УДК 517.927.6 +517.984.52

Я. О. Баранецький, П. І. Каленюк

НЕЛОКАЛЬНА БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА З КРАТНИМ СПЕКТРОМ ДЛЯ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПОРЯДКУ $2n$

Досліджено спектральні властивості несамоспряженої задачі для оператора диференціювання порядку $2n$ з нелокальними умовами, що є збуреннями регулярних, але не сильно регулярних умов, які узагальнюють умови періодичності. Вивчено випадки задач з регулярними та нерегулярними за Біркгофом збуреними крайовими умовами. Побудовано систему кореневих функцій багатоточкової задачі. Встановлено достатні умови, за яких ця система є повною та при деяких додаткових припущеннях утворює базис Рісса.

Вступ. При побудові розв'язків багатьох нестаціонарних задач методом Фур'є або його аналогами важливою є базисність (умовна, безумовна, за Ріссом) системи кореневих функцій відповідної крайової задачі. Тому ця властивість є предметом інтенсивних досліджень.

Спектральні властивості крайових задач із сильно регулярними за Біркгофом умовами досліджувалися у працях [8, 9, 12]. У [3, 4, 20] було запропоновано поняття приведеної системи кореневих функцій задачі, а також поняття суттєво несамоспряженого оператора (оператора, система кореневих функцій якого містить нескінченне число приєднаних) і вивчено властивості таких операторів. Задачі з нерегулярними за Біркгофом умовами вивчались у працях [16–18, 22, 24–30]. У роботі [18] вивчались крайові задачі з дисипативними крайовими умовами. Праця [19] присвячена аналізу задач з цілком регулярними крайовими умовами. Нелокальні задачі з інтегральними умовами вивчалися в роботі [21]. Властивості крайових задач, для яких системи кореневих функцій є сумовані методом Абеля, аналізувались у працях [10, 15]. У роботах [14, 31] вивчались спектральні властивості задач з умовами періодичності та періодичними коефіцієнтами. В роботах [2, 5, 11] досліджувались проблеми встановлення оцінки швидкості збіжності розвинень в ряд за системою кореневих функцій нелокальної задачі для диференціального рівняння на скінченному інтервалі. Обернені крайові задачі для диференціального рівняння на скінченному інтервалі розглядалися в роботі [6]. Властивості несамоспряжених крайових задач для диференціально-операторних рівнянь вивчались у працях [7, 23].

1. Основні позначення. Нехай

$$H_0 \equiv L_2(0,1),$$

$$W_2^{2n}(0,1) \equiv \{y \in H_0 : y^{(m)} \in C[0,1],\, y^{(2n)} \in H_0,\, m = 0,1,\ldots,2n-1\},$$

$$(y, u;\, W_2^{2n}(0,1)) \equiv \sum_{k=0}^{2n} (y^{(k)}, u^{(k)};\, H_0),$$

$$\|y; W_2^{2n}(0,1)\|^2 \equiv (y, y; W_2^{2n}(0,1)),$$

$W^*(0,1)$ – простір лінійних неперервних функціоналів над $W_2^{2n}(0,1)$; E – тотожне перетворення в просторі H_0; $I : H_0 \to H_0$ – оператор інволюції, $Iy(x) \equiv y(1-x)$; $p_j \equiv \frac{1}{2}(E + (-1)^j I)$ – ортопроектори простору H_0; $H_{0,j} = \{y \in H_0 : y = p_j y\}$, $j = 0,1$; $K_j \equiv \{e^{icx} + (-1)^j e^{ic(1-x)},\, c \in \mathbb{R}\}$; $[H_0]$ – алгебра лінійних обмежених операторів $A : H_0 \to H_0$.

Означення 1. Функцію із простору $H_{0,0}$ ($H_{0,1}$) будемо називати симетричною (антисиметричною) відповідно. Крайову умову будемо називати симетричною, якщо до ядра відповідного функціонала належить довільна функція із K_1 (K_0).

Наприклад, умова $y(0)+y(1)=0$ є симетричною. Аналогічно, антисиметричною є умова $y(0)-y(1)=0$.

Вивчається багатоточкова задача

$$L_0 y \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x) = f(x), \qquad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$\ell_j y \equiv y^{(j-1)}(0) + (-1)^j y^{(j-1)}(1) + \sum_{s=0}^{r} \sum_{m=0}^{k_j} b_{j,m,s} y^{(m)}(x_s) = 0, \tag{2}$$

$$\ell_{n+j} y \equiv y^{(n+j-1)}(0) - (-1)^{n+j} y^{(n+j-1)}(1) = 0, \tag{3}$$

$$b_{j,m,s} \in \mathbb{R}, \;\; s = 0,1,\ldots,r, \;\; m = 0,1,\ldots,k_j, \;\; j = 1,2,\ldots,n. \tag{4}$$

2. Крайова самоспряжена задача. Розглянемо для рівняння (1) задачу з крайовими умовами

$$\ell_{0,j} y \equiv y^{(j-1)}(0) + (-1)^j y^{(j-1)}(1) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n, \tag{5}$$

$$\ell_{0,n+j} y \equiv y^{(n+j-1)}(0) - (-1)^{n+j} y^{(n+j-1)}(1) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{6}$$

Нехай L_0 – оператор задачі (1), (5), (6),

$$L_0 y \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x), \quad y \in D(L_0) \subset W_2^{2n}(0,1),$$

$$D(L_0) \equiv \{ y \in W_2^{2n}(0,1) : \ell_{0,j} y = 0, \;\; j = 1,2,\ldots,2n \}.$$

Зауваження 1. Крайові умови (2)–(4) вибрано так, що $n = 2\beta + 1$ для деякого $\beta \in \mathbb{N}$. Тому справджуються співвідношення

$$\ell_{0,j} \in W_1^*(0,1), \quad \ell_{0,n+j} \in W_0^*(0,1), \quad j = 1,2,\ldots,n,$$

де $W_0^*(0,1)$ та $W_1^*(0,1)$ – відповідно сукупність симетричних та асиметричних функціоналів із $W^*(0,1)$.

