УДК 512.643

В. М. Прокіп

ПРО ПОДІЛЬНІСТЬ ІЗ ЗАЛИШКОМ МАТРИЦЬ НАД ОБЛАСТЮ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ

Досліджується задача про подільність матриць із залишком над областю головних ідеалів R. Встановлено умови, за яких для пари $(n \times n)$-матриць A і B над областю R існує єдина пара $(n \times n)$-матриць P і Q над R таких, що $B = AP + Q$. Наведено застосування отриманих результатів для знаходження спеціальних розв'язків матричного рівняння типу Сильвестра.

Вступ. Нехай K – комутативна область з одиницею $e \neq 0$. Надалі через $M_{m,n}(K)$ будемо позначати множину $(m \times n)$-матриць над K, а через $0_{m,n}$ – нульову $(m \times n)$-матрицю.

Якщо $K = E$ – евклідова область, в якій визначено норму, тобто задано функцію $\varphi : E \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_+$, то в області E можливе ділення із залишком, тобто для кожної пари елементів $a, b \in E$, $a \neq 0$, існують елементи $p, q \in E$ такі, що $b = ap + q$, де $q = 0$ або $\varphi(q) < \varphi(a)$ [2, 6, 12, 24]. Закономірно виникає питання щодо поширення такого представлення для елементів як комутативних, так і некомутативних кілець (див. [12, Chap. II]). Ця задача досліджувалась в роботах [3, 7, 8, 11, 17, 19, 21, 22]).

Якщо $E = F[\lambda]$ – кільце многочленів над полем F, то в кільці матриць $M_{n,n}(F[\lambda])$ ділення із залишком є можливим при певних обмеженнях. Нехай $A(\lambda), B(\lambda) \in M_{n,n}(F[\lambda])$ і $A(\lambda) = A_0\lambda^r + A_1\lambda^{r-1} + \ldots + A_r$ – регулярна многочленна матриця степеня r, тобто $\det A_0 \neq 0$. Тоді для матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ існує єдина пара матриць $P(\lambda), Q(\lambda) \in M_{n,n}(F[\lambda])$ таких, що

$$B(\lambda) = A(\lambda)P(\lambda) + Q(\lambda), \tag{1}$$

де $Q(\lambda) = 0_{n,n}$ або $\deg Q(\lambda) < \deg A(\lambda)$ (див. [1, Гл. IV]). У роботі [26] цей результат узагальнено і доведено наступне: для матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$, таких, що $A(\lambda), B(\lambda) \in M_{n,n}(F[\lambda])$ і $A(\lambda)$ – неособлива матриця, яка елементарними перетвореннями стовпчиків зводиться до регулярної многочленної матриці, тобто для $A(\lambda)$ існує матриця $W(\lambda) \in GL(n, F[\lambda])$ така, що $A(\lambda)W(\lambda) = D(\lambda)$ – регулярна матриця, існує єдина пара матриць $P(\lambda), Q(\lambda) \in M_{n,n}(F[\lambda])$ таких, що виконується рівність (1), причому $Q(\lambda) = 0_{n,n}$ або $\deg Q(\lambda) < \deg D(\lambda)$.

Подільність матриць із залишком над евклідовою областю E (в якій визначена евклідова норма φ), досліджувалась в роботі [7]. У цій статті доведено, якщо $A, B \in M_{n,n}(E)$ і $\det A \neq 0$, то для матриць A і B існують матриці $P, Q \in M_{n,n}(E)$ такі, що $B = AP + Q$, при цьому $Q = 0_{n,n}$ або $\varphi(Q) < \varphi(A)$. Отже, подільність із залишком при деяких обмеженнях має місце для матричних кілець над евклідовими областями, тобто алгебра матриць $M_{n,n}(E)$ над евклідовою областю E є лівим та правим евклідовим кільцем (див. [11, теорема 1]). У статті [21] доведено, що алгебра матриць $M_{n,n}(K)$ над комутативним кільцем K є лівим та правим евклідовим кільцем тоді й тільки тоді, коли K є кільцем головних ідеалів.

