УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен[1,2], І. П. Мединський[2,3]

КЛАСИЧНИЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА З ДВОМА ГРУПАМИ ПРОСТОРОВИХ ЗМІННИХ ВИРОДЖЕННЯ. І

Для виродженого ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження побудовано класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші. Одержано точні оцінки цього розв'язку та його похідних.

Вступ. Клас рівнянь, який вивчається у цій праці, є природним узагальненням класичного рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова [12]. Це рівняння і його різноманітні узагальнення вивчались багатьма авторами. Лінійні й нелінійні ультрапараболічні рівняння виникають у деяких задачах теорії ймовірностей, математичного моделювання опціонів, у теорії броунівського руху, теорії конвективної дифузії, теорії бінарних електролітів, під час моделювання процесів дифузії з інерцією та розсіювання електронів, у віковому наближенні теорії сповільнених електронів, у біології, економіці та інших галузях науки [4–11, 13–15].

Серед методів дослідження лінійних ультрапараболічних рівнянь важливе місце посідають аналітичні методи і, зокрема, метод Леві та його модифікації [8, 11]. Основна увага у дослідженнях приділялась побудові, одержанню точних оцінок і вивченню різних властивостей фундаментального розв'язку задачі Коші за якомога слабших припущень на коефіцієнти рівняння. Однак на сьогодні точних результатів, що стосуються класичного фундаментального розв'язку задачі Коші (КФРЗК) для вироджених рівнянь типу Колмогорова з коефіцієнтами, залежними від усіх змінних, немає. Як і для невироджених параболічних рівнянь, для вироджених рівнянь типу Колмогорова у випадку, коли коефіцієнти є сталими або залежать лише від часової змінної, вдається одержати повний аналітичний опис КФРЗК і з його допомогою встановити достатньо точні результати про коректну розв'язність задачі Коші та інтегральне зображення розв'язків. Якщо коефіцієнти вироджених рівнянь типу Колмогорова залежать від усіх змінних, то дослідження КФРЗК істотно ускладнюється. Крім традиційних, виникають серйозні труднощі, пов'язані з виродженістю рівнянь. Аналіз праць показав, що вирішення проблеми побудови КФРЗК полягає не тільки в знаходженні прийнятних умов на коефіцієнти, але й у правильному виборі параметриксу при застосуванні методу Леві. Наш підхід полягає у поетапному застосуванні методу Леві. Для рівнянь, коефіцієнти яких не залежать від змінних виродження, КФРЗК побудовано в [1], а в працях [2, 3] для рівнянь з однією групою просторових змінних виродження здійснено побудову КФРЗК, знайдено його оцінки та оцінки його похідних, а також оцінки приростів за просторовими змінними цих похідних. Особливості вибору параметриксу для параболічних рівнянь і систем рівнянь з різними виродженнями й особливостями, зокрема і для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних, викладено в праці [11]. Також у цій праці знайдено умови на коефіцієнти ультрапараболічного рівняння, за яких існує так званий L-ФРЗК, що доповнює результати з попередніх праць авторів [2, 3].

Отже, пропонована стаття продовжує розпочаті раніше дослідження з реалізації поетапного методу Леві побудови КФРЗК для ультрапараболічних рівнянь з двома групами змінних виродження.

Нехай n, n_1, n_2 і n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_1 \ge n_2 \ge n_3 \ge \ge 1$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$; $\mathbb{N}_j := \{1, \ldots, j\}$, $\mathbb{Z}_j := \mathbb{N}_j \cup \{0\}$, $j \in \mathbb{N}$, $m_j = j - 1/2$,

$j \in \mathbb{N}_3$. Будемо вважати, що просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x := (x_1, x_2, x_3)$, де компоненти $x_j := (x_{j1}, \ldots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$. Відповідно до цього мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записуватимемо у вигляді $k :=$ $:= (k_1, k_2, k_3)$, де $k_j := (k_{j1}, \ldots, k_{jn_j}) \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$. Використовуватимемо такі позначення: $k' := (0, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^n$, якщо $k_j \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$, $j \in \{2, 3\}$; $M := m_1 n_1 + m_2 n_2 +$ $+ m_3 n_3$; $M_k := m_1 |k_1| + m_2 |k_2| + m_3 |k_3|$, якщо $k \in \mathbb{Z}_+^n$, де $|k_j| := k_{j1} + \ldots + k_{jn_j}$; $\Pi_H := \{(t, x) \mid t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$. Через Z_{j-1}, $j \in \mathbb{N}_4$, позначатимемо КФРЗК. Індекс j відповідає етапу побудови КФРЗК. Кількість етапів залежить від кількості груп просторових змінних. Параметрикс на j-му етапі позначатимемо символом G_j, породжуваний ним об'ємний потенціал – символом W_j, а його густину – символом Q_j.

Отже, на *початковому* (*нульовому*) *етапі* будуємо КФРЗК Z_0 для рівняння, коефіцієнти якого залежать від змінної t і параметра $y \in \mathbb{R}^n$, тобто розглядаємо рівняння

$$L_0 u(t, x) := (S - A(t, y, \partial_{x_1}))u(t, x) = 0, \qquad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де

$$S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}},$$

$$A(t, y, \partial_{x_1}) := \sum_{j,\ell=1}^{n_1} a_{j\ell}(t, y) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1\ell}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, y) \partial_{x_{1j}} + a_0(t, y).$$

На *першому етапі* КФРЗК для рівняння

$$L_1 u(t, x) := (S - A(t, (x_1, y'), \partial_{x_1}))u(t, x) = 0, \qquad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{2}$$

шукаємо у вигляді

$$Z_1(t, x; \tau, \xi; y') = G_1(t, x; \tau, \xi; y') + W_1(t, x; \tau, \xi; y'), \tag{3}$$

де

$$W_1(t, x; \tau, \xi; y') := \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G_1(t, x; \beta, \lambda; y') Q_1(\beta, \lambda; \tau, \xi; y') \, d\lambda, \tag{4}$$

G_1 – параметрикс, а Q_1 – невідома функція, $y' := (y_2, y_3) \in \mathbb{R}^{n_2 + n_3}$. За параметрикс вибираємо функцію

$$G_1(t, x; \tau, \xi; y') := Z_0(t, x; \tau, \xi; (\xi_1, y')),$$

$$0 \le \tau < t \le T, \qquad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad y' \in \mathbb{R}^{n_2 + n_3}. \tag{5}$$

На *другому етапі* рівняння має вигляд

$$L_2 u(t, x) := (S - A(t, (x_1, x_2, y_3), \partial_{x_1}))u(t, x) = 0, \qquad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{6}$$

Згідно з методом Леві, КФРЗК шукаємо у вигляді

$$Z_2(t, x; \tau, \xi; y_3) = G_2(t, x; \tau, \xi; y_3) + W_2(t, x; \tau, \xi; y_3), \tag{7}$$

де

$$W_2(t,x;\tau,\xi;y_3) := \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G_2(t,x;\beta,\lambda;y_3) Q_2(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)\,d\lambda\,, \tag{8}$$

G_2 – параметрикс, а Q_2 – невідома функція. За параметрикс вибираємо функцію

$$G_2(t,x;\tau,\xi;y_3) := Z_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3)),$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}. \tag{9}$$

Для випадку двох груп просторових змінних виродження *третій етап* завершує побудову КФРЗК для рівняння, коефіцієнти якого залежать від усіх змінних. Отже, на цьому етапі розглядаємо рівняння вигляду

$$L_3 u(t,x) := \left(S - A(t,x,\partial_{x_1})\right) u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{10}$$

Аналогічно до попереднього, КФРЗК для рівняння (10) шукаємо у вигляді

$$Z_3(t,x;\tau,\xi) = G_3(t,x;\tau,\xi) + W_3(t,x;\tau,\xi), \tag{11}$$

де

$$W_3(t,x;\tau,\xi) := \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G_3(t,x;\beta,\lambda) Q_3(\beta,\lambda;\tau,\xi)\,d\lambda\,, \tag{12}$$

G_3 – параметрикс, а Q_3 – невідома функція. За параметрикс вибираємо функцію

$$G_3(t,x;\tau,\xi) := Z_3(t,x;\tau,\xi;\xi_3), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Результатом кожного j-го етапу є твердження про існування відповідного КФРЗК Z_j, $j \in \mathbb{N}_3$, встановлення точних оцінок похідних від КФРЗК, інтегралів від похідних КФРЗК і їх приростів (оцінки двох останніх, крім Z_3). Проведення цих досліджень істотно залежить від всебічного вивчення властивостей об'ємних потенціалів (4), (8) і (12). Ядром потенціалу є відповідний параметрикс (5), (9) чи (13), а густиною – відповідна функція Q_j, яка є розв'язком інтегрального рівняння

$$Q_j(t,x;\tau,\xi;p_j(y')) = K_j(t,x;\tau,\xi;p_j(y')) +$$

$$+ \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_j(t,x;\beta,\lambda;p_j(y')) Q_j(\beta,\lambda;\tau,\xi;p_j(y'))\,d\lambda\,, \tag{14_j}$$

де $j \in \mathbb{N}_3$, $p_1(y') = y'$, $p_2(y') = y_3$ і $p_3(y') = 0$, тобто $p_3(y')$ не залежить від y'.

Для густин Q_j встановлюються певні властивості та оцінки, які гарантують існування похідних від об'ємних потенціалів, їх точних оцінок та оцінок приростів таких похідних за просторовими змінними.

У попередніх працях авторів [1–3] детально розглянуто етапи побудови і дослідження КФРЗК для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з не більш ніж *однією групою* просторових змінних виродження. Пропонована робота присвячена отриманню аналогічних результатів для рівнянь з *двома групами* просторових змінних виродження і складається з двох частин. У першій частині, яка викладена у цій статті, наводимо припущення і допоміжні відомості (**п. 1**), формулюємо основні результати, описуємо схеми доведення, вивчаємо властивості функції G_1 і ядра K_1 інтегрального рівняння (14_1) (**пп. 2–4**). У другій частині роботи опишемо властивості функцій G_j, Q_j і W_j, $j \in \mathbb{N}_3$, і завершимо доведення основних результатів.

