

ЗВ'ЯЗАНІ ЗАДАЧІ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ

Метою роботи є постановка та дослідження класу контактних задач про зворотній вплив деформування на дію сил, прикладених до штампа. Задачі формуються у вигляді операторного рівняння відносно осідань і поворотів штампа. Отримано аналітичні розв'язки двовимірних і тривимірних зв'язаних задач у випадку дії на штамп гравітаційних та магнітних полів.

Вступ. Робота присвячена дослідженню зв'язаних контактних задач про взаємовплив деформування пружного тіла та зовнішніх сил, прикладених до штампа.

За останні десятиліття дослідження зв'язаних задач склалися у важливий напрямок механіки деформівного твердого тіла [1]. Основна увага приділяється дослідженню поведінки тіл, матеріал яких чутливий до дії полів немеханічної природи – теплових, електромагнітних та інших [6, 7, 9].

Постановка зв'язаних контактних задач здебільшого орієнтується на урахування взаємовпливу деформування і фізико-хімічних процесів в околі областей контакту [2, 5]. Окремий напрямок складають дослідження, у яких зв'язаний характер задач виявляється у взаємодії деформівних твердих тіл і заповнювачів міжконтактних зазорів із урахуванням стисливості заповнювача, фазових переходів та поверхневого натягу [2, 8].

У теорії контактних задач механіки деформівного тіла традиційно вибирають один із таких двох способів зовнішньої дії на штамп:

- до штампа прикладене відоме зовнішнє навантаження;
- задано рух штампа як абсолютно твердого тіла.

У цій роботі вивчається клас задач про взаємодію штампа із деформівним твердим тілом у випадку, коли зовнішні сили, прикладені до штампа, заздалегідь невідомі і залежать від переміщення і повороту штампа. У свою чергу, такі повороти і переміщення є наслідком переміщень точок контактної поверхні і залежать від сил, прикладених до штампа. Виникає зв'язана задача про зворотній вплив деформування на дію зовнішніх сил. Вкажемо, зокрема, на взаємодію штампа з гравітаційним або магнітним полем, коли вплив зовнішніх сил залежить від переміщень штампа.

Зазначимо, що у роботі не враховується чутливість матеріалу деформівного тіла до дії чинників немеханічного походження, а також фізико-хімічні явища на поверхнях контакту. Основна увага спрямована на дослідження безпосереднього взаємовпливу деформування пружного тіла і дії зовнішніх сил, прикладених до штампа.

Метою роботи є постановка нового класу контактних задач механіки деформівного твердого тіла, розробка підходу до розв'язання таких задач та аналіз особливостей контактної взаємодії на прикладі задач двовимірного і тривимірного деформування.

1. Загальна постановка зв'язаних задач. Нехай деформівне тіло перебуває під дією жорсткого штампа. Зовнішні сили, прикладені до штампа, зводяться до головного вектора \mathbf{P} і головного моменту \mathbf{M} . Рух штампа будемо описувати переміщенням \mathbf{U} полюса та поворотом Φ навколо полюса. Під полюсом розуміємо центр основи штампа. Вектори \mathbf{P} та \mathbf{M} заздалегідь невідомі і залежать від переміщень і поворотів штампа.

Введемо оператор A_1 , який парі векторів (\mathbf{P}, \mathbf{M}) ставить у відповідність пару векторів (\mathbf{U}, Φ) як розв'язок контактної задачі механіки деформівного твердого тіла:

$$(\mathbf{U}, \Phi) = A_1(\mathbf{P}, \mathbf{M}).$$

Вважаємо, що за відомими переміщенням \mathbf{U} та поворотом $\bar{\Phi}$ можна однозначно знайти силу та момент, прикладені до штампа, тобто існує оператор A_2 , який парі векторів $(\mathbf{U}, \bar{\Phi})$ ставить у відповідність пару векторів (\mathbf{P}, \mathbf{M}) :

$$(\mathbf{P}, \mathbf{M}) = A_2(\mathbf{U}, \bar{\Phi}).$$

Тоді

$$(\mathbf{U}, \bar{\Phi}) = A_1(A_2(\mathbf{U}, \bar{\Phi})).$$

Введемо оператор A_3 як композицію операторів A_1 та A_2 :

$$A_3 = A_1 \circ A_2,$$

і отримаємо операторне рівняння

$$(\mathbf{U}, \bar{\Phi}) = A_3(\mathbf{U}, \bar{\Phi}). \quad (1)$$

Зв'язана задача зводиться до визначення переміщень і поворотів штампа, які задовольняють операторне рівняння (1).

