{5}$$

Д о в е д е н н я. Враховуючи опуклість та симетричність області (4), а також властивості дробово-лінійного відображення, легко встановити, що $\forall n \in \mathbb{N} \ \ f_n \in G(\varepsilon)$.

Розглянемо функціональний ГЛД

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{b_{i(k)}(z)}, \tag{6}$$

де $b_{i(k)}(z) = |b_{i(k)}| e^{i \arg b_{i(k)} z}$.

Якщо $z \in D(\varepsilon)$, $D(\varepsilon) = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ |\Re(z)| < 1 + \frac{\varepsilon}{\pi - 2\varepsilon}, |\Im(z)| < 1 \right\}$, то $b_{i(k)}(z) \in G(\frac{\varepsilon}{2})$.

Для послідовності голоморфних функцій $\{f_n(z)\}$, $f_n(z)$ – n-й підхідний дріб ГЛД (6), $n \geq 1$, в області $D(\varepsilon)$ виконуються умови теореми Стілтьєса – Віталі, де $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |\Re(z)| = 0, |\Im(z)| < 1\}$.

Нехай $z \in \Delta$, тоді ГЛД (6) можна переписати у вигляді

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{\tilde{b}_{i(k)}}, \tag{7}$$

де $\tilde{b}_{i(k)} = |b_{i(k)}| e^{-\arg b_{i(k)} \Im(z)}$.

Із властивості «вилки» для ГЛД спеціального вигляду з додатними елементами (7) випливає, що його парні і непарні підхідні дроби мають границі. Тому за теоремою Стілтьєса – Віталі існують скінченні границі парних і непарних підхідних дробів ГЛД (2).

Із розбіжності рядів (5) випливає розбіжність рядів $\sum_{p=1}^{\infty} \tilde{b}_{m[p]}$, $m = 1, \ldots, N$, і $\sum_{p=1}^{\infty} \tilde{b}_{i(n)m[p]}$, $m = 1, \ldots, N-1$, $i(n) \in I^{(m+1)}$. Із теореми 2 випливає, що ГЛД (7) збігається. А це означає, що послідовність голоморфних функцій $\{f_n(z)\}$ збігається при $z \in \Delta$. Очевидно, що $\Delta \subset D(\varepsilon)$. Отже, використавши теорему Стілтьєса – Віталі, де, наприклад, $a = -1$, $b = -2$, доходимо висновку, що ГЛД (6) збігається на довільному компакті $D(\varepsilon)$, зокрема на множині $\{1\}$, тобто при $z = 1$. Таким чином, ГЛД (2) збігається. Теорему доведено. ♦

Наступна теорема дозволяє оцінити швидкість збіжності ГЛД спеціального вигляду із частинними чисельниками, рівними одиниці, і частинними знаменниками, що є комплексними числами, які лежать у деякій кутовій області.

Теорема 4. *Нехай елементи ГЛД* (2) *задовольняють умови*

$$\Re(b_{i(k)}) > 0, \quad |\arg b_{i(k)}| < \theta, \quad \theta < \frac{\pi}{2}, \quad i(k) \in I, \tag{8}$$

і нескінченний добуток

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\cos\theta} (1 - \nu_k) \right)$$

розбігається до нуля, де

$$\nu_k = \min \left\{ \frac{\Re(b_{i(k)})}{|b_{i(k)}| + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{1}{\Re(b_{i(k+1)})}} \ : \ i(k) \in I_k \right\}, \tag{9}$$

$$I_k = \{ i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k \ : \ 1 \leq i_k \leq i_{k-1} \leq \ldots \leq i_0, \ i_0 = N \}, \ k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Тоді ГЛД (2) *збігається і справджується оцінка швидкості збіжності*

$$\left|f_n - f_p\right| \le \frac{2N}{\min(\Re(b_{i_1}) : i_1 = 1,2,\ldots,N)}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{2s}\prod_{k=1}^{2s}(1-\nu_k),$$

$$n > p, \quad s = \left[\frac{p}{2}\right]. \tag{10}$$

Д о в е д е н н я. Враховуючи умову (8), а також властивості дробово-лінійних відображень, легко показати, що для залишків n-х підхідних дробів ГЛД (2)

$$Q_{i(n)}^{(n)} = b_{i(n)}, \quad n \ge 1,$$

$$Q_{i(k)}^{(n)} = b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k}\frac{1}{Q_{i(k+1)}^{(n)}}, \quad k = 1,2,\ldots,n-1, \quad n \ge 2,$$