1. Припущення і допоміжні відомості. Будемо користуватися такими позначеннями:

$$\Delta_x^z f(\cdot,x,\cdot) := f(\cdot,x,\cdot) - f(\cdot,z,\cdot), \quad \Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot,x,\cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot,x,\cdot), \quad s \in \mathbb{N}_3,$$

$$z^{(0)} := x, \quad z^{(1)} := (z_1, x_2, x_3), \quad z^{(2)} := (x_1, z_2, x_3), \quad z^{(3)} := (x_1, x_2, z_3),$$

$$x^{(1)} := (x_1, z_2, z_3), \quad x^{(2)} := (x_1, x_2, z_3),$$

$$X(t) := \left(X_1(t), X_2(t), X_3(t)\right),$$

$$X^{(1)}(t) := (\lambda_1, X_2(t), X_3(t)), \qquad X^{(2)}(t) := (\lambda_1, \lambda_2, X_3(t)),$$

$$X_1(t) := \hat{x}_1, \quad \hat{X}_2(t) := x_2 + t\hat{x}_1, \quad X_3(t) := x_3 + tx_2' + 2^{-1}t^2 x_1', \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\hat{x}_1 := (x_{11}, \ldots, x_{1n_2}), \quad x_1' := (x_{11}, \ldots, x_{1n_3}), \quad x_2' := (x_{21}, \ldots, x_{2n_3}),$$

$$Z^{(0)}(t) := X(t), \quad Z^{(s)}(t) := X(t)\big|_{x_s = z_s}, \quad s \in \mathbb{N}_3.$$

Аналогічно будуються параметричні точки $Y(t)$, $\Lambda(t)$ за відповідними точками y і λ.

У статті часто однаковими літерами (здебільшого літерами C і c), якщо їх величини нас не цікавлять, позначатимемо різні сталі.

Будемо припускати, що коефіцієнти $a_{j\ell}$, a_j і a_0 є комплекснозначними функціями на $\Pi_{[0,T]}$, які задовольняють такі умови:

(***i***) $a_{j\ell}$, a_j, a_0 є обмеженими й неперервними за t та існує така стала $\delta > 0$, що для довільних $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 := (\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\operatorname{Re} \sum_{j,\ell=1}^{n_1} a_{j\ell}(t,x)\sigma_{1j}\sigma_{1\ell} \ge \delta|\sigma_1|^2;$$

(***ii***) $a_{j\ell}$, a_j, a_0 є гельдеровими за просторовими змінними в такому сенсі:

$$\exists H_1 > 0, \quad \exists \alpha_1 \in (0,1) \quad \forall\{(t,x), (t,z^{(1)})\} \subset \Pi_{[0,T]}:$$

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1} a(t,x)\right| \le H_1 |x_1 - z_1|^{\alpha_1}, \tag{15}$$

$$\exists H_2 > 0, \quad \exists \alpha_2 \in (1/3,\, 2/3] \quad \forall\{(t,x), (t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]}, \quad \forall h \in [0,T]:$$

$$\left|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)\right| \le H_2\left(h^{m_2\alpha_2} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha_2}\right), \tag{16}$$

$$\exists H_3 > 0, \quad \exists \alpha_3 \in (3/5,\, 2/3] \quad \forall\{(t,x), (t,z^{(3)})\} \subset \Pi_{[0,T]}, \quad \forall h \in [0,T]:$$

$$\left|\Delta_{x_3}^{z_3} a(t,x)\right| \le H_3\left(h^{m_3\alpha_3} + |X_3(h) - z_3|^{\alpha_3}\right), \tag{17}$$

(***iii***) $\exists H_4 > 0 \quad \forall\{(t,x), (t,\xi^{(1)}), (t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]}, \quad \forall h \in [0,T]:$

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1}\Delta_{x_s}^{z_s} a(t,x)\right| \le H_4 |x_1 - \xi_1|^{\alpha_1} \left(h^{m_s\alpha_s} + |X_s(h) - z_s|^{\alpha_s}\right), \quad s \in \{2,3\}, \tag{18}$$

де a − будь-який з коефіцієнтів $a_{j\ell}$, a_j і a_0. В умові (***iii***) сталі α_1, α_2 і α_3 такі, як в умові (***ii***).

З умов (16), (17) при $h = 0$ випливають звичайні умови Гельдера за змінними x_2 і x_3. Достатня умова виконання (16) подана в [2]. Наведемо аналогічну умову для виконання твердження (17).

Лема 1. *Нехай* a *− неперервна й обмежена функція на* $\Pi_{[0,T]}$, *яка задовольняє умову*

$$\exists H_5 > 0, \quad \exists \alpha \in (9/10, 1] \quad \forall \{(t,x),(t,z^{(3)})\} \subset \Pi_{[0,T]}:$$

$$\left|\Delta_{x_3}^{z_3} a(t,x)\right| \le H_5 (T^{m_1} + 2^{-1} T|x_1'| + |x_2'|)^{-\alpha} |x_1 - z_1|^\alpha . \tag{19}$$

Тоді справджується нерівність (17) *з* $\alpha_3 = \alpha/m_2$.

Д о в е д е н н я. Достатньо довести обмеженість відношення

$$R := \left|\Delta_{x_3}^{z_3} a(t,x)\right| (h^{(m_3/m_2)\alpha} + |X_3(h) - z_3|^{\alpha/m_2})^{-1}$$

для всіх $\{(t,x), (t,z^{(3)})\} \subset \Pi_{[0,T]}$ і $h \in [0,T]$.

У випадку, коли $h^{(m_3/m_2)\alpha} + |X_3(h) - z_3|^{\alpha/m_2} > T^\alpha$, маємо

$$R \le T^{-\alpha} \left|\Delta_{x_3}^{z_3} a(t,x)\right| \le 2H_0 T^{-\alpha} , \tag{20}$$

де H_0 − стала, яка обмежує модуль функції a.

Нехай справджується протилежна нерівність

$$h^{(m_3/m_2)\alpha} + |X_3(h) - z_3|^{\alpha/m_2} \le T^\alpha . \tag{21}$$

Оскільки $X_3(h) = x_3 + hx_2' + 2^{-1}h^2 x_1'$, то

$$|x_3 - z_3| \le 2^{-1}h^2|x_1'| + h|x_2'| + |X_3(h) - z_3| . \tag{22}$$

Можливі такі випадки:

1°) $2^{-1}h^2|x_1'| + h|x_2'| \le |X_3(h) - z_3|$,

2°) $2^{-1}h^2|x_1'| + h|x_2'| > |X_3(h) - z_3|$.

У випадку ***1°*** за допомогою нерівностей (19) і (22) отримуємо

$$R \le H_5 \left(\frac{2^{-1}h^2|x_1'| + h|x_2'| + |X_3(h) - z_3|}{T^{m_1} + 2^{-1}T|x_1'| + |x_2'|} \right)^\alpha \times$$

$$\times (h^{(m_3/m_2)\alpha} + |X_3(h) - z_3|^{\alpha/m_2})^{-1} \le$$

$$\le 2^\alpha H_5 |X_3(h) - z_3|^\alpha (T^{m_1} + 2^{-1}T|x_1'| + |x_2'|)^{-\alpha} \times$$

$$\times (h^{m_2^{-1}\alpha} h^\alpha + |X_3(h) - z_3|^{\alpha/m_2})^{-1} ,$$

а оскільки на підставі нерівності (21)

$$T^{-m_1}|X_3(h) - z_3| \le 1$$

і

$$\alpha > \alpha/m_2 ,$$

то

$$|X_3(h) - z_3|^\alpha = T^{m_2\alpha}(T^{-m_2}|X_3(h) - z_3|)^{\alpha/m_2} =$$

$$= T^{m_1}|X_3(h) - z_3|^{\alpha/m_2}$$

і

$$R \le 2^{\alpha} H_5 \left(\frac{T^{m_1}}{T^{m_1} + 2^{-1}T|x_1'| + |x_2'|} \right)^{\alpha} \times$$

$$\times \left(\frac{|X_3(h) - z_3|^{\alpha/m_2}}{h^{(m_3/m_2)\alpha} + |X_3(h) - z_3|^{\alpha/m_2}} \right) \le 2^{\alpha} H_5 . \qquad (23)$$

У випадку *2°* аналогічно:

$$R \le H_5 \left(2^{-1}h^2 |x_1'| + h|x_2'| + |X_3(h) - z_3| \right)^{\alpha} \times$$

$$\times \left(T^{m_1} + 2^{-1}T|x_1'| + |x_2'| \right)^{-1} \left(h^{m_2^{-1}\alpha} h^{\alpha} + |X_3(h) - z_3|^{\alpha/m_2} \right)^{-1} \le$$

$$\le 2^{\alpha} H_5 T^{\alpha} \left(\frac{1}{h^{(m_3/m_2)\alpha} + |X_3(h) - z_3|^{\alpha/m_2}} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{2^{-1}T|x_1'| + |x_2'|}{T^{m_1} + 2^{-1}T|x_1'| + |x_2'|} \right)^{\alpha} \le (2T)^{\alpha} H_5 . \qquad (24)$$

З нерівностей (20), (23) і (24) випливає оцінка (17) з $\alpha_3 = \alpha/m_2$ і $H_3 = \max\{2H_0T^{-\alpha}, 2^{\alpha} H_5, (2T)^{\alpha} H_5\}$. ♦