Надалі $K = R$ − область головних ідеалів. Очевидно, що для матриць $A, B \in M_{n,n}(R)$ існують матриць $P, Q \in M_{n,n}(R)$ такі, що $B = AP + Q$. Якщо ж для матриць A і B існує ще одна пара матриць $P_1, Q_1 \in M_{n,n}(R)$, відмінна від пари матриць P, Q, така, що $B = AP_1 + Q_1$, то легко бачити, що матриця A є лівим дільником матриці $Q - Q_1$. Відмітимо, що в статті [5] наведено умови, за яких для матриць $A, B \in M_{n,n}(R)$ виконується рівність $A = BC$.

У цій роботі встановимо умови, за яких для пари матриць $A, B \in M_{n,n}(R)$ існує єдина пара матриць $P, Q \in M_{n,n}(R)$ таких, що матриця B допускає зображення у вигляді $B = AP + Q$. На підставі отриманих результатів описано спеціальні розв'язки матричного рівняння Сильвестра над областю головних ідеалів.

1. Основні результати. Позначимо через R_+ множину неасоційованих елементів області R. Кожному елементу $a \neq 0$ із R_+ поставимо у відповідність фактор-кільце $R/(a)$ за ідеалом $(a) = Ra$. Нехай, далі, $\mathcal{A}_i$, $i = 0,1,2,\ldots$, − класи лишків фактор-кільця $R/(a)$. У кожному класі лишків $\mathcal{A}_i$ фактор-кільця $R/(a)$ зафіксуємо по одному елементу $a_i \in \mathcal{A}_i$, тобто $\mathcal{A}_i$ запишемо у вигляді $\mathcal{A}_i = \{a_i + Ra\}$. При цьому у фактор-кільці $R/(a)$ нульовий клас $\mathcal{A}_0$ будемо представляти нулем області R, тобто $\mathcal{A}_0 = Ra$, а одиничний клас $\mathcal{A}_1 = \{e + Ra\}$ − одиницею області R. Множину елементів $R_a = \{0, e, a_2, \ldots, a_k, \ldots\}$ називають повною системою лишків за ідеалом $(a) = Ra$ (див. [6, 24]). Отже, кільце R можна представити у вигляді $R = \bigcup_i \{a_i + Ra\}$, де a_i − фіксовані елементи із класів лишків $\mathcal{A}_i$. Очевидно, що $a_i \neq a_j$ для $i \neq j$.

Нагадаємо, що неособлива матриця $A \in M_{n,n}(R)$ домноженням справа на оборотну матрицю $W \in GL(n,R)$ зводиться до форми Ерміта (див. [24, Chap. II]), тобто

$$AW = H_A = \left\| \begin{matrix} h_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ h_{21} & h_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n1} & h_{n2} & \ldots & h_{n.n-1} & h_n \end{matrix} \right\| \tag{2}$$

− нижня трикутна матриця, у якій $h_i \in R_+$ для всіх $1 \leq i \leq n$, і h_{ij} належать повній системі лишків R_{h_i} за ідеалом $(h_i) = Rh_i$ для всіх $1 \leq j < i \leq n$. Якщо для деякого $1 \leq i_0 \leq n$ елемент $h_{i_0} = e$, то $h_{i_0,j} = 0$ для всіх $1 \leq j \leq i_0 - 1$. Надалі під терміном форма Ерміта будемо розуміти, що неособлива матриця $A \in M_{n,n}(R)$ домноженням справа на матрицю $W \in GL(n,R)$ зведена до вигляду (2). Зазначимо, що форма Ерміта H_A для матриці $A \in M_{n,n}(R)$ визначена однозначно.

Теорема 1. *Нехай* $A, B \in M_{n,n}(R)$ *і* A *− неособлива матриця. Нехай, далі, матриця* H_A, *визначена формулою* (2) (*де* $W \in GL(n,R)$), *є формою Ерміта матриці* A. *Тоді для матриць* A *і* B *існує єдина пара матриць* $P, Q \in M_{n,n}(R)$ *таких, що* $B = AP + Q$, *де* $Q = 0_{n,n}$ *або елементи* k*-го* *рядка* $\|q_{k1} \quad q_{k2} \quad \dots \quad q_{kn}\|$ *матриці* Q *належать до повної системи лишків* R_{h_k} *за ідеалом* $(h_k) = Rh_k$ *для всіх* $1 \le k \le n$.