справджується оцінка

$$\left|\arg Q_{i(k)}^{(n)}\right| < \theta, \quad k = 1,2,\ldots,n, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Таким чином,

$$\left|Q_{i(k)}^{(n)}\right| \ge \Re\left(Q_{i(k)}^{(n)}\right) \ge \Re\left(b_{i(k)}\right) + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k}\frac{\cos\theta}{\left|Q_{i(k+1)}^{(n)}\right|},$$

$$k = 1,2,\ldots,n-1, \quad n \ge 2. \tag{11}$$

Для модуля різниці підхідних дробів ГЛД (2) у випадку $n > 2m$ маємо таку оцінку [3]:

$$\left|f_n - f_{2m}\right| \le \sum_{i_1=1}^{N}\frac{1}{\left|Q_{i(1)}^{(n)}\right|}\times$$

$$\times\sum_{i_2=1}^{i_1}\cdots\sum_{i_{2m}=1}^{i_{2m-1}}\frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1}\left|Q_{i(2k)}^{(n)}Q_{i(2k+1)}^{(n)}\right|\prod_{k=1}^{m}\left|Q_{i(2k-1)}^{(2m)}Q_{i(2k)}^{(2m)}\right|}\times$$

$$\times\sum_{i_{2m+1}=1}^{i_{2m}}\frac{1}{\left|Q_{i(2m)}^{(n)}Q_{i(2m+1)}^{(n)}\right|}.$$

Використовуючи нерівності (11), а також монотонне зростання функції $y = \dfrac{x}{b+x}$, $b \ge 0$, при додатних значеннях змінної x, отримуємо оцінку

$$\sum_{i_{2m+1}=1}^{i_{2m}}\frac{1}{\left|Q_{i(2m)}^{(n)}Q_{i(2m+1)}^{(n)}\right|} \le \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\sum\limits_{i_{2m+1}=1}^{i_{2m}}\dfrac{\cos\theta}{\left|Q_{i(2m+1)}^{(n)}\right|}}{\Re\left(b_{i(2m)}\right) + \sum\limits_{i_{2m+1}=1}^{i_{2m}}\dfrac{\cos\theta}{\left|Q_{i(2m+1)}^{(n)}\right|}} \le$$

$$\le \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\left|Q_{i(2m)}^{(n)}\right| - \Re\left(b_{i(2m)}\right)}{\left|Q_{i(2m)}^{(n)}\right|} \le$$

$$\le \frac{1}{\cos\theta}\left(1 - \frac{\Re\left(b_{i(2m)}\right)}{\left|b_{i(2m)}\right| + \sum\limits_{i_{2m+1}=1}^{i_{2m}}\dfrac{1}{\Re\left(b_{i(2m+1)}\right)}}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\cos\theta}(1-\nu_{2m}),$$

де ν_{2m} визначається згідно з (9).

Провівши аналогічні міркування для сум $\sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \dfrac{1}{\left|Q_{i(k-1)}^{(s)} Q_{i(k)}^{(s)}\right|}$, $k = 2m$, $2m-1, \ldots, 2$, де $s = 2m$, якщо k – парне, і $s = n$, якщо k – непарне, з урахуванням того, що $\sum\limits_{i_1=1}^{N} \dfrac{1}{\left|Q_{i(1)}^{(n)}\right|} \le \dfrac{2N}{\min\limits_{i_1} \Re(b_{i_1})}$, отримуємо:

$$|f_n - f_{2m}| \le \frac{N}{\min\limits_{i_1} \Re(b_{i_1})} \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{2m} \prod_{k=1}^{2m} (1-\nu_k), \quad n > 2m.$$

Звідси, враховуючи нерівність трикутника $\left|f_n - f_p\right| \le \left|f_n - f_{2s}\right| + \left|f_p - f_{2s}\right|$, $n \le p$, $s = \left[\dfrac{p}{2}\right]$, одержуємо оцінку (10). З умов теореми випливає, що $\left|f_n - f_p\right| \to 0$ при $p \to \infty$. Теорему доведено. ♦

Наступна теорема дає оцінку швидкості збіжності ГЛД спеціального вигляду в області, що є підмножиною кутової області (8).