Використовуватимемо такі оцінюючі функції:

$$E_c^j(t, z_j) := \exp\{-ct^{1-2j} |z_j|^2\}, \quad t > 0, \quad z_j \in \mathbb{R}^{n_j}, \quad j \in \mathbb{N}_3 , \qquad (25)$$

$$E_c(t, x, \xi) := E_c^1(t, X_1(t) - \xi_1) E_c^2(t, X_2(t) - \xi_2) E_c^3(t, X_3(t) - \xi_3) ,$$
$$t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n , \qquad (26)$$

$$F_c(t, x, \xi) := \exp\Big\{ -c\Big[(4t)^{-1}|x_1 - \xi_1|^2 + 3t^{-3}\left|x_2 + 2^{-1}t(\hat{x}_1 + \xi_1) - \xi_{21}\right|^2 +$$

$$+ 180t^{-5}\left|x_3 + 2^{-1}t(x_2' + \xi_2') + (12)^{-1}t^2(x_1' - \xi_1') - \xi_3\right|^2 \Big]\Big\},$$
$$t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n , \qquad (27)$$

$$I_0^{s\ell}(x, \xi) := \left((t - \beta)(\beta - \tau)\right)^{-M} \int_{\mathbb{R}^n} E_c(t - \beta, x, \lambda) E_c(\beta - \tau, \Lambda^{s\ell}(t - \beta), \xi)\, d\lambda , \qquad (28)$$

$$I_1^{sr}(x_1, \xi) := (t - \beta)^{-m_1 n_1} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} E_{c_0}^1(t - \beta, x_1 - \lambda_1) E_c(\beta - \tau, \Lambda^{sr}(t - \beta), \xi)\, d\lambda_1 , \qquad (29)$$

$$I_2^{sr}(x_1, x_2; \xi) := (t - \beta)^{-m_1 n_1 - m_2 n_2} \int_{\mathbb{R}^{n_1 + n_2}} E_{c_0}^1(t - \beta, x_1 - \lambda_1) \times$$

$$\times E_{c_0}^2(t - \beta, X_2(t - \beta) - \lambda_2) E_c(\beta - \tau, \Lambda^{sr}(t - \beta), \xi)\, d\lambda_1\, d\lambda_2 , \qquad (30)$$

де

$$\Lambda^{s0}(t) := Z^{(s)}(t), \qquad \Lambda^{s1}(t) := \left(\lambda_1, Z_2^{(s)}(t), Z_3^{(s)}(t)\right),$$

$$\Lambda^{s2}(t) := \left(\lambda_1, \lambda_2, Z_3^{(s)}(t)\right), \qquad \Lambda^{s3}(t) := \lambda ,$$

$$\ell \in \mathbb{Z}_2, \; s \in \mathbb{Z}_3, \; r \in \{2, 3\}, \; 0 \le \tau < \beta < t \le T, \; \{x, z, \xi\} \subset \mathbb{R}^n .$$

Наведемо властивості цих функцій.
Лема 2. *Правильні такі твердження:*

$$E_c(t,x,\xi) \le F_{c_1}(t,x,\xi) \le E_{c_2}(t,x,\xi)\,,$$

$$t>0, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 0<c_2<c_1<c\,, \tag{31}$$

$$E_c^1(t-\beta, x_1-\lambda_1)E_c^1(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1) \le E_c^1(t-\tau, x_1-\xi_1)\,,$$

$$0 \le \tau < \beta < t \le T, \quad \{x_1,\lambda_1,\xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}\,, \tag{32}$$

$$E_c^2(t-\beta, X_2(t-\beta)-\lambda_2)E_c^2(\beta-\tau, \Lambda_2(\beta-\tau)-\xi_2) \le$$

$$\le E_{-c/2}^1(t-\beta, x_1-\lambda_1)E_{c/4}^2(t-\tau, X_2(t-\tau)-\xi_2)\,,$$

$$0 \le \tau < \beta < t \le T, \quad \{x_s,\lambda_s,\xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_2\,, \tag{33}$$

$$|X_s(t)-\xi_s|^{\alpha_s}\, E_c^s(t, X_s(t)-\xi_s) \le Ct^{m_s\alpha_s}E_{c_0}^s(t, X_s(t)-\xi_s)\,,$$

$$t>0, \quad \{x_s,\xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_3\,, \tag{34}$$

$$|X_s(t)-\xi_s|^{\alpha_s}\, E_c(t, X_s(t)-\xi_s) \le Ct^{m_s\alpha_s}E_{c_0}(t, X_s(t)-\xi_s)\,,$$

$$t>0, \quad \{x_s,\xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_3\,, \tag{35}$$

$$t^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c(t,x,\xi)\,d\xi = C, \qquad t>0, \qquad x \in \mathbb{R}^n\,, \tag{36}$$

$$t^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} E_c(t,x,\xi)\,d\xi_2\,d\xi_3 \le C\,t^{-m_1n_1}E_c^1(t,x_1-\xi_1)\,,$$

$$t>0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad \{x_1,\xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}\,, \tag{37}$$

$$t^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} E_c(t,x,\xi)\,d\xi_2 \le C\,t^{-m_1n_1-m_2n_2}E_c^1(t,x_1-\xi_1)E_c^2(t,X_2(t)-\xi_2)\,,$$

$$t>0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad \{x_s,\xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_2\,, \tag{38}$$

$$t^{-m_sn_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_s}} E_c^s(t,X_s(t)-\xi_s)\,d\xi_s = C, \qquad t>0, \quad x_s \in \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_3\,, \tag{39}$$

$$E_c(t-\tau, y^{(s)}, \xi) \le C\,E_{c_0}(t-\tau,x,\xi), \quad 0 \le \tau < \beta < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n\,, \tag{40}$$

$$E_c(\beta-\tau, Z^{(\ell)}(t-\beta),\xi) \le CE_{c/8}(\beta-\tau, X(t-\beta),\xi)\,,$$

$$0 \le \tau < t_1 \le \beta < t \le T, \quad \{x,z,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \ell \in \mathbb{N}_3\,, \tag{41}$$

$$E_c(\beta-\tau, X(t-\beta),\xi) \le E_c(t-\tau,x,\xi), \quad 0 \le \tau < \beta < t, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n\,, \tag{42}$$

$$E_c\big(\beta-\tau, (\lambda_1, Z_2^{(\ell)}(t-\beta), Z_3^{(\ell)}(t-\beta)),\xi\big) \le$$

$$\le E_{c/4}\big(\beta-\tau, (\lambda_1, X_2(t-\beta), X_3(t-\beta)),\xi\big)\,,$$

$$0 \le \tau < t_1 \le \beta < t, \quad \{x,z,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad \ell \in \mathbb{N}_3\,, \tag{43}$$

$$E_c(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2(t-\beta),X_3(t-\beta)),\xi) \le$$
$$\le E^1_{-9c/4}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E_{c/2}(t-\tau,x,\xi)\,,$$
$$0\le\tau<t_1\le\beta<t,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad \lambda_1\in\mathbb{R}^{n_1}\,, \tag{44}$$
$$E_c(\beta-\tau,(\lambda_1,\lambda_2,Z_3^{(\ell)}(t-\beta)),\xi)\le CE_{c/2}(\beta-\tau,(\lambda_1,\lambda_2,X_3(t-\beta)),\xi)\,,$$
$$0\le\tau<t_1\le\beta<t,\quad \{x,z,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \lambda_j\in\mathbb{R}^{n_j},\ j\in\mathbb{N}_2,\ \ell\in\mathbb{Z}_3\,, \tag{45}$$
$$E_c(\beta-\tau,(\lambda_1,\lambda_2,X_3(t-\beta)),\xi)\le CE^1_c(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)\times$$
$$\times E^2_c(\beta-\tau,\Lambda_2(\beta-\tau)-\xi_2)E^1_{-c/4}(t-\beta,x_1-\lambda_1)\times$$
$$\times E^2_{-c/2}(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)E^3_{c/4}(t-\tau,X_3(t-\tau)-\xi_3)\,,$$
$$0\le\tau<t_1\le\beta<t,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad \lambda_j\in\mathbb{R}^{n_j},\quad j\in\mathbb{N}_2\,, \tag{46}$$
$$I_0^{s\ell}(z^{(r)};\xi)\le C(t-\tau)^{-M}E_{c_0}(t-\tau,x,\xi),\ 0\le\tau<t_1\le\beta<t,\ \{x,\xi,z^{(s)}\}\subset\mathbb{R}^n\,,$$
$$\{s,\ell,r\}\subset\mathbb{Z}_3\,,\quad \textit{причому}\quad \beta\in(\tau,t)\quad \textit{для}\quad \ell=3\,, \tag{47}$$
$$I_1^{s\ell}(z_1;\xi)\le CI_1^{s\ell}(x_1;\xi)\le CE_{c_0}(t-\tau,x,\xi),\quad 0\le\tau<t_1\le\beta<t\,,$$
$$\{x_1,z_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1},\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad \ell\in\mathbb{Z}_1,\quad \{s,r\}\subset\mathbb{Z}_3\,, \tag{48}$$
$$I_2^{s2}(z_1,z_2;\xi)\le CI_2^{s2}(x_1,z_2;\xi)\le CI_2^{s2}(x_1,x_2;\xi)\le CE_{c_0}(t-\tau,x,\xi)\,,$$
$$0\le\tau<t_1\le\beta<t,\ \{x_r,z_r\}\subset\mathbb{R}^{n_r},\ r\in\mathbb{N}_2,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ s\in\mathbb{Z}_3\,, \tag{49}$$

де C, c і c_0 – *додатні сталі, причому* $c_0<c$, *у формулі* (40) $y^{(s)}$ – *точка на відрізку прямої, що сполучає точки* x *і* $z^{(s)}$, $s\in\mathbb{N}_3$, *у формулах* (40)–(47) $|x_s-z_s|^{1/m_s}\le(t-\tau)/4$, $s\in\mathbb{N}_3$, *і* $t_1:=(t+\tau)/2$.