Розглянемо для оператора L_0 задачу на власні значення

$$L_0 y - \lambda y = 0, \quad \ell_{0,j} y = 0, \quad j = 1,2,\ldots,2n. \tag{7}$$

Нехай виконується

Припущення B_1:

$$B_1 : n = 2\beta + 1.$$

Теорема 1. *За припущення B_1 усі власні значення оператора L_0, відмінні від нуля, мають парну кратність.*

Д о в е д е н н я. Корені ρ_j характеристичного рівняння $(-1)^n \rho^{2n} = \lambda$, $|\arg \rho| \le \frac{1}{2n}\pi$, яке відповідає диференціальному рівнянню (7), визначимо співвідношеннями $\rho_j = \omega_j \rho$, де

$$(\omega_j)^{2n} = (-1)^n = -1, \quad \omega_1 = i, \quad \omega_j = \omega_1 \exp i \frac{1}{n} \pi (j-1),$$

$$j = 2,3,\ldots,n.$$

Розглянемо фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (7)

$$y_j(x,\rho) \equiv e^{\omega_j \rho x} + e^{\omega_j \rho(1-x)} \in H_{0,0}, \quad j = 1,2,\ldots,n, \tag{8}$$

$$y_{n+j}(x,\rho) \equiv e^{\omega_j \rho x} - e^{\omega_j \rho(1-x)} \in H_{0,1}, \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{9}$$

Підставляючи загальний розв'язок

$$y(x,\rho) \equiv \sum_{p=1}^{2n} C_p y_p(x,\rho), \quad C_p \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

диференціального рівняння (7) у крайові умови (5), (6), отримаємо рівняння для визначення власних значень оператора L_0:

$$\Delta(\rho) \equiv \det\left(\ell_{0,r} y_q\right)_{r,q=1,\ldots,2n} = 0.$$

З припущення B_1 та співвідношень (8), (9) маємо рівності

$$\ell_{0,j} y_r(x,\rho) = 0, \quad \ell_{0,n+j} y_{n+r}(x,\rho) = 0, \quad j,r = 1,2,\ldots,n.$$

Тому

$$\Delta(\rho) = \Delta_0(\rho)\Delta_1(\rho) = 0,$$

де

$$\Delta_0(\rho) \equiv \det\left(\ell_{0,n+r} y_q\right)_{r,q=1,\ldots,n} = 0,$$

$$\Delta_1(\rho) \equiv \det\left(\ell_{0,r} y_{n+q}\right)_{r,q=1,\ldots,n} = 0.$$

Враховуючи вигляд крайових умов (5), (6), отримаємо

$$\ell_{0,n+j} y_n(x,\rho) = (\omega_r \rho)^n \ell_{0,j} y_{n+r}(x,\rho),$$

$$\Delta_0(\rho) = \rho^{n^2} \prod_{j=1}^{n} (\omega_j)^n \Delta_1(\rho),$$

$$\Delta_1(\rho) \equiv \rho^{\gamma} \det\left((\omega_r)^{j-1}\left(1 - (-1)^{j-1} e^{\omega_r \rho}\right)\right)_{j,r=1,2,\ldots,n},$$

$$\gamma = \frac{1}{2} n(n-1), \quad q = 0,1,\ldots.$$

Отже,

$$\Delta(\rho) = \rho^{n^2} \prod_{j=1}^{n} (\omega_j)^n \Delta_1^2(\rho) = (-1)^{\beta} i \rho^{n^2} \Delta_1^2(\rho) = 0. \tag{11}$$

Теорему доведено. ♦

Лема 1. *Нехай припущення B_1 справджується. Тоді оператор L_0 є самоспряженим.*

Д о в е д е н н я. З крайової умови (6) при $j = n+1-s$ та умови (5) при $n = s$ отримаємо

$$y^{(2n-s)}(0) = (-1)^{s+1} y^{(2n-s)}(1), \quad y^{(s-1)}(0) = (-1)^{s-1} y^{(s-1)}(1),$$

$$y \in D(L_0), \quad s = 1,2,\ldots,n.$$

Тому

$$y^{(2n-s)}(1) y^{(s-1)}(1) - y^{(2n-s)}(0) y^{(s-1)}(0) = 0, \quad s = 1,2,\ldots,n.$$

Домножимо ці рівності на числа $(-1)^{s-1}$ та додамо при $s = 0,1,\ldots,2n-1$. Отриману суму підставимо у співвідношення

$$\left((-1)^n y^{(2n)}, y; H_0\right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{2n} (-1)^{s-1}\left(y^{(2n-s)}(1)y^{(s-1)}(1) - y^{(2n-s)}(0)y^{(s-1)}(0)\right) +$$

$$+ \left(y, (-1)^n y^{(2n)}; H_0\right).$$

Отже,

$$\left((-1)^n y^{(2n)}, y; H_0\right) = \left(y, (-1)^n y^{(2n)}; H_0\right), \quad y \in D(L_0).$$

Тому оператор L_0 є самоспряженим [13] та існує числова послідовність $\{\rho_q\}_{q=1,\ldots,\infty}$ коренів рівняння (11), які занумеровані в порядку зростання і лежать на півосі $\operatorname{Im}\rho = 0$, $\operatorname{Re}\rho \geq 0$. ♦

Нехай $\lambda_q = (\rho_q)^{2n}$ – відповідні власні значення оператора L_0, $q = 0,1,\ldots$.

Побудуємо систему власних функцій оператора L_0. За елементами систем (8), (9) визначимо функції

$$v_{0,q}(x) \equiv \theta_{0,q} \begin{Vmatrix} y_1(x,\rho_q) & \ldots & y_n(x,\rho_q) \\ \ell_{0,n+2}y_1 & \ldots & \ell_{0,n+2}y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ell_{0,2n}y_1 & \ldots & \ell_{0,2n}y_n \end{Vmatrix}, \quad q = 1,2,\ldots,$$

$$v_{0,q}(x) \equiv$$

$$\equiv \theta_{1,q} \begin{Vmatrix} y_1(x,\rho_q) & \ldots y_r(x,\rho_q)\ldots & y_n(x,\rho_q) \\ \omega_1^n\left(1-e^{\omega_1\rho_q}\right) & \ldots\omega_r^n\left(1-e^{\omega_r\rho_q}\right)\ldots & \omega_n^n\left(1-e^{\omega_n\rho_q}\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\omega_1)^{2n-1}\left(1-e^{\omega_1\rho_q}\right) & \ldots(\omega_r)^{2n-1}\left(1-e^{\omega_r\rho_q}\right)\ldots & (\omega_n)^{2n-1}\left(1-e^{\omega_n\rho_q}\right) \end{Vmatrix},$$

$$q = 1,2,\ldots. \qquad (12)$$

Параметри $\theta_{1,q}$ виберемо так, щоб $\left\| v_{0,q}(x); H_0 \right\| = 1$, $q = 1,2,\ldots$.