Теорема 5. *Нехай елементи N-вимірного ГЛД спеціального вигляду* (2) *задовольняють умови*

$$\Re(b_{i(k)}) > \delta, \quad 0 < \delta < 1, \quad \left|\arg b_{i(k)}\right| < \theta, \quad \theta < \frac{\pi}{4}, \quad i(k) \in I. \tag{12}$$

Тоді ГЛД (2) *збігається і справджується оцінка швидкості збіжності*

$$|f_m - f_{Nn}| < \frac{M_N}{\ln(1+\alpha n)}, \quad m \ge Nn,$$

де M_N і α – деякі додатні сталі, що не залежать від n і m.

Д о в е д е н н я. При $N = 1$ для підхідних дробів f_m неперервних дробів, елементи яких задовольняють умови (12), з урахуванням теореми 1, зокрема співвідношення (1), отримуємо такі оцінки:

$$d_n \ge \frac{\delta\cos\theta}{2+\delta} \ln(1+\alpha n), \quad n \ge 1,$$

де $\alpha = \min\{\delta^3\cos\theta, \delta\cos^3\theta\}$.

Таким чином,

$$|f_m - f_n| \le \frac{1}{d_{n+1}} < \frac{1}{d_n} < \frac{2+\delta}{\delta\cos\theta} \cdot \frac{1}{\ln(1+\alpha n)}, \quad m \ge n. \tag{13}$$

Доведення теореми проведемо з використанням методу математичної індукції по розмірності N ГЛД.

Нехай $N = 2$ і

$$f_n = b_0^{(1,n)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \frac{1}{b_{2[k]}^{(1,n-k)}}, \quad n \ge 1,$$

– n-й підхідний дріб ГЛД (2), в якому $i_0 = 2$, і, з урахуванням позначення (3),

$$b_0^{(1,n)} = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{\ell=1}^{n} \frac{1}{b_{1[\ell]}}, \quad b_{2[k]}^{(1,0)} = b_{2[k]}, \quad b_{2[k]}^{(1,s)} = b_{2[k]} + \mathop{\mathrm{D}}_{\ell=1}^{s} \frac{1}{b_{2[k]2[\ell]}},$$

$$k = 1, 2, \ldots, n, \quad s = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Нехай

$$\tilde{f}_n = b_0^{(1)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \frac{1}{b_{2[k]}^{(1)}}$$

– n-й підхідний дріб неперервного дробу, утвореного в результаті згортання всіх неперервних дробів у ГЛД (2), тобто

$$b_0^{(1)} = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{b_{1[\ell]}}, \quad b_{2[k]}^{(1)} = b_{2[k]} + \mathop{\mathrm{D}}_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{b_{2[k]1[\ell]}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Останні неперервні дроби є збіжними за теоремою 3.

Оцінимо величини $\left| f_p - \tilde{f}_{2n} \right|$, $p \ge 2n$. Нехай

$$h_p = b_0^{(1)} + \frac{1}{b_{2[1]}^{(1)}} + \ldots + \frac{1}{b_{2[n]}^{(1)}} + \frac{1}{b_{2[n+1]}^{(1,p-n-1)}} + \ldots + \frac{1}{b_{2[p]}^{(1,0)}},$$

тоді з нерівності трикутника випливає, що

$$\left| f_p - \tilde{f}_{2n} \right| \le \left| f_p - h_p \right| + \left| h_p - \tilde{f}_{2n} \right|. \tag{14}$$

Маємо

$$\left| f_p - h_p \right| \le \left| b_0^{(1,p)} - b_0^{(1)} \right| + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left| b_{2[k]}^{(1,p-k)} - b_{2[k]}^{(1)} \right|}{\prod\limits_{s=1}^{k} \left| \tilde{Q}_{2[s]}^{(p)} Q_{2[s]}^{(p)} \right|},$$

де $\tilde{Q}_{2[s]}^{(p)}$ – s-й залишок дробу h_p.