Д о в е д е н н я. Твердження (31), (32), (34)–(40) доведені в [8]. Встановимо оцінки (33), (41)–(49). Використовуватимемо елементарні нерівності
$$\forall\{a,b\}\subset\mathbb{R}^r:\quad 2^{-1}|a|^2-|b|^2\le|a+b|^2\le2(|a|^2+|b|^2),\quad r\ge1\,, \tag{50}$$
та припущення $\beta\in[t_1,t)$ і $|x_\ell-z_\ell|^{1/m_\ell}\le(t-\tau)/4$, $\ell\in\mathbb{N}_3$.

Нерівність (33) справджується, оскільки
$$(t-\beta)^{-3}|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^2+(\beta-\tau)^{-3}|\Lambda_2(\beta-\tau)-\xi_2|^2\ge$$
$$\ge2^{-1}(\beta-\tau)^{-3}\left|x_2+(t-\beta)\hat{x}_1-\lambda_2+\lambda_2+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2\right|^2=$$
$$=2^{-1}(\beta-\tau)^{-3}\left|(X_2(t-\tau)-\xi_2)+(\beta-\tau)(\hat{\lambda}_1-\hat{x}_1)\right|^2\ge$$
$$\ge4^{-1}(t-\tau)^{-3}|(X_2(t-\tau)-\xi_2)|^2-2^{-1}(t-\beta)^{-1}|x_1-\lambda_1|^2\,.$$

Оскільки
$$Z_1^{(\ell)}(t)-X_1(t)=\delta_{1\ell}(z_1-x_1)\,,$$

$$Z_2^{(\ell)}(t)-X_2(t)=\delta_{1\ell}t(\hat{z}_1-\hat{x}_1)+\delta_{2\ell}(z_2-x_2),$$

$$Z_3^{(\ell)}(t)-X_3(t)=\delta_{1\ell}2^{-1}t^2(z_1'-x_1')+\delta_{2\ell}t(z_2'-x_1')+\delta_{3\ell}(z_3-x_3),$$

де $\delta_{k\ell}$ – символ Кронекера, $\{k,\ell\}\subset\mathbb{N}_3$, то

$$(\beta-\tau)^{-1}\left|Z_1^{(\ell)}(t-\beta)-X_1(t-\beta)\right|^2=(\beta-\tau)^{-1}\left|z_1-x_1\right|^2\le\frac{1}{2},\qquad \ell\in\mathbb{N}_3,$$

$$(\beta-\tau)^{-3}\left|Z_2^{(\ell)}(t-\beta)-X_2(t-\beta)\right|^2\le$$

$$\le 2(\beta-\tau)^{-3}\big((t-\beta)^2\,|\,|\hat{z}_1-\hat{x}_1|^2+|z_2-x_2|^2\big)\le\frac{17}{4},\qquad \ell\in\mathbb{N}_3,$$

$$(\beta-\tau)^{-5}\left|Z_3^{(\ell)}(t-\beta)-X_3(t-\beta)\right|^2\le 4(\beta-\tau)^{-5}\big(4^{-1}(t-\beta)^4\left|z_1'-x_1'\right|^2+$$

$$+(t-\beta)^2\left|z_2'-x_2'\right|^2+\left|z_3-x_3\right|^2\big)\le\frac{81}{8},\qquad \ell\in\mathbb{N}_3,$$

$$E_c(\beta-\tau,Z^{(\ell)}(t-\beta),\xi)=\exp\Big\{-c\Big[(\beta-\tau)^{-1}\left|Z_1^{(\ell)}(t-\beta)-\xi_1\right|^2+$$

$$+(\beta-\tau)^{-3}\left|Z_2^{(\ell)}(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{Z}_1^{(\ell)}(t-\beta)-\xi_2\right|^2+(\beta-\tau)^{-5}\times$$

$$\times\left|Z_3^{(\ell)}(t-\beta)+(\beta-\tau)Z_2'^{(\ell)}(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2Z_1'^{(\ell)}-\xi_3\right|^2\Big]\Big\}=$$

$$=\exp\Big\{-c\Big[(\beta-\tau)^{-1}\Big|(X_1(t-\beta)-\xi_1)+(Z_1^{(\ell)}(t-\beta)-$$

$$-X_1(t-\beta))\Big|^2+(\beta-\tau)^{-3}\Big|(X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{X}_1(t-\beta)-\xi_2)+$$

$$+(\beta-\tau)\big(\hat{Z}_1^{(\ell)}(t-\beta)-\hat{X}_1(t-\beta)\big)+\big(Z_2^{(\ell)}(t-\beta)-X_2(t-\beta)\big)\Big|^2+$$

$$+(\beta-\tau)^{-5}\Big|\big(X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2\times$$

$$\times X_1'(t-\beta)-\xi_3\big)+\big(Z_3^{(\ell)}(t-\beta)-X_3(t-\beta)\big)+$$

$$+(\beta-\tau)\big(Z_2'^{(\ell)}(t-\beta)-X_2'(t-\beta)\big)+$$

$$+2^{-1}(\beta-\tau)^2\big(Z_1'^{(\ell)}(t-\beta)-X_1'(t-\beta)\big)\Big|^2\Big]\Big\}\le$$

$$\le\exp\Big\{-c\Big[(\beta-\tau)^{-1}\big(2^{-1}\left|X_1(t-\beta)-\xi_1\right|^2-Z_1^{(\ell)}(t-\beta)-$$

$$-X_1(t-\beta)\big|^2\big)+(\beta-\tau)^{-3}\big(4^{-1}\left|X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{X}_1(t-\beta)-\xi_2\right|^2-$$

$$-2^{-1}(\beta-\tau)^2\left|\hat{Z}_1^{(\ell)}(t-\beta)-\hat{X}_1(t-\beta)\right|^2-\left|Z_2^{(\ell)}(t-\beta)-X_2(t-\beta)\right|^2\big)+$$

$$+(\beta-\tau)^{-5}\big(8^{-1}\big|(X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+$$

$$+2^{-1}(\beta-\tau)^2X_1'(t-\beta)-\xi_3\Big|^2-4^{-1}\left|Z_3^{(\ell)}(t-\beta)-X_3(t-\beta)\right|^2-$$

$$- 2^{-1}(\beta-\tau)^2 \left|Z_2'^{(\ell)}(t-\beta) - X_2'(t-\beta)\right|^2 -$$

$$- 2^{-1}(\beta-\tau)^4 \left|Z_1'^{(\ell)}(t-\beta) - X_1'(t-\beta)\right|^2 \Big) \Big] \Big\} \le$$

$$\le C E_{c/8}(\beta-\tau, X(t-\beta), \xi), \tag{51}$$

і нерівність (41) доведено.

Для доведення (42) запишемо

$$E_c(\beta-\tau, X(t-\beta), \xi) = \exp\Big\{ - c\Big[(\beta-\tau)^{-1} |x_1 - \xi_1|^2 + (\beta-\tau)^{-3} \times$$

$$\times \left| X_2(t-\beta) + (\beta-\tau)\hat{x}_1 - \xi_2 \right|^2 + (\beta-\tau)^{-5} \times$$

$$\times \left| X_3(t-\beta) + (\beta-\tau)X_2'(t-\beta) + 2^{-1}(\beta-\tau)^2 x_1' - \xi_3 \right|^2 \Big] \Big\} =$$

$$= \exp\Big\{ - c\Big[(\beta-\tau)^{-1} |x_1 - \xi_1|^2 + (\beta-\tau)^{-3} |X_2(t-\tau) - \xi_2|^2 +$$

$$+ (\beta-\tau)^{-5} |X_3(t-\tau) - \xi_3|^2 \Big] \Big\} \le E_c(t-\tau, x, \xi).$$

Твердження (43) і (45) доводимо аналогічно до (41). Оскільки

$$E_c\big(\beta-\tau, (\lambda_1, Z_2^{(\ell)}(t-\beta), Z_3^{(\ell)}(t-\beta)), \xi\big) =$$

$$= \exp\Big\{ - c\Big[(\beta-\tau)^{-1} |\lambda_1 - \xi_1|^2 + (\beta-\tau)^{-3} \times$$

$$\times \left| Z_2^{(\ell)}(t-\beta) + (\beta-\tau)\hat{\lambda}_1 - \xi_2 \right|^2 + (\beta-\tau)^{-5} \times$$

$$\times \left| Z_3^{(\ell)}(t-\beta) + (\beta-\tau)Z_2'^{(\ell)}(t-\beta) + 2^{-1}(\beta-\tau)^2 \lambda_1' - \xi_3 \right|^2 \Big] \Big\}$$

і

$$E_c\big(\beta-\tau, (\lambda_1, \lambda_2, Z_3^{(\ell)}(t-\beta)), \xi\big) =$$

$$= \exp\Big\{ - c\Big[(\beta-\tau)^{-1} |\lambda_1 - \xi_1|^2 + (\beta-\tau)^{-3} \times$$

$$\times \left| \Lambda_2(t-\beta) + (\beta-\tau)\hat{\lambda}_1 - \xi_2 \right|^2 + (\beta-\tau)^{-5} \times$$

$$\times \left| Z_3^{(\ell)}(t-\beta) + (\beta-\tau)\lambda_2' + 2^{-1}(\beta-\tau)^2 \lambda_1' - \xi_3 \right|^2 \Big] \Big\},$$