Аналогічно визначаємо власні функції $v_{1,q}(x) \in H_{0,0}$:

$$v_{1,q}(x) \equiv \theta_{2,q} \begin{Vmatrix} y_{n+1}(x,\rho_q) & \ldots & y_{2n}(x,\rho_q) \\ \ell_{0,2}y_1 & \ldots & \ell_{0,2}y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ell_{0,n}y_1 & \ldots & \ell_{0,n}y_n \end{Vmatrix}, \quad q = 0,1,\ldots, \qquad (13)$$

де параметри $\theta_{2,q}$ вибираємо таким чином, щоб виконувались умови $\left\| v_{1,q}(x, L_0); H_0 \right\|^2 = 1$, $q = 1,2,\ldots$.

Нормовані власні функції оператора L_0, які відповідають власному значенню $\lambda_0 = 0$ кратності β, визначимо рівностями

$$v_{0,0}(x) = 1, \quad v_{0,1}(x) = \sqrt{3}(2x-1)^2, \ldots,$$

$$v_{0,\beta}(x) \equiv \sqrt{2n-1}(2x-1)^{n-1}. \tag{14}$$

Отже, система

$$V(L_0) \equiv \{v_{j,q}, v_{0,r}(x, L_0) \in H_0 : \ r = 1,2,\dots,\beta, \ \ j = 0,1, \ \ q = 1,2,\dots\}$$

власних функцій оператора L_0 є ортонормованим базисом простору H_0.

Зауваження 2. Системи функцій

$$V_0(L_0) \equiv \{v_{r,0}(x), v_{0,q}(x) \in H_0, \ \ r = 1,2,\dots,\beta, \ \ q = 1,2,\dots\},$$

$$V_1(L_0) \equiv \{v_{1,q}(x) \in H_0, \ q = 1,2,\dots\}$$

є ортономованими базисами в просторах $H_{0,0}$, $H_{0,1}$ відповідно.

Подамо визначники (12), (13) співвідношеннями

$$v_{1,q}(x) \equiv \theta_{2,q} \sum_{r=1} \Delta^1_{1,r}(\rho_q) y_{n+r}(x, \rho_q),$$

$$v_{0,q}(x) \equiv \theta_{4,q} \sum_{r=1} \Delta^0_{1,r}(\rho_q) y_r(x, \rho_q),$$

$$\Delta^0_{1,r}(\rho_q) \equiv$$

$$\equiv \begin{Vmatrix} \omega_1^n\left(1-e^{\omega_1\rho_q}\right) & \dots \omega_{r-1}^n\left(1+e^{\omega_{r-1}\rho_q}\right)\omega_{r+1}^n\left(1+e^{\omega_{r+1}\rho_q}\right)\dots & \omega_n^n\left(1+e^{\omega_n\rho_q}\right) \\ \omega_1^{n+1}\left(1+e^{\omega_1\rho_q}\right) & \dots \omega_{r-1}^{n+1}\left(1-e^{\omega_{r-1}\rho_q}\right)\omega_{r+1}^{n+1}\left(1-e^{\omega_{r+1}\rho_q}\right)\dots & \omega_n^{n+1}\left(1-e^{\omega_n\rho_q}\right) \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{2n-1}\left(1+e^{\omega_1\rho_q}\right) & \dots \omega_{r-1}^{2n-1}\left(1+e^{\omega_{r-1}\rho_q}\right)\omega_{r+1}^{2n-1}\left(1+e^{\omega_{r+1}\rho_q}\right)\dots & \omega_n^{2n-1}\left(1+e^{\omega_n\rho_q}\right) \end{Vmatrix},$$

$$q = 1,2,\dots,$$

$$\Delta^1_{1,r}(\rho_q) = (-1)^{r-1}\Delta^0_{1,r}(\rho_q), \ \ r = 1,2,\dots,n, \ q = 1,2,\dots.$$

Нехай

$$y_{1,r}(x, \rho_q) \equiv \omega_r(1-2x) y_{n+r}(x, \rho_q) \in H_{0,0}, \quad r = 1,2,\dots,n, \tag{15}$$

$$y_{1,n+r}(x, \rho_q) \equiv \omega_r(1-2x) y_r(x, \rho_q) \in H_{0,1}, \quad r = 1,2,\dots,n, \tag{16}$$

$$y_{2,1}(x, \rho_q) \equiv \sum_{j=1}^{n} \Delta_{1,j}(\rho_q) y_{1,j}(x, \rho_q),$$

$$y_{2,r}(x, \rho_q) \equiv y_r(x, \rho_q) \in H_{0,0}, \quad r = 2,3,\dots,n,$$

$$y_j(x, \rho_q) \equiv y_{1,j}(x, \rho_q), \quad j = 2,3,\dots,n.$$

Безпосередньою підстановкою отримуємо співвідношення

$$L_0 y_{2,1}(x, \rho_q) = \lambda_q y_{2,1}(x, \rho_q) + \xi_{0,q} v_{1,q}(x),$$

$$\xi_{0,q} = -4n(\rho_q)^{2n-1}(\theta_{4,q}\omega_1)^{-1}, \quad q = 1,2,\dots.$$

3. Нелокальні крайові задачі.

Для довільних $p \in \{1,2,\dots,n\}$, $k \in \{0,1,\dots,2n-1\}$, $b \in \mathbb{R}$, розглянемо крайову задачу

$$(-1)^n y^{(2n)}(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{17}$$

$$\ell_{1,j} y \equiv y^{(j-1)}(0) + (-1)^j y^{(j-1)}(1) = 0, \quad j \neq p, \ j = 1,2,\dots,n, \tag{18}$$

$$\ell_{1,p}y \equiv y^{(p-1)}(0) + (-1)^p y^{(p-1)}(1) + \ell_k^1 y = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n\,, \tag{19}$$

$$\ell_{1,n+j}y \equiv y^{(n+j-1)}(0) - (-1)^{n+j} y^{(n+j-1)}(1) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n\,, \tag{20}$$

де

$$\ell_k^1 y \equiv b\left(y^{(k-1)}(0) - (-1)^k y^{(k-1)}(1)\right). \tag{21}$$

Нехай L_1 − оператор задачі (17)−(21),

$$L_1 y \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x), \quad y \in D(L_1) \subset W_2^{2n}(0,1)\,,$$

$$D(L_1) \equiv \{y \in W_2^{2n}(0,1) : \ell_{1,j}y = 0,\ j = 1,2,\ldots,2n\}\,,$$

$V(L_1)$ − система кореневих функцій оператора L_1.