Оцінимо добутки в знаменниках останнього співвідношення. Якщо $k = 2\ell$, то

$$\prod_{s=1}^{2\ell} \left| \tilde{Q}_{2[s]}^{(p)} Q_{2[s]}^{(p)} \right| = \prod_{s=1}^{\ell} \left| \tilde{Q}_{2[2s-1]}^{(p)} \tilde{Q}_{2[2s]}^{(p)} \right| \cdot \left| Q_{2[2s-1]}^{(p)} Q_{2[2s]}^{(p)} \right| \ge$$

$$\ge \prod_{s=1}^{\ell} \left(\Re(b_{2[2s]} b_{2[2s-1]}) + 1 \right)^2 \ge \left(\delta^2 \cos 2\theta + 1 \right)^{2\ell}.$$

Якщо $k = 2\ell + 1$, то

$$\prod_{s=1}^{2\ell+1} \left| \tilde{Q}_{2[s]}^{(p)} Q_{2[s]}^{(p)} \right| = \left| \tilde{Q}_{2[1]}^{(p)} Q_{2[1]}^{(p)} \right| \prod_{s=1}^{\ell} \left| \tilde{Q}_{2[2s]}^{(p)} \tilde{Q}_{2[2s+1]}^{(p)} \right| \cdot \left| Q_{2[2s]}^{(p)} Q_{2[2s+1]}^{(p)} \right| \ge$$

$$\ge \left(\Re(b_{2[1]}) \right)^2 \prod_{s=1}^{\ell} \left(\Re(b_{2[2s]} b_{2[2s+1]}) + 1 \right)^2 \ge \delta^2 \left(\delta^2 \cos 2\theta + 1 \right)^{2\ell}.$$

Отже,

$$\prod_{s=1}^{k} \left| \tilde{Q}_{2[s]}^{(p)} Q_{2[s]}^{(p)} \right| \ge \delta^{1-(-1)^k} \left(\delta^2 \cos 2\theta + 1 \right)^{2\left[\frac{k}{2}\right]}.$$

Оцінимо величину $\left| b_{2[k]}^{(1,p-k)} - b_{2[k]}^{(1)} \right|$, використовуючи теорему 1, зокрема її наслідок, а саме нерівність (13):

$$\left| b_{2[k]}^{(1,p-k)} - b_{2[k]}^{(1)} \right| < \frac{2 + \delta}{\delta \cos \theta} \cdot \frac{1}{\ln(1 + \alpha n)}, \quad k = 1, \ldots, n, \quad p \ge 2n.$$

Таким чином,

$$\left|f_p-h_p\right|<\frac{2+\delta}{\delta\cos\theta}\cdot\frac{1}{\ln(1+\alpha n)}\cdot\left(1+\frac{1}{\delta^2}+\frac{2}{\delta^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\delta^2\cos 2\theta+1\right)^{-2k}\right)\le$$

$$\le\frac{(2+\delta)A}{\delta\cos\theta}\cdot\frac{1}{\ln(1+\alpha n)},$$

де $A=1+\dfrac{1}{\delta^2}+\dfrac{2}{\delta^4\cos 2\theta(\delta^2\cos 2\theta+2)}$.

Оцінимо другий доданок у правій частині нерівності (14), використовуючи теорему 1:

$$\left|h_p-\tilde{f}_{2n}\right|\le\left|h_p-\tilde{f}_n\right|+\left|\tilde{f}_{2n}-\tilde{f}_n\right|<\frac{2}{D_n},$$

де

$$D_n\ge\frac{\Re\left(b_0^{(1)}\right)\cos\theta}{2+\Re\left(b_0^{(1)}\right)}\ln\left(1+\left(\Re(b_0^{(1)})\right)^2\min\left\{1,\frac{1}{\left|b_0^{(1)}\right|^2}\right\}\cos\theta\sum_{s=1}^{n}\left|b_{2[s]}^{(1)}\right|\right).$$

Оцінивши цю величину, отримаємо $D_n\ge\dfrac{\delta\cos\theta}{2+\delta}\ln(1+\alpha n)$.