то з нерівностей

$$\left| Z_3^{(\ell)}(t-\beta) + (\beta-\tau)Z_2'^{(\ell)}(t-\beta) + 2^{-1}(\beta-\tau)^2 \lambda_1' - \xi_3 \right|^2 =$$

$$= \Big| Z_3^{(\ell)}(t-\beta) + (\beta-\tau)X_2'(t-\beta) + 2^{-1}(\beta-\tau)^2 \lambda_1' - \xi_3 +$$

$$+ (\beta-\tau)\big(Z_2'^{(\ell)}(t-\beta) - X_2'(t-\beta)\big) \Big|^2 \ge$$

$$\ge 2^{-1} \left| Z_3^{(\ell)}(t-\beta) + (\beta-\tau)X_2'(t-\beta) + 2^{-1}(\beta-\tau)^2 \lambda_1' - \xi_3 \right|^2 -$$

$$-(\beta-\tau)^2\left|Z_2'^{(\ell)}(t-\beta)-X_2'(t-\beta)\right|^2 \geq$$

$$\geq 4^{-1}\left|X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3\right|^2 -$$

$$-2^{-1}\left|Z_3^{(\ell)}(t-\beta)-X_3(t-\beta)\right|^2 -$$

$$-(\beta-\tau)^2\left|Z_2'^{(\ell)}(t-\beta)-X_2'(t-\beta)\right|^2, \qquad \ell\in\mathbb{N}_3, \tag{52}$$

$$\left|Z_2^{(\ell)}(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2\right|^2=\left|(X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2)+\right.$$

$$\left.+(Z_2^{(\ell)}(t-\beta)-X_2(t-\beta))\right|^2\geq 2^{-1}\left|X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2\right|^2-$$

$$-\left|Z_2^{(\ell)}(t-\beta)-X_2(t-\beta)\right|^2, \qquad \ell\in\mathbb{N}_3, \tag{53}$$

і

$$\left|Z_3^{(\ell)}(t-\beta)+(\beta-\tau)\lambda_2'+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3\right|^2=$$

$$=\left|(X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)\lambda_2'+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3)+\right.$$

$$\left.+(Z_3^{(\ell)}(t-\beta)-X_3(t-\beta))\right|^2\geq 2^{-1}\left|X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)\lambda_2'+\right.$$

$$\left.+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3\right|^2-\left|Z_3^{(\ell)}(t-\beta)-X_3(t-\beta)\right|^2 \tag{54}$$

випливають нерівності (43) і (45).

Твердження (44) є наслідком з нерівностей

$$(\beta-\tau)^{-3}\left|X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2\right|^2=$$

$$=(\beta-\tau)^{-3}\left|(X_2(t-\tau)-\xi_2)+(\beta-\tau)(\hat{\lambda}_1-\hat{x}_1)\right|^2\geq$$

$$\geq 2^{-1}(t-\tau)^{-3}\left|X_2(t-\tau)-\xi_2\right|^2-(t-\beta)^{-1}\left|\lambda_1-x_1\right|^2,$$

$$(\beta-\tau)^{-5}\left|X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3\right|^2=$$

$$=(\beta-\tau)^{-5}\left|x_3+(t-\beta)x_2'+2^{-1}(t-\beta)^2x_1'+(\beta-\tau)x_2'+\right.$$

$$\left.+(\beta-\tau)(t-\beta)x_1'+2^{-1}(\beta-\tau)^2x_1'-\xi_3+2^{-1}(\beta-\tau)^2(\lambda_1'-x_1')\right|^2\geq$$

$$\geq 2^{-1}(t-\tau)^{-5}\left|X_3(t-\tau)-\xi_3\right|^2-4^{-1}(t-\beta)^{-1}\left|x_1-\lambda_1\right|^2.$$

Аналогічно з нерівності

$$\left|X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)\lambda_2'+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3\right|^2=$$

$$=\left|(X_3(t-\tau)-\xi_3)+(\beta-\tau)(\lambda_2'-X_2'(t-\beta))+\right.$$

$$\left.+2^{-1}(\beta-\tau)^2(\lambda_1'-x_1')\right|^2\geq 4^{-1}\left|X_3(t-\tau)-\xi_3\right|^2-$$

$$-2^{-1}(\beta-\tau)^2\left|\lambda_2'-X_2'(t-\beta)\right|^2-4^{-1}(\beta-\tau)^4\left|\lambda_1'-x_1'\right|^2$$

отримуємо (46).

Беручи до уваги нерівності

$$E_c(t,z^{(r)},\xi) = \exp\Big\{ - c\Big[t^{-1}\left|(x_1-\xi_1)+\delta_{r1}(z_1-x_1)\right|^2 +$$

$$+ t^{-3}\left|(X_2(t)-\xi_2)+t\delta_{r1}(\hat{z}_1-\hat{x}_1)+\delta_{r2}(z_2-x_2)\right|^2 +$$

$$+ t^{-5}\Big|(X_3(t)-\xi_3)+2^{-1}t^2\delta_{r1}(z_1'-x_1')+$$

$$+\delta_{r2}t(z_2'-x_2')+\delta_{r3}(z_3-x_3)\Big|^2\Big]\Big\} \le$$

$$\le \exp\Big\{ - c\Big[2^{-1}t^{-1}|x_1-\xi_1|^2 - \delta_{r1}|z_1-x_1|^2 +$$

$$+2^{-1}t^{-3}|X_2(t)-\xi_2|^2 - t^2\delta_{r1}|\hat{z}_1-\hat{x}_1|^2 + 2^{-1}\delta_{r2}|z_2-x_2|^2 +$$

$$+2^{-1}t^{-5}|X_3(t)-\xi_3|^2 - 4^{-1}\delta_{r1}t^{-1}|z_1'-x_1'|^2 +$$

$$+\delta_{r2}t^{-3}|z_2'-x_2'|^2 - \delta_{r3}t^{-5}|z_3-x_3|^2\Big]\Big\} \le CE_{c/2}(t,x,\xi)$$

та нерівності (31), отримуємо

$$E_c(t,z^{(r)},\xi) \le CE_{c/2}(t,x,\xi), \qquad t>0, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \quad r\in\mathbb{Z}_3.$$

З цієї нерівності та оцінок (41), (43) і (45) випливає, що твердження (47) достатньо довести для $r=s=0$, тобто оцінити інтеграли $I_0^{0\ell}(x;\xi)$, $\{x,\xi\}\subset \subset\mathbb{R}^n$, $\ell\in\mathbb{Z}_3$. Якщо $\ell=0$, то потрібна оцінка випливає безпосередньо з означення (26) та рівності (36). У випадку $\ell=1$ за допомогою нерівності (45) і рівності (36) отримаємо

$$I_0^{01}(x;\xi) \le \left((t-\beta)(\beta-\tau)\right)^{-M} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_0}(t-\beta,x,\lambda)E^1_{-c_0/4}(t-\beta,x_1-\lambda_1)\,d\lambda\cdot E_{c_0/10}(t-\tau,x,\xi) \le$$

$$\le (t_1-\tau)^{-M}(t-\beta)^{-M}\int_{\mathbb{R}^n} E_{3c_0/4}(t-\beta,x,\lambda)\,d\lambda\cdot E_{c_0/10}(t-\tau,x,\xi)\le$$

$$\le CE_{c_0/10}(t,x,\xi), \qquad t>0, \qquad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{55}$$

Якщо $\ell=2$, то використовуємо нерівності (32), (33), (46) і рівності (36):

$$I_0^{02}(x;\xi) \le \left((t-\beta)(\beta-\tau)\right)^{-M}\int_{\mathbb{R}^n} E_{c_0}(t-\beta,x,\lambda)E^1_{c_0/3}(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)\times$$

$$\times E^2_{c_0/3}(\beta-\tau,\Lambda_2(\beta-\tau)-\xi_2)E^1_{-c_0/12}(t-\beta,x_1-\lambda_1)\,d\lambda\times$$

$$\times E^3_{c_0/12}(t-\tau,X_3(t-\tau)-\xi_3) = \left((t-\beta)(\beta-\tau)\right)^{-M}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n} E^1_{c_0/12}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E^1_{c_0/3}(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)\times$$

$$\times E^2_{c_0/2}(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)E^2_{c_0/3}(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)\times$$

$$\times E^2_{c_0/3}(\beta-\tau,\Lambda_2(\beta-\tau)-\xi_2)E^3_{c_0}(t-\beta,X_3(t-\beta)-\lambda_3)\,d\lambda\times$$

$$\times E^3_{c_0/12}(t-\tau,X_3(t-\tau)-\xi_3)\le\big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-M}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}E_{5c_0/12}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E_{c_0/3}(t-\beta,x_1-\lambda_1)\times$$

$$\times E^1_{c_0/3}(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)E^2_{2c_0/3}(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)\times$$

$$\times E^3_{c_0}(t-\beta,X_3(t-\beta)-\lambda_3)\,d\lambda\cdot E^2_{c_0/12}(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2)\times$$

$$\times E^3_{c_0/12}(t-\tau,X_3(t-\tau)-\xi_3)\le(t_1-\tau)^{-M}(t-\beta)^{-M}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}E_{5c_0/12}(t-\beta,x,\lambda)\,d\lambda\cdot E_{c_0/12}(t-\tau,x,\xi)\le$$

$$\le CE_{c_0/12}(t-\tau,x,\xi)\,,\qquad t>0,\qquad\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n\,. \tag{56}$$

З нерівностей (55) і (56) випливає твердження (47), оскільки для $\ell=3$ потрібна оцінка встановлена в [2] для $\beta\in(\tau,t)$.

Твердження (48) і (49) доводяться аналогічно. ♦

У наступній лемі подаємо властивості КФРЗК Z_0 для рівняння (1), які встановлюються подібно до результатів з [8, теорема 3.1, властивість 3.2].