Для будь-якого власного значення λ_q та відповідної власної функції $v_{0,q}(x,L_1) \in D(L_1)$ кореневою (приєднаною) функцією першого порядку оператора L_1 будемо називати функцію $v_{1,q}(x,L_1) \in D(L_1)$, яка при деякому $c \in \mathbb{C}$ є розв'язком диференціального рівняння $(-1)^n y^{(2n)}(x) - \lambda_q y(x) = = c v_{0,q}(x,L_1)$.

Аналогічно визначимо кореневі функції ($j+1$)-го порядку:

$$(-1)^n v_{j+1,q}^{(2n)}(x,L_1) - \lambda_q v_{j+1,q}(x,L_1) = c v_{j,q}(x,L_1), \quad q = 1,2,\ldots.$$

Теорема 2. *Для довільних* $p \in \{1,2,\ldots,n\}$, $k \in \{0,1,\ldots,2n-1\}$, $b \in \mathbb{R}$

1°) *власні значення операторів* L_0 *та* L_1 *співпадають*;

2°) *система* $V(L_1)$ *є повною та мінімальною в просторі* H_0.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що власні значення операторів L_0 та L_1 співпадають.

Підставляючи загальний розв'язок (10) диференціального рівняння (7) у крайові умови (18)−(21), отримуємо систему порядку $2n$, матриця коефіцієнтів якої має мінор порядку n, усі елементи $\ell_{1,n+j}y_{1,s}(x,\rho_q)$ якого дорівнюють нулю при $j,s = 1,2,\ldots,n$. Тому

$$\det(\ell_{1,j}y_r)_{j,r=1,\ldots,2n} = \det(\ell_{0,j}y_r)_{j,r=1,\ldots,n} \det(\ell_{0,n+j}y_{n+r})_{j,r=1,\ldots,n} =$$

$$= \det(\ell_{0,j}y_r)_{j,r=1,\ldots,2n}\,.$$

Визначимо кореневі функції оператора L_1. Безпосередньою підстановкою можна переконатися, що $v_{r,0}(x), v_{0,q}(x) \in D(L_1)$, $r = 1,2,\ldots,\beta$, $q = 1,2,\ldots$.

Отже, оператор L_1 має власні функції

$$v_{r,0}(x,L_1) \equiv v_{r,0}(x), \quad v_{0,q}(x,L_1) \equiv v_{0,q}(x)\,,$$

$$r = 1,2,\ldots,\beta, \quad q = 1,2,\ldots. \tag{22}$$

Визначимо рядки квадратної матриці $B_{p,j}(x,\rho_q) \equiv (\beta_{r,s}^{p,j})_{r,s=1}^n$ порядку n такими співвідношеннями: p-й рядок складається з функцій $y_{1,s}(x,\rho_q)$, $s = 1,2,\ldots,n$, елементи інших рядків є числами,

$$\beta_{r,s}^{p,j}(\rho_q) \equiv (\rho_q\omega_s)^{1-r}\,\ell_{0,r}y_j^s(x,\rho_q), \quad r \neq p, \quad s,r = 1,2,\ldots,n.$$

Зауваження 3. Беручи до уваги формули (15), (16), отримуємо вирази

$$\beta_{r,s}^{p,j}(\rho_q) = 2\omega_s^{r-1}\left(1 + (-1)^{r-1} e^{\omega_s \rho_q}\right),$$

$$s \neq j, \quad r \neq p, \quad j = 1,2,\dots,n, \quad q = 1,2,\dots,$$

$$\beta_{r,s}^{p,j}(\rho_q) = 2\omega_s^{r-1}\left(1 + (-1)^{r-1} e^{\omega_s \rho_q}\right) + \vartheta_{p,s,r,q}\rho_q^{-1},$$

$$s = j, \quad r \neq p, \quad j = 1,2,\dots,n, \quad q = 1,2,\dots,$$

$$v_{p,s,r,q} = 2(r-1)\omega_s^{-1}(1 + (-1)^{r-2} e^{\omega_s \rho_q}), \quad q = 1,2,\dots .$$

Нехай

$$y_{3,p}(x,\rho_q) \equiv \det B_{0,p}(x,\rho_q), \quad q = 1,2,\dots, \tag{23}$$

$$\Delta_{0,p}(\rho_q) \equiv \ell_{1,p} y_{3,p}(x,\rho_q) = \ell_{0,p} y_{3,p}(x,\rho_q), \quad q = 1,2,\dots .$$

Підстановкою функції (23) в крайові умови (18)–(21) отримуємо співвідношення

$$\ell_{1,j} y_{3,p}(x,\rho_q) = \ell_{0,j} y_{3,p}(x,\rho_q)\delta_{j,p} = \Delta_{0,p}(\rho_q)\delta_{j,p},$$

$$\delta_{j,p} = 0, \ j \neq p, \qquad \delta_{j,p} = 1, \ j = p,$$

$$j,p = 1,2,\dots,n.$$

Приєднану функцію оператора L_1 визначимо формулою

$$v_{1,q}(x,L_1) \equiv v_{1,q}(x) + c_{p,k}(\rho_q) y_{3,p}(x,\rho_q), \quad q = 1,2,\dots . \tag{24}$$

Підставляючи праву частину рівності (24) в крайові умови (18)–(21), визначаємо невідоме значення

$$c_{p,k}(\rho_q) = -\ell_{p,k}^1 v_{1,q}(x)\Delta_{0,p}^{-1}(\rho_q), \quad q = 1,2,\dots .$$

Зауваження 4. При $q \to \infty$ для послідовності $\Delta_{1,p}^0(\rho_q)$ справджується співвідношення

$$\left|\Delta_{1,p}^0(\rho_q)\right| = \left(W(1,\omega_2,\dots,\omega_n) + e^{i\rho_q} W(-1,\omega_2,\dots,\omega_n)\right)\left(1 + O(q^{-1})\right),$$

де $W_s(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n)$ – визначник Вандермонда порядку $0,1,\dots,n-1$, побудований за числами $(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n)$.

Тому справджується оцінка

$$0 < C_1 \le \left|\Delta_{0,p}(\rho_q)\right| \le C_2 < \infty, \quad q = 1,2,\dots .$$

Беручи до уваги формулу (16), отримуємо співвідношення

$$c_{p,k}(\rho_q) = -2b(\rho_q)^{k-p}\Delta_{1,p,k}(\rho_q), \quad q = 1,2,\dots, \tag{25}$$

де $\Delta_{1,p,k}(\rho_q)$ – визначник матриці, елементи першого рядка якої визначаються виразами $(\omega_r)^k\left(1 - (-1)^k e^{\omega_r \rho_q}\right)$, $r = 1,2,\dots,n$, а інші рядки співпадають з відповідними рядками визначника (14).