Зауважимо, що зв'язану задачу можна також сформулювати як задачу розв'язання операторного рівняння

$$(\mathbf{P}, \mathbf{M}) = A_4(\mathbf{P}, \mathbf{M}), \quad (2)$$

де $A_4 = A_2 \circ A_1$.

Після розв'язання операторного рівняння (1) (або рівняння (2)) подальше дослідження полягає у розв'язанні традиційної контактної задачі. Підкреслимо, що постановка зв'язаних задач контактної взаємодії не передбачає використання певної моделі деформівного твердого тіла.

Постановка зв'язаних задач має реальний сенс лише у випадку, коли є можливість фактичної реалізації операторів A_1 та A_2 , зокрема, можливість ефективного розв'язання контактних задач за дії на штамп відомого навантаження. Якщо розв'язок цих задач отримано у замкнутому вигляді, то дослідження зв'язаної задачі істотно спрощується.

У загальному випадку вивчення зв'язаних задач ґрунтується на ітераційних процесах

$$(\mathbf{U}^{(n+1)}, \bar{\Phi}^{(n+1)}) = A_3(\mathbf{U}^{(n)}, \bar{\Phi}^{(n)}),$$

або

$$(\mathbf{P}^{(n+1)}, \mathbf{M}^{(n+1)}) = A_4(\mathbf{P}^{(n)}, \mathbf{M}^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Такі ітераційні процедури фактично означають розщеплення зв'язаної задачі на послідовність традиційних контактних задач. Дослідження збіжності ітераційних процесів потребує накладання певних вимог на оператори A_1 та A_2 і є можливим лише в рамках конкретних задач.

2. Зв'язана контактна задача про дію штампа на пружну півплощину. Нехай штамп з плоскою основою повністю зчеплений з пружною півплощиною (рис. 1).

На штамп діє задана пара сил з моментом M . Під дією цього моменту штамп отримує поворот навколо точки O . Внаслідок цього повороту виникає пара сил з моментом M_* , який залежить від кута повороту штампа.

Наведемо приклади ситуацій, коли виникає потреба у постановці зв'язаних задач такого типу (рис. 2).

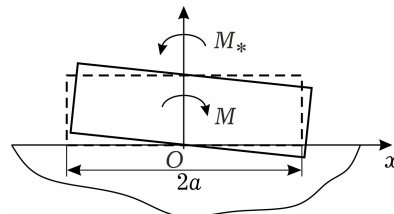


Рис.1 Штамп, зчеплений з пружною півплощиною.