Лема 3. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1), *як функції від* t *і* y, *задовольняють умови* (***i***), (***ii***), *в яких* x *замінено на* y. *Тоді існує КФРЗК* Z_0, *для якого справджуються оцінки*

$$\left|\,\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y)\right|\le C(t-\tau)^{-M-M_k}E_c(t-\tau,x,\xi)\,, \tag{57}$$

$$\left|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y)\right|\le C_{sk}(t-\tau)^{-M-M_k}E_c(t-\tau,x,\xi)\times$$

$$\times\begin{cases}|y_1-z_1|^{\alpha_1}\,, & s=1,\\ h^{m_s\alpha_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\alpha_s}\,, & s\in\{2,3\},\end{cases} \tag{58}$$

а також рівності

$$\partial_x^k\int_{\mathbb{R}^n}Z_0(t,x;\tau,\xi;y)\,d\xi=0,\quad \partial_x^k\int_{\mathbb{R}^n}Z_0(t,x;\tau,\xi;y)\,dx=0,\quad k\ne0\,, \tag{59}$$

$$\partial_x^{k'}\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}Z_0(t,x;\tau,\xi;y)\,d\xi_2\,d\xi_3=0,\qquad k'\ne0\,, \tag{60}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int_{\mathbb{R}^{n_3}}Z_0(t,x;\tau,\xi;y)\,d\xi_3=0,\qquad k_3\ne0\,, \tag{61}$$

$$\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y)=(-\partial_\xi)^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y)\,, \tag{62}$$

де $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi,y\}\subset\mathbb{R}^n$, $z\in\mathbb{R}^{n_s}$, $s\in\mathbb{N}_3$, $\{k,k'\}\subset\mathbb{Z}^n_+$, C_k, C_{ks} *– додатні сталі,* h *і* α_s *– числа з умов* (15)–(17).

2. Формулювання основних результатів. Результати першого, другого та заключного третього етапів побудови й дослідження КФЗРК для рівняння (10) містяться в наступних теоремах.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (2) *виконуються умови* (***i***)–(***iii***), *в яких* x *замінено на* (x_1, y'). *Тоді для рівняння* (2) *існує КФРЗК* Z_1 *і є правильними такі твердження*:

$$\left|\partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{63}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C|x_s - z_s|^{\alpha_s} (t-\tau)^{-M-M_k-m_s\alpha_s^0} \times$$
$$\times \left(E_c(t-\tau,x,\xi) + E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right), \qquad s \in \mathbb{N}_3, \tag{64}$$

$$\left|\Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E_c(t-\tau,x,\xi) \times$$
$$\times \left(h^{m_s\alpha_s} + |Y_s(h) - z_s|^{\alpha_s}\right), \qquad s \in \{2,3\}, \tag{65}$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-M_k+m_1\alpha_1}, \qquad k \ne 0, \tag{66}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi\right| \le C|x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-M_k+m_1\alpha_1-m_s\alpha_s^0}, \; k \ne 0, \tag{67}$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^{k'} Z_1\left(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3)\right) d\xi_2\, d\xi_3\right| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-m_1n_1-M_{k'}+m_2\alpha_2} E_{c_0}^1(t-\tau,x_1-\xi_1), \qquad k' \ne 0, \tag{68}$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} Z_1\left(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3)\right) d\xi_3\right| \le C(t-\tau)^{-m_1n_1-m_2n_2-m_3|k_3|+m_3\alpha_3} \times$$
$$\times E_{c_0}^1(t-\tau,x_1-\xi_1) E_{c_0}^2(t-\tau,X(t-\tau)-\xi_2), \qquad k_3 \ne 0, \tag{69}$$

$$\partial_x^{k'} \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi_2\,d\xi_3 = 0, \qquad k' \ne 0, \tag{70}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_1(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \ne 0, \tag{71}$$

$$\partial_x^{k'} Z_1(t,x;\tau,\xi;y') = (-\partial_\xi)^{k'} Z_1(t,x;\tau,\xi;y'), \tag{72}$$

де $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $\alpha_1^0 \in (0,\alpha_1]$, $\{\alpha_2^0, \alpha_3^0\} \subset (0,1]$, $\{k,k'\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $m_1|k_1| \le 1$, *числа* h *і* α_s *такі, як вище.*

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (6) *виконуються умови* (***i***)–(***iii***), *в яких* x *замінено на* (x_1, x_2, y_3). *Тоді для рівняння* (6) *існує КФРЗК* Z_2 *і справджуються оцінки*

$$\left|\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{73}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\right| \le C|x_s - z_s|^{\alpha_s} (t-\tau)^{-M-M_k-m_s\alpha_s^0} \times$$
$$\times \left(E_c(t-\tau,x,\xi) + E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right), \qquad s \in \mathbb{N}_3, \tag{74}$$

$$\left|\Delta_{y_3}^{z_3}\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k}E_c(t-\tau,x,\xi)\times$$

$$\times\left(h^{m_3\alpha_3}+\left|Y_3(h)-z_3\right|^{\alpha_3}\right), \qquad (75)$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\,d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-M_k+\ell_k}, \qquad k\ne 0, \qquad (76)$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\,d\xi\right| \le$$

$$\le C\left|x_s-z_s\right|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-M_k+\ell_k-m_s\alpha_s^0}, \quad s\in\mathbb{N}_3, \quad k\ne 0, \qquad (77)$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^{k'} Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\,d\xi_2\,d\xi_3\right| \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-m_1n_1-M_{k'}+m_2\alpha_2}E_{c_0}^1(t-\tau,x_1-\xi_1), \qquad k'\ne 0, \qquad (78)$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^{k'} Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\,d\xi_2\,d\xi_3\right| \le C\left|x_s-z_s\right|^{\alpha_s^0}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-m_1n_1-M_{k'}+m_2\alpha_2-m_s\alpha_s^0}E_{c_0}^1(t-\tau,x_1-\xi_1), \qquad k'\ne 0, \qquad (79)$$

а також рівності

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\,d\xi_3 = 0, \qquad k_3\ne 0, \qquad (80)$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3) = (-\partial_{\xi_3})^{k_3}Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3), \qquad k_3\ne 0, \qquad (81)$$

в яких $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $y_3\in\mathbb{R}^{n_3}$, $z_s\in\mathbb{R}^{n_s}$, $s\in\mathbb{N}_3$, $\alpha_1^0\in(0,\alpha_1]$, $\alpha_2^0\in(0,\alpha_2]$, $\alpha_3^0\in(0,1]$, $\{k,k'\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, $m_1|k_1|+|k_2|\le 1$, *числа* h *і* α_s *такі, як вище,* $\ell_1 := m_1\alpha_1$ *при* $k_1\ne 0$, $k'=0$, $\ell_2 := m_2\alpha_2$ *при* $k_1=0$, $k'\ne 0$.

Теорема 3. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (10) *виконуються умови* (***i***)–(***iii***). *Тоді для рівняння* (10) *існує КФРЗК* Z_3, *для якого справджуються оцінки*

$$\left|\partial_x^k Z_3(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k}E_c(t-\tau,x,\xi), \qquad (82)$$

$$\left|SZ_3(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-M-1}E_c(t-\tau,x,\xi), \qquad (83)$$

де $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $k=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n$, $m_1|k_1|+|k_2|+|k_3|\le 1$.

КФРЗК Z_j, $j\in\mathbb{N}_3$, визначаються наведеними у вступі формулами (3), (7) і (11), в яких G_j – параметрикс, а W_j – відповідний об'ємний потенціал з невідомою густиною Q_j. Тому доведення теорем 1–3 зводиться до визначення та дослідження властивостей функцій G_j, Q_j і W_j.

Вивчення функції G_1 та ядра K_1 рівняння (14_1) проведемо в **пп**. **3**, **4**, а функціям G_2, G_3, G_j і W_j, $j\in\mathbb{N}_3$, присвячена друга частина роботи, яка буде опублікована в наступному номері журналу.

3. Параметрикс G_1. Властивості функції G_1 опишемо в такій лемі.

Лема 4. *За умов леми 3 для функції* G_1 *справджуються оцінки*

$$\left|\partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C_k(t-\tau)^{-M-M_k} E_c(t-\tau,x,\xi)\,, \tag{84}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C|x_s - z_s|^{\alpha_s}(t-\tau)^{-M-M_k-m_s\alpha_s^0} \times$$
$$\times\left(E_c(t-\tau,x,\xi)+E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right),\qquad s\in\mathbb{N}_3\,, \tag{85}$$

$$\left|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E_c(t-\tau,x,\xi)\times$$
$$\times\left(h^{m_s\alpha_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\alpha_s}\right),\qquad s\in\{2,3\}\,, \tag{86}$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-M_k+m_1\alpha_1},\qquad k\ne 0\,, \tag{87}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi\right| \le C|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-M_k+m_1\alpha_1-m_s\alpha_s^0},\quad k\ne 0\,, \tag{88}$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))\,d\xi_2\,d\xi_3\right| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-m_1n_1-M_k+m_2\alpha_2} E_{c_0}^1(t-\tau,x_1-\xi_1),\qquad k'\ne 0\,, \tag{89}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))\,d\xi_2\,d\xi_3\right| \le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-m_1n_1-M_{k'}-m_s\alpha_s+m_2\alpha_2}\times$$
$$\times\left(E_{c_0}^1(t-\tau,x_1-\xi_1)+E_{c_0}^1(t-\tau,z_1-\xi_1)\right),\qquad k'\ne 0\,, \tag{90}$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3} G_1(t,x;\tau,\xi;(y_2,\xi_3))\,d\xi_3\right| \le C(t-\tau)^{-m_1n_1-m_2n_2-m_3(|k_3|-\alpha_3)}\times$$
$$\times E_{c_0}^1(t-\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^2(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2),\qquad k_3\ne 0\,, \tag{91}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3} G_1(t,x;\tau,\xi;(y_2,\xi_3))\,d\xi_3\right| \le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-m_1n_1-m_2n_2-m_3(|k_3|-\alpha_3)-m_s\alpha_s}\times$$
$$\times E_{c_0}^1(t-\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^2(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2),\qquad k_3\ne 0\,, \tag{92}$$

а також рівності

$$\partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y') = (-\partial_\xi)^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y'),\qquad k'\ne 0\,, \tag{93}$$

$$\partial_x^{k'}\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G_1(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi_2\,d\xi_3 = 0,\qquad k'\ne 0\,, \tag{94}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int_{\mathbb{R}^{n_3}} G_1(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi_3 = 0,\qquad k_3\ne 0\,, \tag{95}$$

у яких $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y' = (y_2, y_3) \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $\{k,k'\} \subset Z_+^n$, $\alpha_s^0 \in (0,1]$, $s \in \mathbb{N}_3$, h *і* α_s *– числа з умов* (15)–(17).

