

РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ І ДИСИПАТИВНИЙ РОЗІГРІВ ГНУЧКОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ БАЛКИ З П'ЄЗОАКТУАТОРАМИ ПРИ ВРАХУВАННІ ДЕФОРМАЦІЇ ЗСУВУ

Розглянуто задачу про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно опертої гнучкої в'язкопружної балки з п'єзоактуаторами при врахуванні деформації поперечного зсуву. Досліджено вплив геометричної нелінійності, деформації зсуву та умов теплообміну на поверхнях на амплітудно- і температурно-частотні характеристики вимушених коливань балки, теплове руйнування системи та можливість активного демпфування згинної моди коливань за допомогою п'єзоактуатора.

Вступ. Для зниження рівня вимушених коливань конструктивних елементів у вигляді балок, пластин і оболонок з пружних і в'язкопружних матеріалів широко застосовуються методи активного демпфування з використанням п'єзоелектричних актуаторів [4, 8, 9, 12]. За дії інтенсивних гармонічних навантажень процес експлуатації таких елементів, зокрема виготовлених з в'язкопружних матеріалів з низькою зсувною жорсткістю, супроводжується великими прогинами та вібророзігрівом. Побудова електротермомеханічних моделей та розв'язок конкретних задач про коливання і дисипативний розігрів тонкостінних пластинок і оболонок та їх демпфування п'єзоактивними складовими містяться в багатьох наукових працях, результати яких узагальнені в оглядах [6, 11]. Зокрема, в класичній постановці задачі про стаціонарні коливання і вібророзігрів в'язкопружної гнучкої балки з п'єзоактуаторами розглядаються в [2, 7, 10, 13, 14].

У цій статті в рамках уточненої моделі, яка враховує деформації поперечного зсуву, інерцію повороту елементів перерізу і геометричну нелінійність, розглядається задача про резонансні коливання і дисипативний розігрів гнучкої балки з низькою зсувною жорсткістю та її демпфування п'єзоелектричними актуаторами.

1. Постановка задачі. Розглянемо гнучку балку довжини L , ширини b і товщини h_0 , яка віднесена до прямокутної системи координат $Oxyz$ з початком $z = 0$ у центрі серединної площини. Площини $z = \pm h_0/2$ жорстко скріплені з п'єзоактивними накладками-актуаторами однакової товщини δ . Балка виготовлена з пасивного трансверсально ізотропного матеріалу, а п'єзоактуатори – з п'єзокераміки з однаковими властивостями і товщиною поляризації у протилежних напрямках. Для конкретності вважаємо, що верхній і нижній п'єзосhari характеризуються п'єзомодулями $-d_{31}$ і d_{31} відповідно. Матеріали пасивних і п'єзоактивних складових балки вважаються в'язкопружними. В'язкопружні властивості описуються інтегральними операторами лінійної в'язкопружності [3], які для гармонічних процесів деформування зводяться до операцій множення комплексних величин [4] $a * f = (a' + ia'')(f' + if'')$. Поверхні $z = \pm H/2$ (де $H = h_0 + 2\delta$) і $z = \pm h_0/2$ п'єзосhari електродовані. Електродовані площини $z = \pm H/2$ можуть бути розділені на окремі ділянки тонкими розрізами. Балка навантажена поверхневим тиском $q_z = q^0 + q' \cos \omega t$ з постійною і гармонічними складовими, остання з яких змінюється за часом t з частотою ω , близькою до резонансної. Крім того, до зовнішніх електродів актуатора з тією ж частотою підводиться різниця електричних потенціалів $\varphi(H/2) - \varphi(-H/2) = \text{Re}(2V_a e^{i\omega t})$. На внутрішніх електродах $\varphi(\pm h_0/2) = 0$.

Моделювання електромеханічної поведінки досліджуваної балки ґрунтується на гіпотезі прямої лінії для механічних величин по всьому пакету шарів [1, 13]. Відносно електричних змінних вважаємо, що складова вектора електричної індукції D_z у напрямку поляризації не залежить від товщинної координати, а складовими D_x і D_y можна знехтувати [5, 14]. При цьому рівняння електростатики задовольняються тотожно, а складові вектора електричної напруженості E_x і E_y знаходимо з визначальних рівнянь при $D_x = 0$, $D_y = 0$ [5]. Деформації вважаємо малими, але в кінематичних співвідношеннях враховуємо квадрати кутів повороту поперечних перерізів. Рівняння руху є також нелінійними. Краї балки шарнірно оперті, а на зовнішніх поверхнях виконуються умови конвективного теплообміну. Температуру по товщині постулюємо сталою.