Таким чином,

$$\left|h_p-\tilde{f}_{2n}\right|<\frac{2(2+\delta)}{\delta\cos\theta}\cdot\frac{1}{\ln(1+\alpha n)}.$$

З оцінок, наведених вище, випливає, що

$$\left|f_p-\tilde{f}_{2n}\right|<\frac{2+\delta}{\delta\cos\theta}\cdot(A+2)\cdot\frac{1}{\ln(1+\alpha n)},\quad p\ge 2n.$$

Отже,

$$\left|f_m-f_{2n}\right|\le\left|f_m-\tilde{f}_{2n}\right|+\left|f_{2n}-\tilde{f}_{2n}\right|<\frac{2+\delta}{\delta\cos\theta}\cdot 2(A+2)\cdot\frac{1}{\ln(1+\alpha n)}=$$

$$=\frac{2+\delta}{\delta\cos\theta}\cdot K_2\cdot\frac{1}{\ln(1+\alpha n)}=\frac{M_2}{\ln(1+\alpha n)},\quad m\ge 2n,$$

де $M_2=\dfrac{2+\delta}{\delta\cos\theta}K_2,\quad K_2=2(A+2)$.

Припустимо, що для усіх N-вимірних ГЛД спеціального вигляду (2), $i_0=N$, де $N\le r-1$, елементи яких задовольняють умову (12), справджується оцінка

$$\left|f_m-f_{(r-1)n}\right|<\frac{M_{r-1}}{\ln(1+\alpha n)},\quad m\ge(r-1)n, \tag{15}$$

де

$$M_{r-1}=\frac{2+\delta}{\delta\cos\theta}K_{r-1},\quad K_{r-1}=4(K_{r-2}A+1). \tag{16}$$

Доведемо правильність оцінки (15) при $N=r$. Розглянемо r-вимірний ГЛД спеціального вигляду (2), $i_0=r$. Запишемо його n-й підхідний дріб у вигляді

$$f_n=b_0^{(r-1,n)}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n}\frac{1}{b_{r[k]}^{(r-1,n-k)}},\quad n\ge 1,$$

де

$$b_0^{(r-1,n)} = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{\ell=1}^{n} \sum_{i_\ell=1}^{i_{\ell-1}} \frac{1}{b_{i(\ell)}}, \quad b_{r[k]}^{(r-1,s)} = b_{r[k]} + \mathop{\mathrm{D}}_{\ell=1}^{s} \sum_{i_\ell=1}^{i_{\ell-1}} \frac{1}{b_{r[k]i(\ell)}}$$

– s-і підхідні дроби усіх $(r-1)$-вимірних ГЛД, що входять у ГЛД (2), $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $s = 1, 2, \ldots, n$, $i_0 = r-1$.

Позначимо

$$\hat{f}_n = b_0^{(r-1)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \frac{1}{b_{r[k]}^{(r-1)}}$$

– n-й підхідний дріб неперервного дробу, утвореного в результаті згортання всіх $(r-1)$-вимірних ГЛД у ГЛД (2), тобто

$$b_0^{(r-1)} = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{\ell=1}^{n} \sum_{i_\ell=1}^{i_{\ell-1}} \frac{1}{b_{i(\ell)}}, \quad b_{r[k]}^{(r-1)} = b_{r[k]} + \mathop{\mathrm{D}}_{\ell=1}^{s} \sum_{i_\ell=1}^{i_{\ell-1}} \frac{1}{b_{r[k]i(\ell)}},$$

$$i_0 = r-1, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Таке згортання можна виконати на основі теореми 3.

Оцінимо модуль різниці $\left|f_p - \hat{f}_{rn}\right|$, $p \ge rn$:

$$\left|f_p - \hat{f}_{rn}\right| \le \left|f_p - g_p\right| + \left|g_p - \hat{f}_{rn}\right|,$$

де

$$g_p = b_0^{(r-1)} + \frac{1}{b_{r[1]}^{(r-1)}} + \ldots + \frac{1}{b_{r[(r-1)n]}^{(r-1)}} + \frac{1}{b_{r[(r-1)n+1]}^{(r-1,p-(r-1)n-1)}} + \ldots + \frac{1}{b_{r[p]}^{(r-1,0)}}.$$

Для першого доданка маємо

$$\left|f_p - g_p\right| \le \left|b_0^{(r-1,p)} - b_0^{(r-1)}\right| + \sum_{k=1}^{(r-1)n} \frac{\left|b_{r[k]}^{(r-1,p-k)} - b_{r[k]}^{(r-1)}\right|}{\prod_{s=1}^{k}\left|\hat{Q}_{r[s]}^{(p)} Q_{r[s]}^{(p)}\right|}, \tag{17}$$

де $\hat{Q}_{r[s]}^{(p)}$ – s-й залишок дробу g_p.