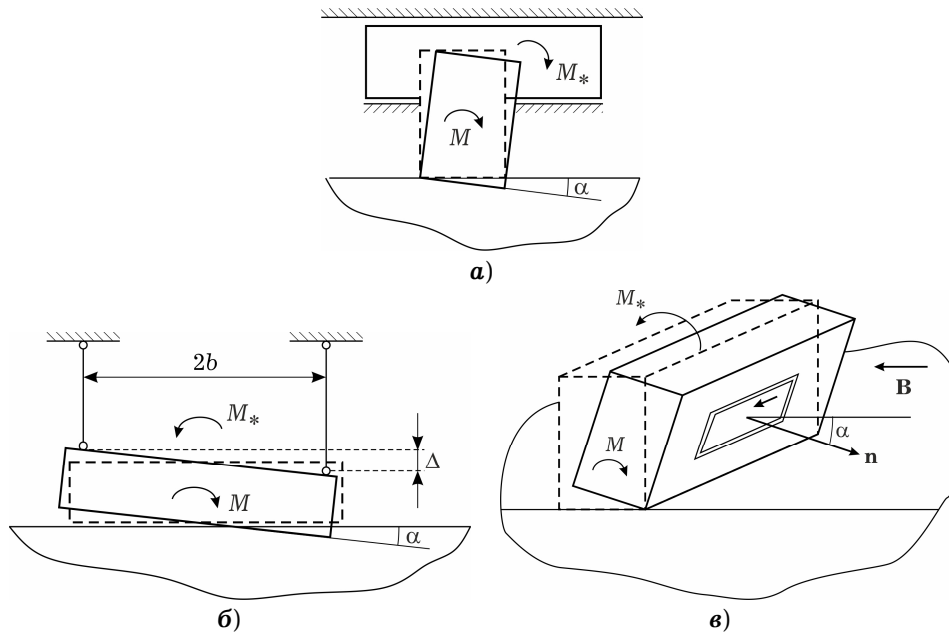


Рис. 2. Зв'язані задачі повороту навколо осі під дією пари сил з моментом M .

Якщо верхній торець штампа перебуває у деформівному зачепленні (рис. 2а), то у процесі повороту виникає реакція зачеплення, яка зводиться до пари сил з моментом M_* .

У ситуації, показаній на рис. 2б, поворот штампа викликає деформацію стрижнів. Якщо Δ – зміна довжини стрижня, то додатковий момент дорівнює

$$M_* = f(\Delta) = f(b \operatorname{tg} \alpha).$$

Нехай штамп містить електричний контур площею S зі струмом I (рис. 2в). Якщо штамп знаходиться у магнітному полі з індукцією \mathbf{B} , то на штамп діє додатковий момент

$$M_* = IBS \sin \alpha.$$

В усіх випадках додатковий момент M_* виникає внаслідок повороту штампа і заздалегідь не є відомий.

Узагальнюючи наведені приклади, вважатимемо, що додатковий момент M_* є відомою функцією кута повороту штампа. Для зручності за незалежну змінну візьмемо $t = \operatorname{tg} \alpha$. Тоді $M_* = f(t)$.

Залежність $f(t)$ фактично є реалізація оператора A_2 , який куту повороту штампа ставить у відповідність момент $M - M_*$, прикладений до штампа.

Реалізація оператора A_1 зводиться до розв'язання задачі про повороти штампа, зчепленого з півплощиною, під дією заданого моменту $M - M_*$. Розв'язок такої задачі, відомої як задача В. А. Флоріна, наводиться, зокрема в [4]. Згідно із цим розв'язком, кут повороту штампа визначається зі співвідношення

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4(1 - \nu^2)}{\pi E a^2} (M - M_*), \quad (3)$$

де E , ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу.

Розподіл контактного тиску має вигляд

$$p(x) = \frac{2(M - M_*)}{\pi a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (4)$$

Співвідношення (1) подамо у вигляді

$$t = \frac{4(1 - \nu^2)}{\pi E a^2} (M - f(t)) = q(M - f(t)), \quad (5)$$

де $q = \frac{4(1 - \nu^2)}{\pi E a^2}$.

Тоді загальне операторне рівняння (1) перетворюється на рівняння з однією невідомою

$$t = \varphi(t), \quad (6)$$

де $\varphi(t) = q(M - f(t))$.

У загальному випадку трансцендентного рівняння наближений розв'язок знаходимо за допомогою ітераційного процесу

$$t_{n+1} = \varphi(t_n), \quad t_0 = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Вважаємо, що функція $f(t)$ є неперервною, диференційовною та монотонно зростаючою, причому $f(0) = 0$. Тоді $\varphi(t)$ буде монотонно спадною функцією, для якої $\varphi(0) = qM > 0$. Звідси випливає, що рівняння (6) має єдиний розв'язок t_* (рис. 3).

Відомо, що для збіжності ітераційного процесу

$$t_{n+1} = \varphi(t_n)$$

достатньо виконання умови

$$|\varphi'(t)| \leq \gamma < 1.$$

Стосовно функції $f(t)$ достатня умова набуває вигляду

$$|f'(t)| \leq \frac{\gamma}{q}, \quad \gamma < 1.$$

У випадку лінійної залежності $M_* = kt$ вдається отримати аналітичний розв'язок задачі. Рівняння (5) набуває тоді вигляду

$$t = q(M - kt),$$

розв'язком якого є

$$t_* = \operatorname{tg} \alpha_* = \frac{qM}{1 + kq}.$$

Цьому розв'язку відповідає додатковий момент

$$M_* = \frac{kq}{1 + kq} M.$$

Розподіл контактної тиску має вигляд

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{2(M - M_*)}{\pi a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{2M}{\pi a^2} \left(1 - \frac{kq}{1 + kq}\right) \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= \frac{2M}{\pi a^2 \left(1 + k \frac{4(1 - \nu^2)}{\pi E a^2}\right)} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{p_0(x)}{1 + k \frac{4(1 - \nu^2)}{\pi E a^2}}, \end{aligned}$$

де $p_0(x)$ – розподіл контактної тиску в задачі В. А. Флоріна.