На основі прийнятих гіпотез тривимірні визначальні співвідношення поляризованої уздовж осі Oz в'язкопружної п'єзокераміки [5], наприклад, для нижнього шару зводяться до таких виразів:

$$\sigma_x = C_{11}^E * e_x - b_{31} * E_z, \quad \sigma_{xz} = C_{44}^E * \varepsilon_{xz}, \quad (1)$$

$$D_z = b_{31} * e_x + b_{33} * E_z, \quad E_z = -\partial\varphi/\partial z. \quad (2)$$

У залежностях (1), (2) позначено

$$C_{11}^E = \frac{1}{S_{11}^E}, \quad b_{31} = \frac{d_{31}}{S_{11}^E}, \quad b_{33} = \varepsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{S_{11}^E},$$

$$C_{44}^E = \frac{1}{S_{44}^E(1 - K_{15}^2)}, \quad K_{15}^2 = \frac{d_{15}^2}{S_{44}^E \varepsilon_{11}^T},$$

де $S_{jk}^E = S'_{jk}(1 - i\delta_{jk}^s)$, $d_{jk} = d'_{jk}(1 - i\delta_{jk}^d)$, $\varepsilon_{kk}^T = \varepsilon'_{kk}(1 - i\delta_{kk}^\varepsilon)$ – комплексні електромеханічні модулі п'єзокераміки. Тут і надалі символ «*» пропускаємо.

Для верхнього п'єзошару необхідно в (1), (2) замінити знак п'єзомодуля d_{31} на протилежний: $-d_{31}$. Поведінку пасивного трансверсально-ізотропного матеріалу описуємо співвідношеннями (1), у яких слід покласти $C_{11}^E = E$, $C_{44}^E = G_{13}$, $b_{31} = 0$, де E і G_{13} – відповідно комплексні модулі Юнга і поперечного зсуву в нормальному напрямку до площини ізотропії.

Вирази для амплітуд деформацій e_x і e_{xz} записуємо так:

$$e_x = \varepsilon_x + z\alpha_x, \quad e_{xz} = \psi_x - \vartheta_x,$$

$$\varepsilon_x = u_{,x} + 0.5\vartheta_x^2, \quad \alpha_x = \psi_{x,x}, \quad \vartheta_x = -w_{,x}, \quad (3)$$

де u і w – амплітуди поздовжнього і поперечного переміщень координатної поверхні, ψ_x – повний кут повороту нормалі до неї. Індeksi після коми вказують на відповідну похідну.

Інтегруючи рівняння (3) по z і задовольняючи електростатичні умови $\varphi(\pm H/2) = \pm V_a$, $\varphi(\pm h_0/2) = 0$, одержимо

$$\mp D_z = -b_{33} \frac{V_a}{\delta} \mp b_{31} \left(e_x \pm \frac{h_0 + \delta}{2} \alpha_x \right),$$

$$\mp E_z = -\frac{V_a}{\delta} \mp \frac{b_{31}}{b_{33}} \left(\frac{h_0 + \delta}{2} \pm z \right) \alpha_x. \quad (4)$$

Тут верхній і нижній знаки «-» і «+» відносяться до верхнього та нижнього п'єзошарів відповідно.

З урахуванням залежностей (1)–(4) вирази для зусиль і моментів

$$\{N_x, Q_x, M_x\} = b \int_{(H)} \{\sigma_x, \sigma_{xz}, z\sigma_x\} dz$$

шаруватої балки набувають вигляду

$$N_x = C_{11}\varepsilon_x, \quad Q_x = k_s C_{44}\varepsilon_{xz}, \quad M_x = D_{11}\varkappa_x + M_E, \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} C_{11} &= bh_0(E + 2\delta_0 C_{11}^E), & D_{11} &= bh_0(E + 2\delta_*^2 C_{11}^E + 2\delta_0^3 \gamma_{33})/12, \\ C_{44} &= bh_0(G_{13} + 2\delta_0 C_{44}^E), & \delta_0 &= \delta/h_0, \quad \delta_*^3 = 3\delta_0 + 6\delta_0^2 + 4\delta_0^3, \\ \gamma_{33} &= b_{31}^2 / b_{33}, & M_E &= -bh_0(1 + \delta_0)V_a, \end{aligned}$$

а k_s – коефіцієнт зсуву [1].