Д о в е д е н н я. Нехай H_A – форма Ерміта матриці A. Позначимо через $H_{11}, H_{12}, \dots, H_{1n}$ – суміжні класи за ідеалом (h_1), у яких містяться елементи $\|b_{11} \quad b_{12} \quad \dots \quad b_{1n}\|$ першого рядка матриці B, тобто $b_{1i} \in H_{1i}$, $1 \le i \le n$. Нехай, далі, елементи $q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1n}$ із повної системи лишків R_{h_1} за ідеалом (h_1) є представниками суміжних класів $H_{11}, H_{12}, \dots, H_{1n}$, тобто $q_{1i} \in H_{1i}$. Так як $b_{1i} = q_{1i} \pmod{h_1}$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$, то для елементів $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}$ існують елементи $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n} \in R$ такі, що $b_{1i} = h_1 c_{1i} + q_{1i}$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$. Звідси отримуємо, що для першого рядка матриці B існує зображення у вигляді

$$\|b_{11} \quad b_{12} \quad \dots \quad b_{1n}\| = h_1 \|c_{11} \quad c_{12} \quad \dots \quad c_{1n}\| + \|q_{11} \quad q_{12} \quad \dots \quad q_{1n}\|.$$

Тепер за другим рядком $\|b_{21} \quad b_{22} \quad \dots \quad b_{2n}\|$ матриці B та отриманим рядком $\bar{C}_1 = \|c_{11} \quad c_{12} \quad \dots \quad c_{1n}\|$ побудуємо рядок $\|d_{21} \quad d_{22} \quad \dots \quad d_{2n}\|$ таким чином:

$$\|d_{21} \quad d_{22} \quad \dots \quad d_{2n}\| = \|b_{21} \quad b_{22} \quad \dots \quad b_{2n}\| - h_{21}\bar{C}_1.$$

Нехай $H_{21}, H_{22}, \dots, H_{2n}$ – суміжні класи за ідеалом (h_2), у яких містяться елементи $d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2n}$, тобто $d_{2i} \in H_{2i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Нехай, далі, елементи $q_{21}, q_{22}, \dots, q_{2n}$ із повної системи лишків R_{h_2} за ідеалом (h_2) є представниками суміжних класів $H_{21}, H_{22}, \dots, H_{2n}$, тобто $q_{2i} \in H_{2i}$. Оскільки $d_{2i} = q_{2i} \pmod{h_2}$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$, то елементи $d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2n}$ запишемо у вигляді $d_{2i} = h_2 c_{2i} + q_{2i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, де $c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n} \in R$. На підставі цього отримуємо

$$\|d_{21} \quad d_{22} \quad \dots \quad d_{2n}\| = h_2 \|c_{21} \quad c_{22} \quad \dots \quad c_{2n}\| + h_{21} \|q_{21} \quad q_{22} \quad \dots \quad q_{2n}\|.$$

За третім рядком $\|b_{31} \quad b_{32} \quad \dots \quad b_{3n}\|$ матриці B, рядком $\bar{C}_1$ та отриманим рядком $\bar{C}_2 = \|c_{21} \quad c_{22} \quad \dots \quad c_{2n}\|$ побудуємо рядок $\|d_{31} \quad d_{32} \quad \dots \quad d_{3n}\|$, який визначимо так:

$$\|d_{31} \quad d_{32} \quad \dots \quad d_{3n}\| = \|b_{31} \quad b_{32} \quad \dots \quad b_{3n}\| - h_{31}\bar{C}_1 - h_{33}\bar{C}_2.$$

Як і в попередньому випадку, елементи d_{3j}, які містяться у суміжних класах R_{h_3} за ідеалом (h_3), запишемо у вигляді $d_{3j} = h_3 c_{3j} + q_{3j}$, де $c_{31}, c_{32}, \dots, c_{3n} \in R$, а елементи q_{3j} належать до повної системи H_{3j}, $q_{3j} \in H_{3j}$, для всіх $j = 1, 2, \dots, n$.