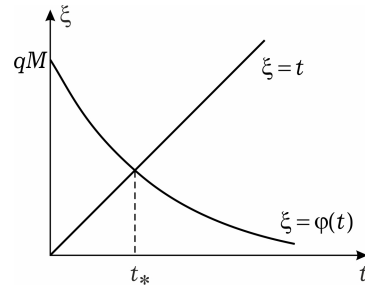


Рис. 3. Графічний розв'язок рівняння (6)

Звернемо увагу на те, що контактний тиск залежить від механічних характеристик пружного тіла. Ця обставина істотно вирізняє зв'язані задачі. Зауважимо, що значення $k > 0$ відповідають напрямку дії моменту M_* , протилежному до напрямку дії моменту M . У випадку, коли $k < 0$, момент M_* діє у тому ж напрямку, що й момент M . Тоді розв'язок має сенс лише за умови

$$|k| < \frac{1}{q} = \frac{\pi E a^2}{4(1 - \nu^2)}.$$

При порушенні цієї умови рівновага штампа неможлива.

3. Тривимірна зв'язана задача про дію важкого штампа на поверхню півпростору. Штмп з площею круговою основою радіуса a притискається до поверхні півпростору силою власної ваги P . Механічний контакт є гладким. Внаслідок асиметрії форми штампа чи неоднорідності у розподілі маси лінія дії сили P зміщена від центра основи на відстань x_0 (рис. 4а). Центр мас штампа знаходиться на висоті h від поверхні півпростору.

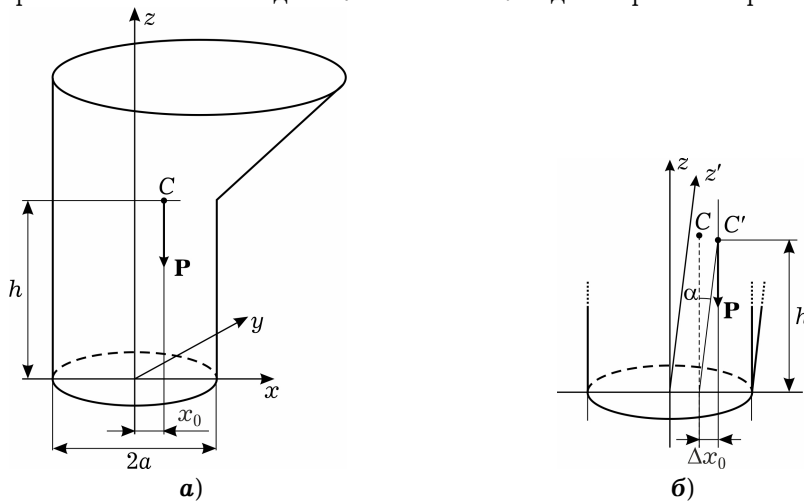


Рис. 4. Поворот асиметричного штампа під дією гравітаційного поля.

Припустимо спочатку, що лінія дії сили P у процесі деформування півпростору залишається незмінною. Розв'язок такої задачі добре відомий [3]. Згідно із цим розв'язком, кут нахилу штампа у площині xOz дорівнює

$$\alpha_0 = \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{E a^3} P x_0, \quad (7)$$

а розподіл контактного тиску має вигляд

$$p_0(x, y) = \frac{1 + 3 \frac{x x_0}{a^2}}{2\pi a} \frac{P}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}. \quad (8)$$

У випадку високого розташування центру мас штампа, при $h \gg a$, вже не можна нехтувати зміною положення лінії дії сили P внаслідок повороту штампа. Зміна положення лінії дії викликає додатковий поворот штампа, а такий поворот, у свою чергу, спричиняє зміщення лінії дії сили P . Складемо операторне рівняння, яке описує таку зв'язану задачу.