Рівняння вимушених коливань гнучкої балки при врахуванні деформацій зсуву записуються так [1]:

$$\begin{aligned} N_{x,x} - \bar{\rho}u_{,tt} &= 0, & \bar{Q}_{x,x} - \bar{\rho}w_{,tt} + Fq_z &= 0, \\ M_{x,x} - \bar{Q}_x - N_x \vartheta_x - \tilde{\rho}\psi_{x,tt} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

У рівняннях (6)

$$\begin{aligned} \bar{Q}_x &= Q_x - N_x \vartheta_x, & F &= bh, \\ \bar{\rho} &= bh_0(\rho_0 + 2\rho_1\delta_0), & \tilde{\rho} &= \rho h_0^3(\rho_0 + 2\rho_1\delta_*^3)/12, \end{aligned}$$

ρ_0, ρ_1 – питома густина пасивного і п'єзоактивного матеріалів.

При шарнірному опираючому країв балки механічні граничні умови мають вигляд

$$u = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = L. \quad (7)$$

Усереднене за період коливань і в площині поперечного перерізу рівняння енергії розглядуваної балки запишемо так:

$$\frac{1}{a} T_{,t} = T_{,xx} - \frac{2\alpha_z}{\lambda F} (b + H)(T - T_c) + \langle W \rangle, \quad (8)$$

де

$$\langle W \rangle = \int_{-H/2}^{H/2} (\sigma_x'' e_x' - \sigma_x' e_x'' + D_z' E_z'' - D_z'' E_z') dz \quad (9)$$

– усереднена швидкість дисипації; $\alpha_z = (\alpha_+ + \alpha_-)/2$, α_+ і α_- – коефіцієнти теплообміну на поверхнях $z = \pm H/2$; λ і a – усереднені коефіцієнти теплопровідності та температуропровідності; T_c – температура зовнішнього середовища.

Початкові та граничні теплові умови на краях балки такі:

$$T = T_0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{і} \quad \lambda T_{,x} = \pm \alpha_{0,L}(T - T_c) \quad \text{при} \quad x = 0, x = L, \quad (10)$$

де $\alpha_{0,L}$ – коефіцієнти теплообміну на торцях; T_0 – початкова температура.

2. Побудова розв'язку задачі. При побудові розв'язку поставленої задачі розв'язувальні рівняння (3), (5) і (6) зводимо до нормального вигляду відносно невідомих $u, w, \psi_x, N_x, \bar{Q}_x, M_x$, так що

$$\frac{\partial u}{\partial x} = J_C N_x - \frac{1}{2}(\psi_x^2 - 2J_{SD}\psi_x \bar{Q}_x),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= -\psi_x + J_{SD}\bar{Q}_x, \\
\frac{\partial \psi_x}{\partial x} &= J_D M_x - J_D M_E, \\
\frac{\partial N_x}{\partial x} &= \bar{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} &= \bar{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Fq_z, \\
\frac{\partial M_x}{\partial x} &= \bar{Q}_x + N_x \psi_x - J_{SD}\bar{Q}_x N_x + \bar{\rho} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{11}$$

де $J_C = 1/C_{11}$, $J_D = 1/D_{11}$, $J_{SD} = 1/(k_s C_{44})$.