Д о в е д е н н я. Оцінки (84), (86) та рівності (93)–(95) випливають з означення (5) і відповідних оцінок для Z_0 з леми 3. Оцінки (85) у випадку $|x_s - z_s|^{1/m_s} > (t-\tau)/4$, $s \in \mathbb{N}_3$, випливають безпосередньо з оцінок (84).

Справді,

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le \left|\partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| + \left|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k G_1(t,z^{(s)};\tau,\xi;y')\right| \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-M_k} |x_s - z_s|^{\alpha_s^0} |x_s - z_s|^{-\alpha_s^0} \times$$

$$\times \left(E_c(t-\tau,x,\xi) + E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right) \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-M-M_k-m_s\alpha_s^0} \times$$

$$\times \left(E_c(t-\tau,x,\xi) + E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right).$$

У випадку $|x_s - z_s|^{1/m_s} \le (t-\tau)/4$, $s \in \mathbb{N}_3$, використовуємо зображення

$$\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y') = \sum_{j=1}^{n_s} \int_{x_{sj}}^{z_{sj}} \partial_{\zeta_{sj}} \partial_x^k Z_0(t,\zeta_s^{(j)};\tau,\xi;y)\Big|_{y_1=\xi_1} d\zeta_{sj}, \tag{96}$$

де

$$\zeta_1^{(j)} := (x_{11},\dots,x_{1(j-1)},\zeta_{1j},z_{1(j+1)},\dots,z_{1n_1},x_{21},\dots,x_{2n_2},x_{31},\dots,x_{3n_3}),\ j \in \mathbb{N}_{n_1},$$

$$\zeta_2^{(j)} := (x_{11},\dots,x_{1n_1},x_{21},\dots,x_{2(j-1)},\zeta_{2j},z_{2(j+1)},\dots,z_{2n_2},x_{31},\dots,x_{3n_3}),\ j \in \mathbb{N}_{n_2},$$

$$\zeta_3^{(j)} := (x_{11},\dots,x_{1n_1},x_{21},\dots,x_{2n_2},x_{31},\dots,x_{3(j-1)},\zeta_{3j},z_{3(j+1)},\dots,z_{3n_3}),\ j \in \mathbb{N}_{n_3},$$

і за допомогою оцінок (40) і (84) отримаємо

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le \sum_{j=1}^{n_s} \left|\int_{x_{sj}}^{z_{sj}} \left|\partial_{\zeta_{sj}} \partial_x^k Z_0(t,\zeta_s^{(j)};\tau,\xi;y)\Big|_{y_1=\xi_1}\right| d\zeta_{sj}\right| \le$$

$$\le C\sum_{j=1}^{n_s} \left|\int_{x_{sj}}^{z_{sj}} (t-\tau)^{-M-M_k-m_s} E_c(t-\tau,\zeta_s^{(j)},\xi)\, d\zeta_{sj}\right| \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-M_k-m_s} \sum_{j=1}^{n_s} |x_{sj} - z_{sj}| E_{c_0}(t-\tau,x,\xi) \le$$

$$\le C|x-z|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-M-M_k-m_s\alpha_s^0} E_{c_0}(t-\tau,x,\xi).$$

Для встановлення оцінок (87), (89) і (91) використаємо рівності (36), (39) і (59)–(61) та оцінки (35), (37), (38) і (58):

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')\, d\xi\right| = \left|-\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{y_1}^{\xi_1} \partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')\Big|_{y_1=x_1} d\xi\right| \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-M_k} \int_{\mathbb{R}^n} |x_1 - \xi_1|^{\alpha_1} E_c(t-\tau,x,\xi)\, d\xi \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-M_k+m_1\alpha_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c(t-\tau,x,\xi)\,d\xi \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M_k+m_1\alpha_1},$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y')\big|_{y_2=\xi_2}\,d\xi_2\,d\xi_3\right| =$$

$$= \left|-\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta_{y_2}^{\xi_2}\partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y')\Big|_{y_2=x_2} d\xi_2\,d\xi_3\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_{k'}}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \left((t-\tau)^{m_2\alpha_2}+\left|X_2(t-\tau)-\xi_2\right|^{\alpha_2}\right)E_c(t-\tau,x,\xi)\,d\xi_2\,d\xi_3 \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-M_{k'}+m_2\alpha_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} E_{c_0}(t-\tau,x,\xi)\,d\xi_2\,d\xi_3 \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-m_1n_1-M_{k'}+m_2\alpha_2}E^1_{c_0}(t-\tau,x_1-\xi_1),$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} G_1(t,x;\tau,\xi;y')\Big|_{y_3=\xi_3} d\xi_3\right| =$$

$$= \left|-\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \Delta_{y_3}^{\xi_3}\partial_{x_3}^{k_3} G_1(t,x;\tau,\xi;(y_2,y_3))\Big|_{y_3=x_3} d\xi_3\right| \le C(t-\tau)^{-M-m_3|k_3|}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \left((t-\tau)^{m_3\alpha_3}+\left|X_3(t-\tau)-\xi_3\right|^{\alpha_3}\right)E_c(t-\tau,x,\xi)\,d\xi_3 \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-m_3(|k_3|-\alpha_3)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} E_{c_0}(t-\tau,x,\xi)\,d\xi_3 \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-m_1n_1-m_2n_2-m_3(|k_3|-\alpha_3)}\times$$

$$\times E^1_{c_0}(t-\tau,x_1-\xi_1)E^2_{c_0}\left(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2\right).$$

Аналогічно доводимо оцінки (88), (90) і (92). У припущенні, що $\left|x_s-z_s\right|^{1/m_s}\le(t-\tau)/4$, $s\in\mathbb{N}_3$, за допомогою (58) і (96) маємо

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi\right| =$$

$$= \left|-\sum_{j=1}^{n_s}\int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{y_1}^{\xi_1}\partial^k_{\zeta_s^{(j)}}\partial_{\zeta_{sj}} Z_0(t,\zeta_s^{(j)};\tau,\xi;y)\Big|_{y_1=x_1} d\xi\,d\zeta_{sj}\right| \le$$

$$\le C\sum_{j=1}^{n_s}\int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}}(t-\tau)^{-M-M_k-m_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|x_1-\xi_1\right|^{\alpha_1}E_c(t-\tau,\zeta_s^{(j)},\xi)\,d\xi\,d\zeta_{sj} \le$$

$$\le C\sum_{j=1}^{n_s}\int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}}(t-\tau)^{-M-M_k-m_s+m_1\alpha_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c_0}(t-\tau,x,\xi)\,d\xi\,d\zeta_{sj} \le$$

$$\le C\sum_{j=1}^{n_s}\left|x_{sj}-z_{sj}\right|(t-\tau)^{-M_k-m_s+m_1\alpha_1}\le$$

$$\le C\left|x_s-z_s\right|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-M_k-m_s\alpha_s^0+m_1\alpha_1},$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')\Big|_{y_2=\xi_2}d\xi_2\,d\xi_3\right|=$$

$$=\left|-\sum_{j=1}^{n_s}\int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\Delta_{y_2}^{\xi_2}\partial_{\zeta_s^{(j)}}^k\partial_{\zeta_{sj}}G_1(t,\zeta_s^{(j)};\tau,\xi;y')\Big|_{y_2=x_2}d\xi_2\,d\xi_3\,d\zeta_{sj}\right|\le$$

$$\le C\sum_{j=1}^{n_s}\int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}}(t-\tau)^{-M-M_k-m_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\left((t-\tau)^{m_2\alpha_2}+\left|X_2(t-\tau)-\xi_2\right|^{\alpha_2}\right)\times$$

$$\times E_c(t-\tau,\zeta_s^{(j)},\xi)\,d\xi_2\,d\xi_3\,d\zeta_{sj}\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M_k-m_s+m_2\alpha_2}\sum_{j=1}^{n_s}\left|x_{sj}-z_{sj}\right|E_{c_0}^1(t-\tau,x_1-\xi_1)\le$$

$$\le C\left|x_s-z_s\right|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-M-M_k-m_s\alpha_s^0+m_2\alpha_2}E_{c_0}^1(t-\tau,x_1-\xi_1),$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')\Big|_{y_3=\xi_3}d\xi_3\right|=$$

$$=\left|-\sum_{j=1}^{n_s}\int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\Delta_{y_2}^{\xi_2}\partial_{\zeta_s^{(j)}}^k\partial_{\zeta_{sj}}G_1(t,\zeta_s^{(j)};\tau,\xi;y')\Big|_{y_3=x_3}d\xi_3\,d\zeta_{sj}\right|\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-M_k-m_s}\sum_{j=1}^{n_s}\int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\left((t-\tau)^{m_3\alpha_3}+\left|X_3(t-\tau)-\xi_3\right|^{\alpha_3}\right)\times$$

$$\times E_c(t-\tau,\zeta_s^{(j)},\xi)\,d\xi_3\,d\zeta_{sj}\le C(t-\tau)^{-m_1n_1-m_2n_2-M_k-m_s+m_3\alpha_3}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{n_s}\left|x_{sj}-z_{sj}\right|E_{c_0}^1(t-\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^2\left(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2\right)\le$$

$$\le C\left|x_s-z_s\right|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-m_1n_1-m_2n_2-M_k-m_s\alpha_s^0+m_3\alpha_3}\times$$

$$\times E_{c_0}^1(t-\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^2\left(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2\right).\qquad\blacklozenge$$

4. Ядро K_1. Ядро K_1 інтегрального рівняння (14_1) визначається формулою

$$K_1(t,x;\tau,\xi;y'):=\Bigg(\sum_{j,\ell=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_{j\ell}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1\ell}}+\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}+$$

$$+\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_0(t,(x_1,y'))\Bigg)G_1(t,x;\tau,\xi;y'),$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\qquad y'\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}.$$