Формула (7) відбиває дію оператора A_1 . Визначимо дію оператора A_2 . Позначимо через α заздалегідь невідомий кут повороту осі Oz . Тоді точка перетину лінії дії сили P додатково зміститься на відстань $\Delta x_0 = h \operatorname{tg} \alpha$. Вважаючи кут α малим, покладемо $\Delta x_0 = h \alpha$. Тоді повне зміщення точки

перетину лінії дії P становитиме

$$x_0 + \Delta x_0 = x_0 + h\alpha.$$

Комбінація дії операторів A_1 та A_2 приводить до операторного рівняння, яке в розглядуваному випадку є лінійним рівнянням

$$\alpha = \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{Ea^3} P(x_0 + \alpha h) = \frac{r}{h} (x_0 + \alpha h), \quad (9)$$

де

$$r = \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{Ea^3} Ph.$$

Розв'язок рівняння (9) має вигляд

$$\alpha = \frac{r}{1 - r} \frac{x_0}{h}.$$

Відхилення від центра круга точки перетину лінії дії сили P з площиною основи дорівнює

$$\tilde{x}_0 = x_0 + \alpha h = x_0 + \frac{r}{1 - r} x_0 = \frac{x_0}{1 - r} > x_0.$$

Зауважимо, що розв'язок має сенс лише за умови $1 - r > 0$, тобто за умови

$$\frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{Ea^3} Ph < 1$$

або

$$Ph < \frac{4}{3} \frac{Ea^3}{1 - \nu^2}.$$

При порушенні цієї умови рівновага штампа неможлива.

Розподіл контактного тиску отримуємо із (8), покладаючи $\frac{x_0}{1 - r}$ замість x_0 :

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \frac{1 + 3 \frac{xx_0}{(1 - r)a^2}}{2\pi a} \frac{P}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \\ &= \frac{1 + \frac{3}{1 - \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{Ea^3} Ph} \frac{xx_0}{a^2}}{2\pi a} \frac{P}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

З умови відриву штампа $p(-a, 0) = 0$ маємо

$$1 - \frac{3}{1 - \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{Ea^3} Ph} \frac{x_0}{a} = 0.$$

Звідси знаходимо критичне значення Ph :

$$(Ph)_* = \frac{4}{3} \frac{1 - 3 \frac{x_0}{a}}{1 - \nu^2} Ea^3.$$

Зауважимо, що

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} h_* = h_{\text{lim}} = \frac{4}{3} \frac{1}{1 - \nu^2} \frac{Ea^3}{P},$$

тобто існує гранична висота h_{lim} , починаючи з якої відрив штампа відбувається для як завгодно малого значення x_0 . Визначимо, що Ph_{lim} збігається зі значенням Ph , при якому втрачається рівновага штампа.

На прикладі цієї задачі пояснимо особливості алгоритму ітераційного процесу розв'язання операторного рівняння, тобто рівняння

$$\alpha = \frac{r}{h}(x_0 + \alpha h).$$

За початкове наближення кута α виберемо $\alpha^{(0)} = 0$. Тоді

$$\alpha^{(1)} = \frac{r}{h}(x_0 + \alpha^{(0)}h) = r \frac{x_0}{h}.$$

Далі знаходимо

$$\alpha^{(2)} = \frac{r}{h}(x_0 + \alpha^{(1)}h) = r \frac{x_0}{h} + r \left(r \frac{x_0}{h} \right) = (r + r^2) \frac{x_0}{h}.$$

Аналогічно отримуємо

$$\alpha^{(3)} = \frac{r}{h}(x_0 + \alpha^{(2)}h) = r \frac{x_0}{h} + r(r + r^2) \frac{x_0}{h} = (r + r^2 + r^3) \frac{x_0}{h}.$$

Очевидно, що

$$\alpha^{(n)} = (r + r^2 + \dots + r^n) \frac{x_0}{h}.$$

Користуючись формулою для суми членів геометричної прогресії, знаходимо, що

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{(n)} = \frac{r}{1-r} \frac{x_0}{h}.$$

Цей результат збігається із результатом аналітичного розв'язку. Зауважимо, що сформульована раніше умова рівноваги штамп

$$r = \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{Ea^3} Ph < 1$$

набуває тут вигляду умови збіжності суми нескінченної геометричної прогресії.