Для розглядуваного наближення будемо нехтувати перехідними процесами і обмежимося вивченням квазістаціонарних вимушених коливань гнучкої балки, а обумовлений складовою q^0 квазістатичний напружено-деформований стан розглянемо в лінійному наближенні. Наближений розв'язок рівнянь (11) будемо у вигляді гармонічного ряду за часом [5, 7]. Обмежимося побудовою розв'язку в одночастотному наближенні для набору змінних $A = \{w, \psi_x, \bar{Q}_x, M_x\}$, що характеризують згин балки, при утриманні перших двох гармонік у рядах для змінних $B = \{u, N_x\}$ плоского деформування:

$$\begin{aligned}
A &= A^0 + A^1 \cos \omega t - A^2 \cos \omega t, \\
B &= B^0 + \sum_{k=1}^2 \left(B^k \cos k\omega t - B^k \cos k\omega t \right).
\end{aligned} \tag{12}$$

Застосовуючи підхід [5, 7] до рівнянь (11) відносно коефіцієнтів подань (12) шуканих змінних u , w , ψ_x , N_x , \bar{Q}_x , M_x , одержимо систему нелінійних диференціальних рівнянь 22-го порядку, яку лінеаризуємо методом квазілінеаризації [5]. У результаті приходимо до розв'язання послідовності лінійних крайових задач вигляду

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{Y}^{n+1}}{dx} &= \mathbf{A}(\mathbf{Y}^n)\mathbf{Y}^{n+1} + \mathbf{F}(q, M_E, \mathbf{Y}^n), \\
\mathbf{B}_1 \mathbf{Y}^{n+1}(0) &= 0, \quad \mathbf{B}_2 \mathbf{Y}^{n+1}(L) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{13}$$

де

$$\mathbf{Y}^n = \left\{ u, w, N_x, \psi_x, \bar{Q}_x, M_x, u', u'', u', u'', w', w'', N'_x, N''_x, \right. \\
\left. N'_x, N''_x, \psi'_x, \psi''_x, \bar{Q}'_x, \bar{Q}''_x, M'_x, M''_x \right\}^T,$$

\mathbf{Y}^n – вектор-стовпець шуканих функцій; \mathbf{A} і \mathbf{F} – квадратна матриця і вектор-стовпець правих частин системи рівнянь, елементи яких не наводимо тут через громіздкість; \mathbf{B}_1 і \mathbf{B}_2 – прямокутні матриці, які визначаємо з умов (7).

Розв'язування задачі (13) реалізуємо за допомогою типової програми інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь методом дис-

кретної ортогоналізації [1]. Після розв'язання нелінійної задачі коливань балки обчислюємо дисипативну функцію (9), яка в термінах шуканих величин має вигляд

$$\langle W \rangle = \frac{\omega}{2\lambda F} \left\{ N_x'' \varepsilon_x^1 - N_x' \varepsilon_x'' + 2 \left(N_x'' \varepsilon_x^2 - N_x' \varepsilon_x'' \right) + M_x'' \alpha_x^1 - M_x' \alpha_x'' + \right. \\ \left. + \bar{Q}_x'' \varepsilon_{xz}^1 - \bar{Q}_x' \varepsilon_{xz}'' - b(h_0 + \delta)(b_{31}'' \alpha_x' + b_{31}' \alpha_x'') V_a + \frac{2}{\delta} b b_{33} V_a^2 \right\}. \quad (14)$$

Задачу теплопровідності (8), (10) з урахуванням (14) розв'язуємо методом скінченних різниць з використанням явної схеми.

Для активного демпфування механічних коливань балки потрібно визначити амплітуду і фазу електричних потенціалів $\pm V_a$, які необхідно підвести до зовнішніх електродів актуатора для компенсації механічного навантаження. Обмежуючись випадком моногармонічного навантаження ($q^0 = 0$, $q' = q_0$), будемо визначати компенсуюче значення залежністю [7]

$$V_a = k_a(\Delta) q_0, \quad (15)$$

в якій k_a – коефіцієнт керування, $\Delta = (x_1 - x_0)/L$ – параметр розміру актуатора, x_0 і x_1 – координати початку і кінця актуатора.

Оптимальний коефіцієнт k_a обчислюємо на основі розв'язку лінійної задачі за формулою

$$k_a = \frac{|w_{q \max}|}{|w_{E \max}|}. \quad (16)$$

Тут $|w_{q \max}|$ і $|w_{E \max}|$ – розраховані на частоті лінійного резонансу максимальні амплітуди прогину балки при навантаженнях $q^0 = 1 \text{ Па}$ ($V_a = 0$) і $V_a = 1 \text{ В}$ ($q_0 = 0$) відповідно. Протифазність навантаження враховуємо залежністю $V_a(\cos \omega t + \pi) = -V_a \cos \omega t$.