Зауваження 5. При $q \to \infty$ для послідовності $\Delta_{1,p,k}(\rho_q)$ справджується співвідношення $\Delta_{1,p,k}(\rho_q) = \left(W_k(1,\omega_2,\dots,\omega_n) + e^{i\rho_q} W_k(-1,\omega_2,\dots,\omega_n)\right)\left(1 + O(q^{-1})\right)$, де $W_s(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n)$ – узагальнений визначник Вандермонда порядків $0,1,\dots,n-s-1,n-s+1,\dots,n-1$, побудований за числами $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n$. Тому справджується оцінка

$$0 < C_1 \le \left|\Delta_{1,p,k}(\rho_q)\right| \le C_2 < \infty .$$

Отже, оператор L_1 має систему функцій $V(L_1)$, кореневих в сенсі рівностей

$$L_1 v_{1,q}(x,L_1)(x) - \lambda_q v_{1,q}(x,L_1) = \xi_{1,p,q} v_{0,q}(x,L_1) ,$$

$$L_1 v_{0,q}(x,L_1)(x) - \lambda_q v_{1,q}(x,L_1) = 0 .$$

Таким чином, оператор L_1 має кореневі функції, які визначаються формулами (22), (24), (25).

Для задачі (17)–(21) існує спряжена задача [13]. Із кореневих функцій оператора спряженої задачі можна побудувати систему $W(L_1)$, яка буде біортогональною до системи $V(L_1)$. Тому система $V(L_1)$ є повною та мінімальною в просторі H_0. Теорему доведено. ♦

4. Оператори перетворення. Нехай $G \equiv \{g_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$ – послідовність функцій з множини $C^{\infty}(0,1)$ з властивістю

$$g_q(x) \equiv g_q(1-x), \quad g_q^{(m)}(x) \equiv (-1)^m g_q^{(m)}(1-x) ,$$

$$x \in [0,1], \quad q,m = 1,2,\ldots .$$

Розглянемо систему функцій

$$Z(G) \equiv \{z_{k,q}(x) : r = 1,2,\ldots,\beta,\ r = 0,1,\ q = 1,2,\ldots\} ,$$

де

$$z_{r,0}(x) \equiv v_{r,0}(x), \quad r = 0,1,\ldots,\beta ,$$

$$z_{0,q}(x) \equiv v_{0,q}(x), \quad z_{1,q}(x) \equiv v_{0,q}(x) + g_q(x), \quad q = 1,2,\ldots . \qquad (26)$$

Для кожної системи $Z(G) \subset H_0$ визначимо оператор $R_G(L_0) = E + S_G(L_0)$, який відображає елементи системи $V(L_0)$ у відповідні елементи системи $Z(G)$:

$$z_{r,0}(x) \equiv R_G(L_0) v_{r,0}(x), \quad r = 0,1,\ldots,\beta , \qquad (27)$$

$$z_{r,q}(x) \equiv R_G(L_0) v_{r,q}(x), \quad r = 0,1, \quad q = 1,2,\ldots . \qquad (28)$$

Нехай $\Gamma_1(L_0)$ – сукупність всеможливих систем $Z(G)$, елементи яких визначені формулами (25), (28); $Q(L_0)$ – сукупність операторів R_G, $Q_c(L_0) \equiv Q(L_0) \cap [H_0]$.

Лема 2. *Будь-яка система функцій* $Z(G)$, *елементи якої визначені формулами* (26), *є повною та мінімальною в просторі* H_0

Д о в е д е н н я. Від супротивного доведемо, що $Z(G)$ є повною (тотальною) в просторі H_0.

Нехай існує функція $h = h_0 + h_1$, $h_j \in H_{0,j}$, $j = 0,1$, з властивістю

$$\left(h, v_{k,q}(x,G); H_0\right) = 0, \quad k = 1,2,\ldots,\beta, \ q = 0, \ k = 0,1, \ q = 1,2,\ldots . \qquad (29)$$

Беручи до уваги формулу (27) та зауваження 3, отримаємо $h_0 \equiv 0$, $h = h_1$.

Тому з означення функцій (26) та припущення (29) маємо рівності

$$\left(h, v_{1,q}(x,G); H_0\right) = \left(h, v_{1,q}(x); H_0\right) = 0, \quad q = 1,2,\ldots .$$

Застосовуючи зауваження 3, отримуємо $h = 0$.

Отже, система $Z(G)$ є тотальною (повною). Тому вона є мінімальною в просторі H_0. Лему доведено. ♦

Множення операторів є комутативним. Тому правильною є наступна

Лема 3. $Q(L_0)$ *є абелевою групою операторів відносно множення, яка містить абелеву групу* $Q_c(L_0) \equiv Q(L_0) \bigcap [H]$.

Нехай $\{u_q\} \subset \mathbb{R}$ – обмежена послідовність $\left|u_q\right| \le C_3 < \infty$, $q = 1,2,\ldots$.

Розглянемо частковий випадок системи $Z(G)$, коли $z_{1,q}(x) \equiv$ $\equiv (1-2x)u_k v_{1,q}(x)$, $q = 1,2,\ldots$.

Лема 4. *Для будь-якої обмеженої послідовності* $\{u_q\}_{q=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *система* $Z(G)$ *є базисом Рісса простору* H_0.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що оператор R_G є обмеженим.

Для будь-якого $h = \sum\limits_{j,k}\left(h, v_{j,k}(x); H_0\right) v_{j,k}(x)$ оцінимо норму функції $f = R_G h$ в просторі H_0.

Отже,

$$f = \sum_{j,k}\Big[\left(h, v_{j,k}(x); H_0\right) v_{j,k}(x) + \left(h, v_{1,k}(x); H_0\right)(1-2x) v_{1,k}(x)\Big],$$

$$\left\|f; H_0\right\|^2 \le \sum_{j,k}\left(h, v_{1,k}(x); H_0\right)^2 + 2C_3^2\left\|h; H_0\right\|^2 \le C_1\left\|h; H_0\right\|^2, \quad C_4 = 1 + 2C_3^2.$$

Беручи до уваги теорему Н. К. Барі [1], отримуємо твердження леми. ♦

5. Крайова задача з регулярними за Біркгофом умовами.