4. Контактна задача про зворотній вплив деформування на дію магнітного поля. На поверхні півпростору встановлений соленоїд з циліндричним немагнітним осердям. Вісь соленоїда перпендикулярна до поверхні півпростору. Осердя притискається центральною силою \mathbf{P} . Механічний контакт є гладким. Соленоїд містить N витків площею S . Після підключення до джерела живлення у соленоїді протікає струм I . Соленоїд перебуває в однорідному магнітному полі з індукцією \mathbf{V} (рис. 5).

Опишемо механічну дію магнітного поля на соленоїд зі струмом. Введемо декартову систему координат $Oxyz$, спрямовуючи вісь Oz уздовж осі соленоїда. Осі Ox та Oy виберемо так, щоб вектор \mathbf{V} магнітної індукції був паралельним до площини yOz .

Надалі вважаємо, що струм у витках соленоїда йде проти годинникової стрілки. Позначимо через \mathbf{n} вектор одиничної нормалі до площини витків, спрямований у додатному напрямку осі Oz . Введемо вектор магнітного моменту соленоїда (рис. 6)

$$\mathbf{p}_m = NIS\mathbf{n}.$$

Подамо вектор \mathbf{V} як суму векторів, паралельних до осей Oy та Oz :

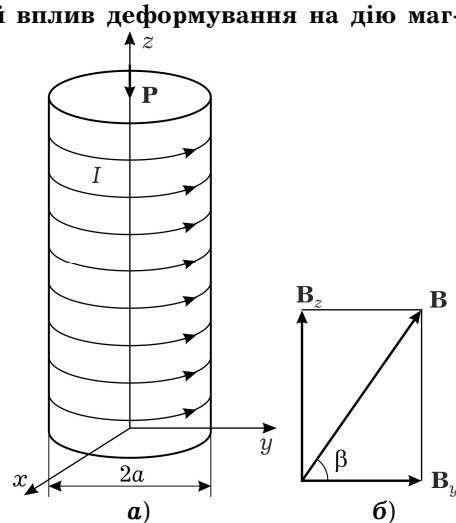


Рис. 5. Соленоїд в однорідному магнітному полі. \mathbf{P}

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_y + \mathbf{V}_z,$$

$$\mathbf{V}_y = \mathbf{V} \cos \beta, \quad \mathbf{V}_z = \mathbf{V} \sin \beta.$$

Користуючись принципом суперпозиції магнітних полів, розглянемо окремо дію полів з індукціями \mathbf{V}_y та \mathbf{V}_z .

У магнітному полі з індукцією \mathbf{V}_y на соленоїд діє механічний момент

$$\mathbf{M}_{xy} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{V}_y,$$

$$|\mathbf{M}_{xy}| = \mathbf{p}_m \mathbf{V}_y \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \mathbf{p}_m \mathbf{V}_y \cos \alpha,$$

де α – кут повороту площини витка внаслідок дії моменту \mathbf{M}_{xy} . Вважаючи кут α малим, маємо $\cos \alpha \approx 1$. Тоді

$$|\mathbf{M}_{xy}| = \mathbf{p}_m \mathbf{V}_y = \mathbf{p}_m \mathbf{V} \cos \beta.$$

Напрямок \mathbf{M}_{xy} показано на рис. 7. Момент \mathbf{M}_{xy} обертає виток навколо осі Oy проти годинникової стрілки.

У магнітному полі з індукцією \mathbf{V}_z на соленоїд діє механічний момент (рис. 8)

$$\mathbf{M}_{xz} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{V}_z, \quad \mathbf{M}_{xz} = \mathbf{p}_m \mathbf{V}_z \sin \alpha \approx \mathbf{p}_m \mathbf{V}_z \alpha.$$

Вектор \mathbf{M}_{xz} має той самий напрямок, що і вектор \mathbf{M}_{xy} . Зауважимо, що момент \mathbf{M}_{xy} залежить від кута повороту осі соленоїда.