Оцінивши добутки у знаменниках (17) з використанням аналогічних до випадку $N = 2$ міркувань, отримуємо

$$\prod_{s=1}^{k}\left|\hat{Q}_{r[s]}^{(p)} Q_{r[s]}^{(p)}\right| \ge \delta^{1-(-1)^k} (\delta^2 \cos 2\theta + 1)^{2\left[\frac{k}{2}\right]}.$$

З нерівності (15) для оцінки чисельників (17) отримуємо:

$$\left|b_{r[k]}^{(r-1,p-k)} - b_{r[k]}^{(r-1)}\right| \le \left|b_{r[k]}^{(r-1,p-k)} - b_{r[k]}^{(r-1,r-1)}\right| + \left|b_{r[k]}^{(r-1)} - b_{r[k]}^{(r-1,r-1)}\right| <$$

$$< \frac{2M_{r-1}}{\ln(1+\alpha n)}, \quad k = 0, \ldots, (r-1)n, \quad p \ge rn.$$

Отже,

$$\left|f_p - g_p\right| < \frac{2M_{r-1}}{\ln(1+\alpha n)} \cdot A.$$

Оцінивши величину $\left|g_p - \hat{f}_{rn}\right|$ з урахуванням теореми 1, маємо:

$$\left|g_p - \hat{f}_{rn}\right| \le \left|g_p - \hat{f}_{(r-1)n}\right| + \left|\hat{f}_{rn} - \hat{f}_{(r-1)n}\right| < \frac{2(2+\delta)}{\delta\cos\theta} \cdot \frac{1}{\ln(1+\alpha n)}.$$

З оцінок, наведених вище, а також із формул (16), випливає, що

$$\left| f_p - \hat{f}_{rn} \right| < \frac{(2+\delta)}{\delta \cos\theta} \cdot (2AK_{r-1} + 2) \cdot \frac{1}{\ln(1+\alpha n)}, \quad p \ge rn .$$

Таким чином,

$$|f_m - f_{rn}| \le \left| f_m - \hat{f}_{rn} \right| + \left| f_{rn} - \hat{f}_{rn} \right| < \frac{(2+\delta)}{\delta \cos\theta} \cdot 4\left(AK_{r-1} + 1\right) \cdot \frac{1}{\ln(1+\alpha n)} =$$

$$= \frac{(2+\delta)}{\delta \cos\theta} \cdot K_r \cdot \frac{1}{\ln(1+\alpha n)} = \frac{M_r}{\ln(1+\alpha n)}, \quad m \ge rn ,$$

де $M_r = \dfrac{2+\delta}{\delta \cos} K_r$, $K_r = 4\left(AK_{r-1} + 1\right)$.

Отже, для підхідних дробів f_k N-вимірних ГЛД (2), де N – довільне фіксоване натуральне число, справджується оцінка

$$|f_m - f_{Nn}| < \frac{M_N}{\ln(1+\alpha n)}, \quad m \ge Nn ,$$

де $M_N = \dfrac{2+\delta}{\delta \cos\theta} K_N$, $N \ge 1$, $K_1 = 1$, $K_2 = 2(A+2)$, $K_N = 4(K_{N-1}A + 1)$, $N \ge 3$.

Теорему доведено. ♦

Зауваження 1. Твердження теореми залишається правильним , якщо умови (12) замінити умовами

а) $\Re\left(b_{i(k)}\right) > 0$;

б) $\begin{cases} \Im\left(b_{i(2\ell)}\right) > 0, \\ \Im\left(b_{i(2\ell+1)}\right) < 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} \Im\left(b_{i(2\ell)}\right) < 0, \\ \Im\left(b_{i(2\ell+1)}\right) > 0, \end{cases}$ $\ell = 1, 2, \ldots .$