3. Результати обчислень і їх аналіз. Числові розрахунки проведено для прямокутної у поперечному розрізі тришарової балки з такими комплексними характеристиками пасивного шару [7]:

$$E = E' + i E'', \quad E' = E^k (k\omega)^p, \quad E'' = E' \beta (k\omega)^q, \quad G_{13} = 0.02 E^k, \quad k = 1, 2, \\ E = 0.308 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \beta = 0.16, \quad q = -0.145, \quad p = 0.076, \\ \rho_0 = 2770 \text{ кг/м}^3, \quad \lambda = 0.45 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°С)}.$$

П'єзокерамічні шари виготовлені із п'єзокераміки ЦТСтБС-2 з такими числовими значеннями складових комплексних модулів:

$$s'_{11} = 12.5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}, \quad s'_{55} = 39.7 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}, \\ d'_{31} = -1.6 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}, \quad d'_{15} = 4.5 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}, \quad \varepsilon'_{33} = 21 \cdot 10^2 \varepsilon_0, \\ \varepsilon'_{11} = 18.5 \cdot 10^2 \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}, \quad \delta_{11}^s = 0.16 \cdot 10^{-2}, \\ \delta_{55}^s = 0.14 \cdot 10^{-2}, \quad \delta_{31}^d = 0.4 \cdot 10^{-2}, \quad \delta_{15}^d = 0.35 \cdot 10^{-2}, \\ \delta_{33}^e = 0.35 \cdot 10^{-2}, \quad \delta_{11}^e = 0.5 \cdot 10^{-2}, \quad \rho_{1,2} = 7520 \text{ кг/м}^3.$$

Геометричні параметри балки є такими: $L = 0.4 \text{ м}$, $h_0 = 0.01 \text{ м}$, $\delta = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, а коефіцієнт поперечного зсуву $k_s = 5/6$ [1].

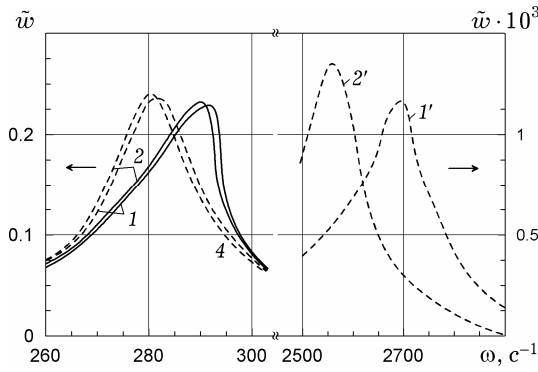


Рис. 1

На рис. 1 наведено амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) максимальних амплітуд відносного прогину $\tilde{w} = |w|_{x=L/2}|/h_0$ при моногармонічному механічному навантаженні балки з амплітудою $q' = 0.2 \cdot 10^5$ Па ($q^0 = 0$, $V_a = 0$) в околі частот першого (криві 1, 2) і другого (криві 1', 2') резонансів згинної моди коливань. Тут криві 1, 1' обчислено без урахування деформацій поперечного зсуву, а криві 2, 2' – при її врахуванні. При цьому штрихові криві відповідають лінійній задачі, а суцільні – геометрично нелінійній. Представлені на рис. 1 криві та виконані розрахунки показують, що врахування деформацій поперечного зсуву приводить до зменшення резонансної частоти та збільшення амплітуди прогинів. Цей ефект проявляється більшою мірою при коливаннях балки в околі частот другого резонансу та при збільшенні відношення E/G_{13} .

Вплив геометричної нелінійності характеризується формуванням нелінійної АЧХ жорсткого типу при коливаннях досліджуваної балки в околі частоти першого резонансу та відсутністю такого впливу на частотах в околі другого резонансу, на яких амплітуда на порядки є нижчою.