Нехай L_2 є частковим випадком оператора L_1 при $k = p$, $V(L_2)$ – система кореневих функцій оператора L_2, які визначаються співвідношеннями

$$v_{r,0}(x, L_2) \equiv v_{r,0}(x), \quad v_{0,q}(x, L_2) \equiv v_{0,q}(x),$$

$$r = 1,2,\ldots,\beta, \quad q = 1,2,\ldots,$$

$$v_{1,q}(x, L_2) \equiv v_{1,q}(x) + c_{p,p}(\rho_q) y_{3,p}(x, \rho_q), \quad q = 1,2,\ldots . \tag{30}$$

Підставляючи рівність (30) у крайову умову (19), визначаємо невідоме значення

$$c_p(\rho_q) \equiv c_{p,p}(\rho_q),$$

$$c_p(\rho_q) \equiv -\ell^1_{p,p} v_{1,q}(x) \Delta^{-1}_{0,p}(\rho_q), \quad q = 1,2,\ldots . \tag{31}$$

Теорема 3. *Для будь-яких* $p \in \{1,2,\ldots,n\}$, $b \in \mathbb{R}$ *система* $V(L_2)$ *є базисом Рісса в просторі* H_0.

Д о в е д е н н я. Беручи до уваги визначення чисел $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, отримуємо співвідношення

$$\Delta_{0,p}(\rho_q) \equiv \ell_{1,p} y_{3,p}(x, \rho_q) = \ell_{0,p} y_{3,p}(x, \rho_q),$$

$$\Delta_{0,p}(\rho_q) = (\rho_q)^{p-1} W(\omega_1, \ldots, \omega_n)(1 + O(q^{-1})), \quad q \to \infty, \tag{32}$$

де $W(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ – визначник Вандермонда порядків $0, 1, \ldots, n-1$, побудований за числами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Тому послідовність $\{c_p(\rho_q)\}$, визначена формулою (31), є обмеженою.

Нехай $\beta^1(\rho_q) \equiv \det(\beta_{j,r}(\rho_q))_{j,r=2,3,\ldots,n}$ – обмежена послідовність.

Розглянемо функції

$$\psi_p(x, \rho_q) = c_{p,q} y_{3,p}(x, \rho_q) - c_{1,p}(\rho_q) v_{1,q}(x), \quad q = 1, 2, \ldots. \tag{33}$$

Враховуючи розвинення функцій $y_{3,p}(x, \rho_q)$, $y_{1,p}(x, \rho_q)$, $v_{1,q}(x)$ та рівності (33) для функцій $\psi_p(x, \rho_q)$, отримаємо формули

$$\psi_p(x, \rho_q) = \sum_{r=2}^{n} \alpha_{0,r,p}(\rho_q) y_r(x, \rho_q) + \alpha_{1,r,p}(\rho_q)(1-2x) y_{n+r}(x, \rho_q),$$

де $\alpha_{0,r,p}(\rho_q)$, $\alpha_{1,r,p}(\rho_q)$ – обмежені числа.

Беручи до уваги визначення чисел $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, отримуємо співвідношення

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left\| \psi_p(x, \rho_q); H_0 \right\|^2 < \infty.$$

Отже, повна та мінімальна в просторі H_0 система функцій $V(L_2)$ є квадратично близькою до базису Рісса $Z(G)$ цього простору.

Застосовуючи теорему Н. К. Барі [1], отримаємо твердження теореми. ♦

Нехай $\{g_{3,q}(x)\}_{q=1}^{\infty}$ – послідовність функцій з множини $C^{\infty}(0,1)$, визначена співвідношеннями

$$g_{3,q}(x) \equiv v_{1,q}(x, L_2) - v_{1,q}(x), \quad q = 1, 2, \ldots.$$

Для будь-якої послідовності дійсних чисел $\{\varphi_q\}_{q=1}^{\infty}$ розглянемо системи функцій $G_\varphi \equiv \{g_{3,q}(x),\ q = 1, 2, \ldots\}$ та $V(G_\varphi) \equiv \{v_{r,q}(x, G_\varphi),\ q = 0, 1, \ldots\}$, де

$$v_{r,0}(x, G_\varphi) \equiv v_{r,0}(x, G_\varphi),$$

$$v_0(x, L_2, \rho_q) \equiv v_{0,q}(x, L_0),$$

$$v_1(x, G_\varphi, \rho_q) \equiv v_{1,q}(x, G_\varphi) + \varphi_q y_{3,q}(x)$$

та відповідний оператор перетворення $R(G_\varphi) = E + S(G_\varphi) \in Q(L_0)$.

Комутативну групу операторів $R(G_\varphi)$ позначимо як $Q_{1,p}(L_0) \subset Q(L_0)$.

Лема 5. *Для будь-якої обмеженої послідовності дійсних чисел $\{\varphi_q\}_{q=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ система функцій $V(G_\varphi)$ є базисом Рісса в просторі H_0.*

Д о в е д е н н я. Нехай $|\varphi_q| \le C_5 < \infty$. Тоді для будь-якої функції $h \in H_0$, $f \equiv R(Z_\varphi)h$, маємо нерівність

$$C_6 \|h; H_0\|^2 \le \sum_{j,k} \left| (h, v_{j,k}(x, L_2); H_0) \right|^2 \le C_7 \|h; H_0\|^2.$$

Тому

$$\sum_{j,k} \left| (h, v_{j,k}(x, Z(\varphi), \rho_q); H_0) \right|^2 \le C_8 \|h; H_0\|^2,$$

$$C_8 = 2(C_5+1)^2 \left\| R(Z_\varphi);[H_0] \right\|^2 .$$

Отже, оператори $R(Z_\varphi)$, $R^{-1}(Z_\varphi) : H_0 \to H_0$ є обмеженими. Застосовуючи теорему Н. К. Барі (див. [1]), отримуємо твердження леми. ♦

6. Багатоточкова задача для диференціального рівняння. Розглянемо багатоточкову задачу

$$(-1)^n y^{(2n)}(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{34}$$

$$\ell_{3,j} y \equiv y^{(j-1)}(0) + (-1)^j y^{(j-1)}(1) = 0, \quad j = 1,2,\dots,n, \tag{35}$$

$$\ell_{3,n+p} y \equiv y^{(n+p-1)}(0) + (-1)^{n+p} y^{(n+p-1)}(1) + \ell_p^2 y = 0, \tag{36}$$

$$\ell_{3,n+j} y \equiv y^{(n+j-1)}(0) + (-1)^j y^{(n+j-1)}(1) = 0, \quad j \neq p,\ j = 1,2,\dots,n, \tag{37}$$

де

$$\ell_p^2 y = \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=0}^{k_p} b_{p,m,j} y^{(m)}(x_s). \tag{38}$$

Розглянемо такі припущення.