1. *Антонова Т. М.* Швидкість збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Волин. мат. вісн. – 1999. – Вип. 6. – С. 5–11.
2. *Антонова Т. М., Боднар Д. І.* Області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Теорія наближення функцій та її застосування: Праці Ін-ту математики НАН України. – 2000. – **31**. – С. 19–32.
3. *Баран О. Є.* Деякі кругові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 3. – С. 7–14.
   Те саме: *Baran O. E.* Some circular regions of convergence for branched continued fractions of a special form // J. Math. Sci. – 2015. – **205**, No. 4. – P. 491–500. – https://doi.org/10.1007/s10958-015-2262-3
4. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
5. *Боднар Д. І., Бубняк М. М.* Оцінки швидкості поточкової та рівномірної збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 4. – С. 24–32.
   Те саме: *Bodnar D. I., Bubnyak M. M.* Estimates of the rate of pointwise and uniform convergence for one-periodic branched continued fractions of a special form // J. Math. Sci. – 2015. – **208**, No. 3. – P. 289–300.
   https://doi.org/10.1007/s10958-015-2446-x
6. *Боднар Д. І., Кучмінська Х. Й.* Аналог теореми Ван Флека для двовимірних неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42,** № 4. – С. 21–25.
7. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
   Те саме: *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. – Reading, MA.: Addison-Wesley Publ. Co., 1980. – xxix+428 p. – Encyclopedia Math. Appl. – Vol. 11.
8. *Дмитришин Р. І., Баран О. Є.* Деякі типи гіллястих ланцюгових дробів, відповідних до кратних степеневих рядів // Теорія наближення функцій та її застосування: Праці Ін-ту математики НАН України. – 2000. – **31**. – С. 82–92.

9. *Дмитришин Р. І.* Приєднані гіллясті ланцюгові дроби з двома нерівнозначними змінними // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 9. – С. 1175–1184.
Те саме: *Dmytryshyn R. I.* Associated branched continued fractions with two independent variables // Ukr. Math. J. – 2015. – **66**, No. 9. – P. 1312–1323. – https://doi.org/10.1007/s11253-015-1011-6
10. *Сусь О. М.* Про оцінку швидкості збіжності двовимірних неперервних дробів з комплексними елементами // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2008. – Вип. 6. – С. 115–123.
11. *Bodnar D. I., Bilanyk I. B.* Convergence criterion for branched continued fractions of the special form with positive elements // Карпат. мат. публікації. – 2017. – **9**, № 1. – P. 13–21. – https://doi.org/10.15330/cmp.9.1.13-21
12. *Dmytryshyn R. I.* On the convergence criterion for branched continued fractions with independent variables // Карпат. мат. публікації. – 2017. – **9**, № 2. – P. 120–127. – https://doi.org/10.15330/cmp.9.2.120-127
13. *Gragg W. B., Warner D. D.* Two constructive results in continued fractions // SIAM J. Numer. Anal. – 1983. – **20,** No. 6. – P. 1187–1197.
https://doi.org/10.1137/0720088
14. *Kuchminska Kh. Yo.* A Worpitzky boundary theorem for branched continued fractions of the special form // Карпат. мат. публікації. – 2016. – **8**, № 2. – P. 272–278. – https://doi.org/10.15330/cmp.8.2.272-278
15. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions. – Vol. 1: Convergence theory. – Amsterdam – Paris: Atlantis Press/Word Scientific, 2008. – xii+308 p.
16. *Van Vleck E. B.* On the convergence of continued fractions with complex elements // Trans. Amer. Math. Soc. – 1901. – **2**, No. 3. – P. 215–233.
https://doi.org/10.2307/1986206
17. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. – New York: Van Nostrand Co., 1948. – xiii+433 p.

О СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В УГЛОВЫХ ОБЛАСТЯХ

Исследованы угловые области сходимости ветвящихся цепных дробей специального вида с комплексными частными знаменателями. Используя достаточный признак сходимости этих дробей с положительными элементами и теорему Стилтьеса – Витали, установлен многомерный аналог признака сходимости ван Флека для непрерывных дробей, а также другие достаточные признаки сходимости при наложении дополнительных условий на элементы дроби. В этих угловых областях получены оценки скорости сходимости ветвящихся цепных дробей специального вида.

ON CONVERGENCE OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS OF THE SPECIAL FORM IN ANGULAR DOMAINS

The angular domains of convergence of branched continued fractions of the special form with complex partial denominators are investigated. Using the sufficient criterion of convergence of these fractions with positive elements and the Stieltjes – Vitaly theorem, a multidimensional analogue of van Vleck convergence criterion of continued fractions is established as well as some other sufficient convergence criteria when additional conditions are imposed on the elements of the fractions. The estimates for the rate of convergence in such angular regions for branched continued fractions of a special form are obtained.

[1] Тернопільськ. нац. економ. ун-т, Тернопіль,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
08.02.17