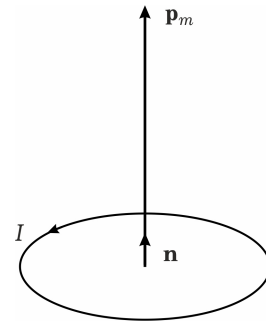


Рис. 6 Вектор магнітного моменту соленоїда

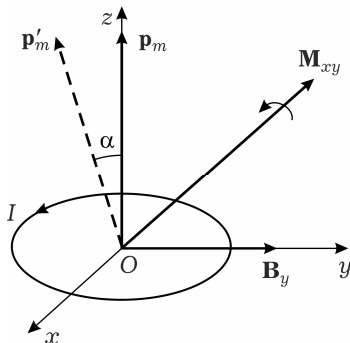


Рис. 7. Механічний момент в полі з індукцією \mathbf{V}_y .

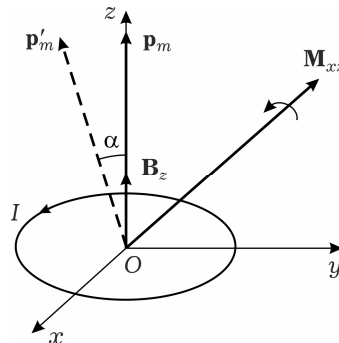


Рис. 8. Механічний момент в полі з індукцією \mathbf{V}_z .

Отже, на соленоїд діє сумарний момент

$$\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_{xy} + \mathbf{M}_{xz}$$

з величиною

$$|\mathbf{M}_x| = \mathbf{p}_m \mathbf{V} \cos \beta + \mathbf{p}_m \mathbf{V} \alpha \sin \beta = |\mathbf{M}_{\max}| (\cos \beta + \alpha \sin \beta),$$

де $|\mathbf{M}_{\max}| = \mathbf{p}_m \mathbf{V} = NIS |\mathbf{V}|$.

Згідно із відомим розв'язком контактної задачі про дію на штамп пари сил з моментом \mathbf{M} [3], поворот штампа з плоскою круговою основою становить

$$\alpha = \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{Ea^3} M.$$

Покладаючи $M = M_x$, отримуємо конкретну форму операторного рівняння:

$$\alpha = \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{Ea^3} M_{\max} (\cos \beta + \alpha \sin \beta) = \delta (\cos \beta + \alpha \sin \beta),$$

$$\text{де } \delta = \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{Ea^3} M_{\max}.$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\alpha = \frac{\delta \cos \beta}{1 - \delta \sin \beta}.$$

Користуючись відомим розв'язком [3], знайдемо розподіл контактної тиску. У випадку дії пари сил з моментом M у площині Oyz контактний тиск описується формулою

$$\tilde{p}(x, y) = \frac{6 \frac{y}{a}}{2\pi a \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \frac{M}{a}.$$

Дія центральної сили P викликає контактний тиск

$$p_0(x, y) = \frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Тоді розподіл тиску, з яким осердя діє на півпростір, має вигляд

$$\begin{aligned} p(x, y) &= p_0(x, y) + \tilde{p}(x, y) = \\ &= \frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} - \frac{6 \frac{y}{a}}{2\pi a \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \frac{M_x}{a} = \\ &= \frac{1}{2\pi a \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \left[P - 6 \frac{y}{a} \frac{M_{\max}}{a} \left(\cos \beta + \frac{\delta \cos \beta}{1 - \delta \sin \beta} \sin \beta \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi a \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \left[P - 6 \frac{y}{a} \frac{M_{\max}}{a} \frac{\cos \beta}{1 - \delta \sin \beta} \right]. \end{aligned}$$

Зауважимо, що розв'язок має сенс за умови $1 - \delta \sin \beta > 0$.

Ця умова виконується незалежно від значення β , якщо вважати, що $\delta < 1$.

Знайдемо мінімальну силу, яка забезпечує контакт осердя в усіх точках основи. Очевидно, що відрив від поверхні півпростору починається у точці $(0, a)$. Із умови $p(0, a) = 0$ знаходимо, що

$$P^* = 6 \frac{M_{\max}}{a} \frac{\cos \beta}{1 - \delta \sin \beta}.$$

Дослідимо залежність P^* від напрямку магнітного поля і розглянемо функцію $P^* = P^*(\beta)$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Із виразу для похідної

$$\frac{dP^*}{d\beta} = 6 \frac{M_{\max}}{a} \frac{\delta - \sin \beta}{(1 - \delta \sin \beta)^2}$$

випливає, що $P^*(\beta)$ досягає найбільшого значення

$$P_{\max}^* = 6 \frac{M_{\max}}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}}$$

при $\beta = \arcsin \delta$, тобто відповідний напрямок магнітної індукції є необхідним для забезпечення контакту.