Припущення B_2:

$$B_2: \quad x_j = 1 - x_{r-j},\ b_{p,m,j} = (-1)^m b_{p,m,r-j},$$

$$j = 0,1,\dots,r, \quad m = 0,1,\dots,k_p, \quad p = 1,2,\dots,n.$$

Припущення B_3:

$$B_3: \quad k_p \le p-1,\ p = 1,2,\dots,n.$$

Нехай $L \equiv L_{p,m,j}$ − оператор задачі (34)−(38),

$$Ly \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x), \quad y \in D(L),$$

$$D(L) \equiv \{y \in W_2^{2n}(0,1) : \ell_{3,j} y = 0,\ j = 1,2,\dots,2n\},$$

$V(L)$ − система кореневих функцій оператора L.

Теорема 4. *Нехай справджуються припущення* B_1, B_2. *Тоді для довільних* $b_{p,m,j} \in \mathbb{R}$, $m = 0,1,\dots,k_p$, $p \in \{1,2,\dots,n\}$, $x_j \in (0,1)$, $j = 0,1,\dots,r$,

1°) власні значення операторів L_0 *та* L *співпадають;*

2°) система $V(L)$ *є повною та мінімальною в просторі* H_0*;*

3°) якщо додатково виконується припущення B_3*, тоді система* $V(L)$ *є базисом Рісса в просторі* H_0.

Д о в е д е н н я. Перше твердження теореми встановлюється міркуваннями теореми 2.

Безпосередньою підстановкою переконуємось, що

$$v_{r,0}(x,L) \equiv v_{r,0}(x), \quad v_{0,q}(x,L) \equiv v_{0,q}(x), \quad r = 1,2,\dots,\beta, \quad q = 1,2,\dots.$$

Отже, оператор L_3 має власні функції

$$v_{r,0}(x,L) \equiv v_{r,0}(x), \quad v_{0,q}(x,L) \equiv v_{0,q}(x), \quad r = 1,2,\dots,\beta, \quad q = 1,2,\dots. \tag{39}$$

Кореневі функції визначаємо у вигляді суми

$$v_{1,q}(x,L_1) \equiv v_{1,q}(x) + c_{2,p}(\rho_q) y_{3,p}(x,\rho_q), \quad q = 1,2,\dots. \tag{40}$$

Підставляючи цей вираз в умови (36), визначаємо невідомий параметр $c_{2,p}(\rho_q)$:

$$c_{2,p}(\rho_q) = -\ell_p^2 v_{1,q}(x)\Delta_{0,p}^{-1}(\rho_q), \quad q = 1,2,\ldots. \tag{41}$$

Отже, оператор L_3 має кореневі функції (39)–(41).

Система функцій $V(L_3)$ є елементом множини $\Gamma_1(L_0)$. Тому з леми 2 отримуємо друге твердження теореми.

З припущення B_3 маємо оцінку

$$\left|\ell_p^2 v_{1,q}\right| \le C_{11}(\rho_q)^{p-1}, \quad 0 < C_9 < \infty,\ q = 1,2,\ldots.$$

Враховуючи співвідношення (32), отримуємо нерівність

$$\left|\Delta_{0,p}^{-1}(\rho_q)\right| \le C_{10}(\rho_q)^{1-p}, \quad 0 < C_{10} < \infty,\ q = 1,2,\ldots$$

та обмеженість послідовності $\{c_{2,p}(\rho_q)\}_{q=1}^{\infty}$.

Беручи до уваги лему 5, отримуємо третє твердження теореми.

Теорему доведено. ♦

1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – Москва: Наука, 1965. – 448 с.
   Те саме: *Gohberg I. C., Krein M. G.* Introduction to the theory of linear nonself-adjoint operators. – Providence: Amer. Math. Soc., 1969. – xv+378 p.
2. *Ильин В. А.* О связи между видом краевых условий и свойствами базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям несамосопряженного дифференциального оператора // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 9. – С. 1516–1529.
   Те саме: *Il'in V. A.* On a connection between the form of the boundary conditions and the basis property and the property of equiconvergence with a trigonometric series of expansions in root functions of a nonselfadjoint differential operator // Differ. Equat. – 1994. – **30**, No. 9. – P. 1402–1413.
3. *Ильин В. А.* О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1976. – **142**: Сб статей: Теория чисел, математический анализ и их приложения. – С. 148–155.
   Те саме: *Il'in V. A.* Existence of a reduced system of eigen- and associated functions for a nonselfadjoint ordinary differential operator // Proc. Steklov Inst. Math. – 1979. – **142**: Number theory, mathematical analysis and their applications. – P. 157–164. – Zbl 0434.34018.
4. *Ильин В. А., Крицков Л. В.* Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее прил. Темат. обзор. Функц. анализ. – **96**. – Москва: ВИНИТИ, 2006. – С. 5–105.
   Те саме: *Il'in V. A., Kritskov L. V.* Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators // J. Math. Sci. – 2003. – **116**, No. 5. – P. 3489–3550. – https://doi.org/10.1023/A:1024180807502
5. *Кангужин Б. Е., Нурахметов Д. Б., Токмагамбетов Н. Е.* Аппроксимативные свойства систем корневых функций, порождаемых корректно разрешимыми краевыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков // Уфимск. мат. журн. – 2011. – 3, № 3. – С. 80–92.
6. *Кангужин Б. Е., Токмагамбетов Н. Е.* Теорема единственности граничных обратных задач дифференциальных операторов на отрезке // Вестн. КазНУ. Сер. Математика, механика, информатика. – 2014. – **80,** № 1. – С. 54–65.
7. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – Киев: Наук. думка, 1993. – 230 с.
8. *Каленюк П., Баранецький Я., Коляса Л.* Нелокальна крайова задача для оператора диференціювання парного порядку // Зб. наук. праць, присвячений 80-річчю Б. Й. Пташника «Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь». – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017. – С. 91–109.