На рис. 2 для досліджуваної гнучкої балки показано АЧХ в околі першого резонансу коливань при спільній дії механічного навантаження $q^0 = 0.2 \cdot 10^5$ Па і протифазно підведеної різниці електричних потенціалів $\pm V_a = k_a q^0$ до електродів актуатора. Криві 1-4 розраховано при $k_a = 0$, $0.25 \cdot 10^{-3}$, $0.5 \cdot 10^{-3}$, $0.129 \cdot 10^{-2}$ В/Па відповідно. Зауважимо, що значення $k_a = 0.129 \cdot 10^{-2}$ В/Па обчислено за формулою (16) і відповідає оптимальній величині потенціалу V_a для компенсації дії механічного навантаження (крива 4).

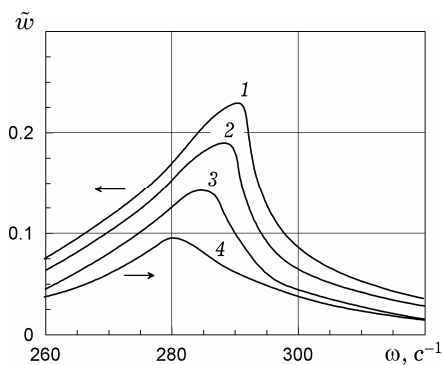


Рис. 2

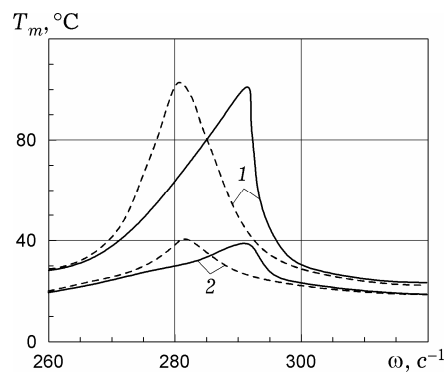


Рис. 3

На рис. 3 кривими **1, 2** показано температурно-частотні характеристики усталеної (при $\tau = at/L^2 = 0.1$) максимальної температури вібророзігріву $T_m = T|_{x=L/2}$, розраховані при $\alpha_{+,-} = \alpha_{0,L} = \alpha_s = 0.1, 1.0 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°С})$, які відповідають АЧХ, що характеризуються кривими **2** на рис. 1. Криві на рис. 3 демонструють істотну залежність температури вібророзігріву тонкостінної гнучкої балки від умов теплообміну із навколишнім середовищем.

При відповідних умовах теплообміну та високих амплітудах гармонічного навантаження розігрів елементів із в'язкопружних пасивних і п'єзоактивних складових може досягати критичної температури, при якій система втрачає працездатність через розм'якшення пасивного матеріалу або через деполаризацію п'єзоактивної складової. Тому важливо визначити критичні параметри навантаження, при яких система деградує через вібророзігрів. Розглянемо залежності усталеної ($\tau = 0.1$) максимальної температури дисипативного розігріву T_m від амплітуди навантаження q при різних коефіцієнтах теплообміну α_s . Такі залежності характеризуються кривими **1–3** на рис. 4, які розраховано на частоті лінійного резонансу $\omega = 282 \text{ с}^{-1}$ при $\alpha_s = 1.0, 1.0, 5.0 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°С})$ відповідно. Приймемо, що розм'якшення пасивного матеріалу настає при температурі $T_k = 120 \text{ °С}$, а деградація системи – при досягненні T_k хоча би в одній точці. Тоді значення абсцис на рис. 4, при яких криві перетинаються з ординатою $T_k = 120 \text{ °С}$, будуть визначати критичну величину амплітуди q_k , при якій конструкція втрачає працездатність. Залежність q_k від коефіцієнта теплообміну α_s показано на рис. 5.