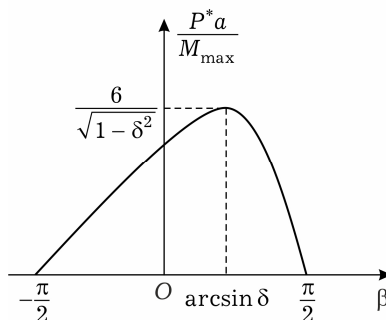


Рис. 9. Графік залежності $P^* = P^*(\beta)$.

Схематичний графік залежності $P^* = P^*(\beta)$ побудовано з урахуванням того, що $P^*(0) = 6 \frac{M_{\max}}{a}$, $P^*\left(\frac{\pi}{2}\right) = P^*\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (див. рис. 9).

Висновки. Запропоновано загальну постановку зв'язаних контактних задач у вигляді операторних рівнянь. Наведено приклади аналітичних розв'язків двовимірних і тривимірних задач про взаємовплив деформування і гравітаційних та магнітних полів.

Подальший розвиток теорії зв'язаних задач слід пов'язувати з поширенням запропонованого підходу на задачі непружного деформування і використання числових методів.

1. Гачкевич О. Р., Кушнір Р. М. Вибрані проблеми механіки зв'язаних полів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 1. – С. 7–24.
Те саме: Hachkevych O. R., Kushnir R. M. Selected problems of the mechanics of coupled fields // J. Math. Sci. – 2018. – **229**, No. 2. – P. 115–132.
2. Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М. Контакт пружних тіл за наявності газу та незмочувальної рідини у періодичних міжповерхневих просвітах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – **51**, № 6. – С. 50–57.
Те саме: Kozachok O. P., Slobodyan B. S., Martynyak R. M. Contact of elastic bodies in the presence of gas and incompressible liquid in periodic interface gaps // Mater. Sci. – 2016. – **51**, No. 6. – P. 804–813.
3. Лурье А. И. Теория упругости. – Москва: Наука, 1970. – 940 с.
Те саме: Lurie A. I. Theory of Elasticity. – Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – iv+1050 p.
4. Рекач В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости. – Москва: Высш. шк., 1977. – 216 с.
5. Chumak K. A., Malanchuk N. I., Martynyak R. M. Partial slip contact problem for solids with regular surface texture assuming thermal insulation or thermal permeability of interface gaps // Int. J. Mech. Sci. – 2014. – **84**. – С. 138–146.
6. Lee S. L., Ou C. R. Gap formation and interfacial heat transfer between thermoelastic bodies in imperfect contact // Trans. ASME. J. Heat Transfer. – 2001. – **123**, No. 2. – P. 205–212.
7. Ezzat M. A. Electromagneto coupled and generalized thermoelasticity // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 3. – P. 1214–1222.
8. Shumelchuk K., Kuzmenko V. Coupled problems of interaction of deformable bodies and liquid of high pressure // Mechanics Control. – 2013. – **32**, No. 4. – P. 136–142.
9. Yevtushenko A., Kuciej M. One-dimensional analytical models of frictional heating during braking // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 7. – P. 3445–3452.

СВЯЗАННЫЕ ЗАДАЧИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Целью работы является постановка и исследование класса контактных задач об обратном влиянии деформирования на действие сил, приложенных к штампу. Задачи формулируются в виде операторного уравнения относительно осадки и поворотов штампа. Получены аналитические решения двумерных и трехмерных связанных задач в случае действия на штамп гравитационных и магнитных полей.

COUPLED PROBLEMS OF CONTACT INTERACTION

The goal of the work is defining and investigating the class of contact problems about reverse impact of deformation on the forces applied to the stamp. The problems are defined using operator equation with respect to stamp displacements and rotations. Analytical solutions for two-dimensional and three-dimensional problems were obtained for the cases when stamp is under the influence of gravitational and magnetic fields.

Дніпр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро

Одержано
12.08.17