9. *Кесельман Г. М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. – 1964. – **39**, № 2. – С 82–93.
10. *Костюченко А. Г., Шкаликов А. А.* О суммируемости разложений по собственным функциям дифференциальных операторов и операторов свертки // Функц. анализ и его прил. – 1978.– **12**, № 4. – Р. 24–40.
    Те саме: *Kostyuchenko A. G., Shkalikov A. A.* Summability of eigenfunction expansions of differential operators and convolution operators// Funct. Anal. Its Appl. – 1978. – **12**, No. 4. – P. 262–276. – https://doi.org/10.1007/BF01076380
11. *Ломов И. С.* Оценки скорости сходимости и равносходимости спектральных разложений обыкновенных дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – 15, № 4. – С. 405–418. – https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418
12. *Михайлов В. П.* О базисах Рисса в $\mathfrak{L}_2(0,1)$ // Докл. АН СССР. – 1962. – **144**, № 5. – С. 981–984.
13. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука. 1969. – 526 с.
14. *Ткаченко В. А.* Разложения по собственным функциям, связанные с одномерными периодическими дифференциальными операторами порядка 2n // Функц. анализ и его прил. – 2007. – **41**, № 1. – С. 66–89.
    https://doi.org/10.4213/faa2853
    Те саме: *Tkachenko V.* Eigenfunction expansions associated with one-dimensional periodic differential operators of order 2n // Func. Anal. Its Appl. – 2007. – **41**, No. 1. – P. 54–72. – https://doi.org/10.1007/s10688-007-0005-z
15. *Трушин И. Ю.* О суммируемости разложений по собственным функциям дифференциальных и интегральных операторов // Мат. заметки. – 1993. – **54**, № 3. – С. 114–122.
    Те саме: *Trushin Yu.* Summability of eigenfunction expansions of differential and integral operators // Math. Notes. – 1993. – **54**, No. 3. – P. 951–956.
    https://doi.org/10.1007/BF01209561
16. *Хромов А. П.* Дифференциальный оператор с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. заметки. – 1976. – **19,** № 5. – Р. 763–772.
    Те саме: *Khromov A. P.* Differential operator with irregular splitting boundary conditions // Math. Notes. – 1976. – **19**, No. 5. – P. 451–456.
    https://doi.org/10.1007/BF01142570
17. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям обыкновенных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. сб. – 1966. – **70** (112), № 3. – С. 310–329.
18. *Ширяев Е. А.* Диссипативные краевые условия для обыкновенных дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 2005. – **77**, № 6. – С. 950–954.
    https://doi.org/10.4213/mzm2553
    Те саме: *Shiryaev E. A.* Dissipative boundary conditions for ordinary differential operators// Math. Notes. – 2005. – **77**, No. 5-6. – P. 882–886.
    https://doi.org/10.1007/s11006-005-0092-1
19. *Ширяев Е. А., Шкаликов А. А.* Регулярные и вполне регулярные дифференциальные операторы // Мат. заметки. – 2007. – **81**, № 4. – С. 636–640.
    https://doi.org/10.4213/mzm3708
    Те саме: *Shiryaev E. A., Shkalikov A. A.* Regular and completely regular differential operators // Math. Notes. – 2007. – **81**, No. 3-4. – P. 566–570.
    https://doi.org/10.1134/S0001434607030352
20. *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // Успехи мат. наук. – 1979. – **34**, № 5(209). – С. 235–236.
    Те саме: *Shkalikov A. A.* On the basis problem of the eigenfunctions of an ordinary differential operator // Rus. Math. Surveys. – 1979. – **34**, No. 5. – P. 249–250. – http://dx.doi.org/10.1070/RM1979v034n05ABEH003901
21. *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. – 1982. – № 6. – С. 41–51.
22. *Шкаликов А. А.* О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Функц. анализ и его прил. – 1976. – **10**, № 4. – С. 69–80.
    Те саме: *Shkalikov A. A.* The completeness of eigenfunctions and associated functions of an ordinary differential operator with irregular-separated boundary

conditions // Funct. Anal. Its Appl. – 1976. – **10**, No. 4. – P. 305–316.
https://doi.org/10.1007/BF01076030
23. *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I., Kolyasa L. I., Kopach M. I.* The nonlocal problem for the differential-operator equation of the even order with involution // Карпат. мат. публікації. – 2017. – **9**, No. 2. – P. 109–119.
24. *Freiling G.* Irregular boundary value problems revisited // Results Math. – 2012. – 62, No. 3-4. – P. 265–294. – https://doi.org/10.1007/s00025-012-0281-7
25. *Kandemir M., Mukhtarov O. Sh.* A method on solving irregular boundary value problems with transmission conditions // Kuwait J. Sci. Eng. – 2009. – **36** (2A). – P. 79–99.
26. *Kandemir M., Mukhtarov O., Yakubov Ya.* Irregular boundary value problems with discontinuous coefficients and the eigenvalue parameter // Mediterr. J. Math. – 2009. – **6**, No. 3. – P. 317–338. – https://doi.org/10.1007/s00009-009-0011-x
27. *Locker J.* Eigenvalues and completeness for regular and simply irregular two-point differential operators // Mem. Am. Math. Soc. – 2008. – **195**, No. 911. – viii+177 p.
http://dx.doi.org/10.1090/memo/0911
https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=2437836
28. *Minkin A. M.* Odd and even cases of Birkhoff-regularity // Math. Nachr. – 1995. – **174,** No. 1. – P. 219–230. – https://doi.org/10.1002/mana.19951740115
29. *Minkin A.* Resolvent growth and Birkhoff-regularity // J. Math. Anal. Appl. – 2006. – **323,** No. 1. – P. 387–402. – https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.10.058
30. *Sadybekov M. A., Imanbaev N. S.* Characteristic determinant of a boundary value problem, which does not have the basis property // Eurasian Math. J. – 2017. – **8**, No. 2. – P. 40–46.
31. *Veliev O. A.* On the nonself-adjoint ordinary differential operators with periodic boundary conditions // Israel J. Math. – 2010. – **176,** No. 1. – P. 195–207.
https://doi.org/10.1007/s11856-010-0025-x

НЕЛОКАЛЬНАЯ МНОГОТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА С КРАТНЫМ СПЕКТРОМ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПОРЯДКА $2n$

Исследованы спектральные свойства несамосопряженной задачи для оператора дифференцирования порядка 2n с нелокальными условиями, которые являются возмущениями регулярных, но не сильно регулярных условий, и обобщают условия периодичности. Изучены случаи задач с регулярными и нерегулярными по Биркгофу возмущенными краевыми условиями. Построена система корневых функций многоточечной задачи. Получены достаточные условия, при которых эта система является полной и при некоторых дополнительных предположениях образует базис Рисса.

NONLOCAL MULTIPOINT PROBLEM FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION OF ORDER $2n$ WITH A MULTIPLE SPECTRUM

The spectral properties of a non-self-adjoint problem for a differentiation operator of order 2n with nonlocal conditions that are perturbations of regular but not strongly regular conditions and generalize the conditions for periodicity are investigated. The cases of problems with regular and irregular (in the sense of Birkhoff) perturbed boundary conditions are studied. The system of root functions of the multipoint problem is constructed. Sufficient conditions are obtained under which this system is complete and under certain additional assumptions forms a Riesz basis.

Ін-т прикл. математики та фундам. наук
нац. ун-ту «Львів. політехніка», Львів
Одержано
21.03.17