З цієї формули для $k' \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$ випливають такі рівності:

$$\partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y') := \left(\sum_{j,\ell=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1\ell}} + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} + \right.$$
$$\left. + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y')) \right) \partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y'), \tag{97}$$

$$\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y') = \left(\sum_{j,\ell=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{j\ell}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1\ell}} + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} + \right.$$
$$\left. + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y')) \right) \Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y'), \quad s \in \{2,3\}, \tag{98}$$

$$\Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y') = \left(\sum_{j,\ell=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} \Delta_{y_s}^{z_s} a_{j\ell}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1\ell}} + \right.$$
$$+ \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{y_s}^{z_s} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{y_s}^{z_s} a_0(t,(x_1,y')) -$$
$$- \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{y_s}^{z_s} a_j(t,(\xi_1,y'))\partial_{x_{1j}} -$$
$$\left. - \Delta_{y_s}^{z_s} a_0(t,(\xi_1,y')) \right) \partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y') +$$
$$+ \left(\sum_{j,\ell=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{j\ell}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1\ell}} + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} + \right.$$
$$\left. + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y')) \right)\Bigg|_{y_s=z_s} \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y'), \quad s \in \{2,3\}. \tag{99}$$

За допомогою інтегрування (99) і формул (94), (95) отримаємо ще такі рівності:

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y')\, d\xi_2\, d\xi_3 = \left(\sum_{j,\ell=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{j\ell}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1\ell}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y') \right)\Bigg|_{y_s=z_s} \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y')\, d\xi_2\, d\xi_3, \quad s \in \{2,3\},$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_{x_3}^{k_3} K_1(t,x;\tau,\xi;y')\, d\xi_3 = \left(\sum_{j,\ell=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{j\ell}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1\ell}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y') \right)\Bigg|_{y_s=z_s} \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^{n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_{x_3}^{k_3} G_1(t,x;\tau,\xi;y')\, d\xi_3, \quad k_3 \neq 0, \quad s \in \{2,3\}. \tag{100}$$

Використовуючи рівності (97)–(100), оцінки (84)–(86), умови (15)–(18), нерівності (34), (35) і (37), а також рівність (36), отримуємо оцінки

$$\left|\partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1} E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{101}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C|x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1-m_s\alpha_s^0} \times$$
$$\times \left(E_c(t-\tau,x,\xi) + E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right), \tag{102}$$

$$\left|\Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C\left(h^{m_s\alpha_s} + |Y_s(h) - z_s|^{\alpha_s}\right) \times$$
$$\times (t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\alpha_1} E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{103}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y')\, d\xi_2\, d\xi_3\right| \le C\left(h^{m_s\alpha_s} + |Y_s(h) - z_s|^{\alpha_s}\right) \times$$
$$\times (t-\tau)^{-m_1 n_1 - M_{k'}-1+m_1\alpha_1} E_{c_0}^1(t-\tau, x_1 - \xi_1), \tag{104}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y')\, d\xi_3\right| \le C\left(h^{m_s\alpha_s} + |Y_s(h) - z_s|^{\alpha_s}\right) \times$$
$$\times (t-\tau)^{-m_1 n_1 - m_2 n_2 - M_{k'}-1+m_1\alpha_1} E_{c_0}^1(t-\tau, x_1 - \xi_1) \times$$
$$\times E_{c_0}^2\left(t-\tau, X_2(t-\tau) - \xi_2\right), \tag{105}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y')\, d\xi\right| \le$$
$$\le C\left(h^{m_s\alpha_s} + |Y_s(h) - z_s|^{\alpha_s}\right)(t-\tau)^{-M_{k'}-1+m_1\alpha_1}. \tag{106}$$

В оцінках (101)–(106) $0 \le \tau < t \le T$, $h \in (0,T]$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $k' \in \mathbb{Z}_+^n$ (в оцінках (104)–(106) $k' \ne 0$), а числа α_s^0 і α_s такі, як вище.

Тепер оцінимо приріст $\Delta_{x_1}^{z_1} \partial_x^{k'} K_1$. Достатньо розглянути випадок, коли $|x_1 - z_1|^2 \le (t-\tau)/4$. З рівності (97) випливає, що

$$\Delta_{x_1}^{z_1} \partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y') := \Bigg(\sum_{j,\ell=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{z_1} a_{j\ell}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1\ell}} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{z_1} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_1}^{z_1} a_0(t,(x_1,y'))\Bigg)\partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi) +$$
$$+ \sum_{j,\ell=1}^{n_1} \Delta_{z_1}^{\xi_1} a_{j\ell}(t,(x_1,y'))\Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1\ell}} \partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{z_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y'))\Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_{1j}} \partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi) +$$
$$+ \Delta_{z_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y'))\Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_{1j}} \partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi).$$

За допомогою умови (15), оцінок (84), (85) та нерівності (34) отримуємо

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}K_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1}\Big(|x_1-z_1|^{\alpha_1}(t-\tau)^{m_1\alpha_1}+$$

$$+|x_1-z_1|^{\alpha_1^0}(t-\tau)^{-m_1(\alpha_1^0-\alpha_1)}\Big)E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{107}$$

де α_1^0 – довільне число з проміжку $(0,1]$, а α_1 – число з умови (15). Якщо додатково скористатися нерівністю (87) і рівністю (36), то отримаємо оцінку

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^{k'}K_1(t,x;\tau,\xi;y')\,d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-M_{k'}-1}\Big(|x_1-z_1|^{\alpha_1}(t-\tau)^{m_1\alpha_1}+$$

$$+|x_1-z_1|^{\alpha_1^0}(t-\tau)^{-m_1(\alpha_1^0-\alpha_1)}\Big), \quad \alpha_1^0\in(0,1]. \tag{108}$$

З нерівності (107) випливають оцінки

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}K_1(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le CE_c(t-\tau,x,\xi)\times$$

$$\times\begin{cases}|x_1-z_1|^{\alpha_1^0}(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1-m_1(\alpha_1^0-\alpha_1)}, & \alpha_1^0<\alpha_1,\\ |x_1-z_1|^{\alpha_1}(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1}, & \alpha_1^0=\alpha_1.\end{cases} \tag{109}$$

Висновки. У статті запропоновано умови на коефіцієнти ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами змінних виродження, за яких новою модифікацією класичного методу Леві побудовано КФРЗК та одержано точні оцінки Z_3 і його похідних. Ці результати і методика їх отримання знайдуть застосування для побудови й дослідження КФРЗК для загальніших рівнянь, а також для встановлення коректної розв'язності та інтегрального зображення розв'язків задачі Коші. Обґрунтування вказаних результатів завершується у другій частині роботи.

1. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження // Буков. мат. журн. – 2014. – **2,** № 2-3. – С. 94–106.
2. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Диференц. рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. В. А. Михайлець. – 2016. – **13**, № 1. – С. 108–155.
3. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59,** № 2. – С. 28–42.
   Те саме: *Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I. P.* On the classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables // J. Math. Sci. – 2018. – **231**, No. 4. – P. 507–526. – https://doi.org/10.1007/s10958-018-3830-0
4. *Процах Н. П., Пташник Б. Й.* Нелінійні ультрапараболічні рівняння та варіаційні нерівності. – Київ: Наук. думка, 2017. – 280 с.
5. *Citti G., Pascucci A., Polidoro S.* On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equations arising in mathematical finance // Differ. Integral Equat. – 2001. – **14**, No. 6. – P. 701–738.
6. *Di Francesco M., Pascucci A.* A continuous dependence result for ultraparabolic equations in option pricing // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – **336,** No. 2. – P. 1026–1041. – https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.03.031
7. *Di Francesco M., Pascucci A.* On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type // Appl. Math. Res. Express. – 2005. – **2005,** No. 3. – P. 77–116.
   https://doi.org/10.1155/AMRX.2005.77
8. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.)
   https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9

9. *Foschi P., Pascucci A.* Kolmogorov equations arising in finance: direct and inverse problems // Lect. Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica. Universita degli Studi della Basilicata. – 2007. – **VI.** – P. 145–156.
10. *Ivasishen S. D., Medynsky I. P.* The Fokker–Planck–Kolmogorov equations for some degenerate diffusion processes // Theory Stoch. Process. – 2010. – **16(32),** No. 1. – C. 57–66.
11. *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* On applications of the Levi method in the theory of parabolic equations // Мат. студії. – 2017. – **47,** № 1. – С. 33–46.
https://doi.org/10.15330/ms.47.1.33-46
12. *Kolmogoroff A.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math. – 1934. – **35**, No. 1. – P. 116–117. – https://doi.org/10.2307/1968123
13. *Lanconelli E., Polidoro S.* On a class of hypoelliptic evolution operators // Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. Partial Diff. Eqs. – 1994. – **52**, No. 1. – P. 29–63.
14. *Pascucci A.* Kolmogorov equations in physics and in finance // In: Elliptic and Parabolic Problems. – Basel: Birkhauser, 2005. – Ser. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications / Ed. H. Brezis. – Vol. 63. – P. 313–324.
15. *Polidoro S.* On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov – Fokker – Planck type // Le Matematiche. – 1994. – **49**, No. 1. – P. 53–105.

КЛАССИЧЕСКОЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОЛМОГОРОВА С ДВУМЯ ГРУППАМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ВЫРОЖДЕНИЯ. I

Для вырожденного ультрапараболического уравнения типа Колмогорова с двумя группами пространственных переменных вырождения построено классическое фундаментальное решение задачи Коши. Получены точные оценки этого решения и его производных.

CLASSICAL FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ULTRAPARABOLIC KOLMOGOROV-TYPE EQUATIONS WITH TWO GROUPS OF SPATIAL VARIABLES OF DEGENERATION. I

The classical fundamental solution of the Cauchy problem for degenerate ultraparabolic equation of Kolmogorov type with two groups of spatial variables of degeneration is constructed. Exact estimations of this solution and its derivatives are obtained.

[1] Нац. техн. ун-т України
«Київ. політех. ін-т ім. І. Сікорського», Київ,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[3] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
20.01.17