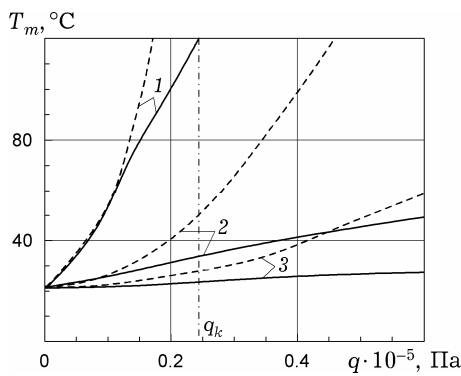


Рис. 4

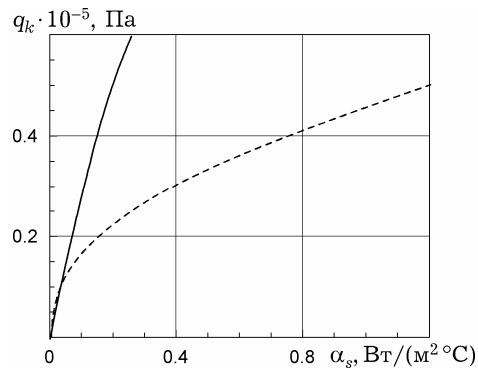


Рис. 5

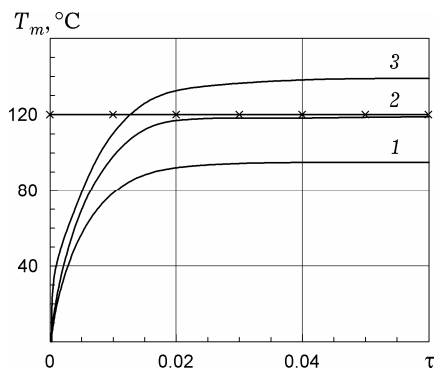


Рис. 6

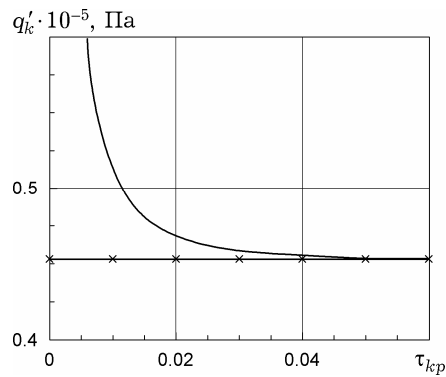


Рис. 7

Аналіз кривих на рис. 4, рис. 5 показує, що при коливаннях гнучкої балки на частоті лінійного резонансу $\omega = 282 \text{ с}^{-1}$ інтенсифікація теплообміну на її поверхнях та врахування геометричної нелінійності (суцільні криві) приводять до збільшення критичних значень q_k амплітуд механічного навантаження, при яких настає теплове руйнування конструкції.

При навантаженнях з амплітудою $q > q_k$ існує критичний час τ_k , при якому температурний режим сягає критичної температури, не досягнувши стаціонарного стану. Для коефіцієнта теплообміну $\alpha_s = 1.0 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ еволюція максимальної температури вібророзігріву T_m балки за параметром часу τ показана на рис. 6. Тут криві 1–3 отримано на основі розв'язку лінійної задачі на частоті $\omega = 282 \text{ с}^{-1}$ при $q = 0.4, 0.456, 0.5 \text{ Па}$ відповідно. Хрестиками позначено критичну величину T_k , яка відповідає q_k (крива 2). Значення абсциси точки перетину лінії з горизонтальною прямою T_k визначає критичний параметр часу τ_k . На рис. 7 наведено залежність амплітуди навантаження $q > q_k$ (q_k позначено хрестиком) від критичного параметра $\tau_{кр}$. Ця крива є аналогом кривих Велера з теорії циклічного руйнування матеріалів.

Висновки. Наведено наближену постановку та числовий розв'язок задачі про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно опертої в'язкопружної гнучкої балки з п'єзоактуаторами при електромеханічному моногармонічному навантаженні та врахуванні деформації поперечного зсуву. Досліджено вплив деформації зсуву, геометричної нелінійності та умов теплообміну на поверхні балки на її динамічні характеристики, температуру дисипативного розігріву, критичні значення амплітуд механічного навантаження, при яких відбувається теплове руйнування системи. Показано можливість демпфування вимушених коливань балки за допомогою п'єзоактуаторів.

1. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т. / Под ред. А. Н. Гузя. – Т. 4.)
2. Жук Я. А., Сенченков И. К. Моделирование стационарных колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных неупругих элементов, содержащих пьезоактивные слои // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 5. – С. 80–91.
Te same: Zhuk Ya. A., Senchenkov I. K. Modelling the stationary vibrations and dissipative heating of thin-walled inelastic elements with piezoelectric layers // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No. 5. – P. 546–556.
3. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – Москва: Наука, 1970. – 280 с.
4. Карнаухов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: Житомир. держ. технолог. ун-т, 2005. – 428 с.
5. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 222 с.
6. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И. Термомеханика неупругих тонкостенных элементов конструкций с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при гармоническом нагружении (обзор) // Прикл. механика. – 2017. – **53**, № 1. – С. 9–74.
Te same: Karnaukhov V. G., Kyrychok I. F., Kozlov V. I. Thermomechanics of inelastic thin-walled structural members with piezoelectric sensors and actuators under harmonic loading (review) // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, No. 1. – P. 6–58.
7. Киричок И. Ф., Сенченков И. К., Червiнко О. П. Вимушені коливання і вібророзігрів в'язкопружних балок з п'єзоелектричними сенсорами і актуаторами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 2. – С. 112–124.

- Te same: *Kyrychok I. F., Senchenkov I. K., Chervinko O. P.* Forced vibrations and vibration heating of viscoelastic beams with piezoelectric sensors and actuators // *J. Math. Sci.* – 2016. – **215**, No. 2. – P. 143–158.
8. *Djojodihardjo H., Jafari M., Wiriadidjaja S., Ahmad K. A.* Active vibration suppression of an elastic piezoelectric sensor and actuator fitted cantilevered beam configurations as a generic smart composite structure // *Compos. Struct.* – 2015. – **132**. – P. 848–863.
 9. *Gabbert U., Tzou H. S.* Smart structures and structronic systems. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001. – 384 p.
 10. *Guz I. A., Zhuk Y. A., Kashtalyan M.* Dissipative heating and thermal fatigue life prediction for structures containing piezoactive layers // *Technische Mechanik.* – 2012. – **32**, No. 2-5. – P. 238–250.
 11. *Rao S. S., Sunar M.* Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of structure: A survey // *Appl. Mech. Rev.* – 1994. – **47**, No. 44. – P. 113–123.
 12. *Selim B. A., Zhang L. W., Liew K. M.* Active vibration control of CNT-reinforced composite plates with piezoelectric layers based on Reddy's higher-order shear deformation theory // *Compos. Struct.* – 2017. – **163**. – P. 350–364.
 13. *Zhuk Y. A., Guz I. A.* Dissipative heating of thin-wall structures containing piezoactive layers // In: *Encyclopedia of Thermal Stresses* / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 971–985.
 14. *Zhuk Y. A., Guz I. A., Sands C. M.* Analysis of the vibrationally induced dissipative heating of thin-wall structures containing piezoactive layers // *Int. J. Non-Linear Mech.* – 2012. – **47**, No. 2. – P. 105–116.

РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ГИБКОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ БАЛКИ С ПЬЕЗОАКТУАТОРАМИ ПРИ УЧЕТЕ ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА

Рассмотрена задача о вынужденных резонансных колебаниях и диссипативном разогреве шарнирно опертой гибкой вязкоупругой балки с пьезоактуаторами при учете деформации поперечного сдвига. Исследовано влияние геометрической нелинейности, деформации сдвига и условий теплообмена на поверхностях на амплитудно- и температурно-частотные характеристики вынужденных колебаний балки, тепловое разрушение системы и возможность активного демпфирования изгибной моды колебаний при помощи пьезоактуатора.

RESONANT VIBRATIONS AND DISSIPATIVE HEATING OF A FLEXIBLE VISCOELASTIC BEAM WITH PIEZOACTUATORS ACCOUNTING FOR SHEAR STRAIN

A problem on forced resonant vibrations and dissipative heating of hinged flexible beam with piezoactuators with taking into account the in-plane shear strain is considered. Influence of geometrical nonlinearity, in-plane shear strain and heat exchange conditions on the surfaces onto amplitude- and temperature frequency characteristics of the forced vibration of the beam, on the thermal failure of the system is investigated. Capability of active damping of the flexural vibration mode by means of piezoactuator is studied.

¹ Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ,

Одержано

² Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ,

19.03.17

³ Київ. нац. техн. ун-т України «КПІ» ім. І. Сікорського, Київ