Продовжуючи ці міркування далі, в кінцевому результаті, за останнім рядком $\|b_{n1} \quad b_{n2} \quad \dots \quad b_{nn}\|$ матриці B та отриманими рядками $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, …, $\bar{C}_{n-1}$ побудуємо рядок, який визначимо таким чином:

$$\|d_{n1} \quad d_{n2} \quad \dots \quad d_{nn}\| = \|b_{n1} \quad b_{n2} \quad \dots \quad b_{nn}\| -$$
$$- h_{n1}\bar{C}_1 - h_{n2}\bar{C}_2 - \dots - h_{n,n-1}\bar{C}_{n-1}.$$

Оскільки елементи d_{nj} містяться у суміжних класах R_{h_n} за ідеалом (h_n), то елементи d_{nj} запишемо у вигляді $d_{nj} = h_n c_{nj} + q_{nj}$, $j = 1,2,\ldots,n$, де $c_{nj} \in R$, а елементи q_{nj} є представниками суміжних класів H_{nj} за ідеалом (h_n), в яких містяться елементи d_{nj}, тобто $q_{nj} \in H_{nj}$, $j = 1,2,\ldots,n$. Отже,

$$\| d_{n1} \quad d_{n2} \quad \ldots \quad d_{nn} \| = h_n \| c_{n1} \quad c_{n2} \quad \ldots \quad c_{nn} \| + \| q_{n1} \quad q_{n2} \quad \ldots \quad q_{nn} \|.$$

На основі викладених вище міркувань маємо, що для матриць

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{Vmatrix} \quad \text{і} \quad Q = \begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{Vmatrix}$$

виконується рівність

$$B = H_A C + Q. \tag{3}$$

Зауважимо, якщо для деякого $1 \le i_0 \le n$ елемент $h_{i_0} = e$, то в матриці Q рядок $\| q_{i_0 1} \quad q_{i_0 2} \quad \ldots \quad q_{i_0 n} \|$ є нульовим. Оскільки $A = H_A \mathrm{W}^{-1}$, де $W \in GL(n,R)$ (див. рівність (2)), то рівність (3) перепишемо у вигляді

$$B = AP + Q, \tag{4}$$

де $P = WC$. Отже, елементи k-го рядка $\| q_{k1} \quad q_{k2} \quad \ldots \quad q_{kn} \|$ матриці Q належать повній системі лишків R_{h_k} за ідеалом (h_k) для всіх $k = 1,2,\ldots,n$. Якщо в рівності (4) матриця $Q = 0_{n,n}$, то $B = AP$. Оскільки $\det A \ne 0$, то в цьому випадку матриця P визначається однозначно. Цей випадок досліджувався у [23].

Припустимо, що в рівності (4) матриця $Q \ne 0_{n,n}$, а для матриць A і B існує ще одна пара матриць $P_1, Q_1 \in M_{n,n}(R)$, відмінна від пари P, Q, така, що

$$B = AP_1 + Q_1, \tag{5}$$

а елементи k-го рядка $\| \tilde{q}_{k1} \quad \tilde{q}_{k2} \quad \ldots \quad \tilde{q}_{kn} \|$ матриці Q_1 належать повній системі лишків за ідеалом (h_k). Із рівностей (4) і (5) отримуємо $A(P - P_1) = Q_1 - Q$. Звідси випливає, що

$$\| (\tilde{q}_{k1} - q_{k1}) \quad (\tilde{q}_{k2} - q_{k2}) \quad \ldots \quad (\tilde{q}_{kn} - q_{kn}) \| = 0_{1,n} (\operatorname{mod} h_k), \ k = 1,2,\ldots,n.$$

Оскільки q_{ki} та $\tilde{q}_{ki}$ належать повній системі лишків за ідеалом (h_k) для всіх $k = 1,2,\ldots,n$, то рівність $(\tilde{q}_{ki} - q_{ki}) = 0 \ (\operatorname{mod} h_k)$ можлива лише у випадку, коли $\tilde{q}_{ki} = q_{ki}$. Отже, $\| q_{k1} \quad q_{k2} \quad \ldots \quad q_{kn} \| = \| \tilde{q}_{k1} \quad \tilde{q}_{k2} \quad \ldots \quad \tilde{q}_{kn} \|$. Так як $1 \le k \le n$, то $Q_1 = Q$, що й доводить теорему. ♦

Із доведення теореми 1 отримуємо метод ділення матриць із залишком над областю головних ідеалів. Наведений вище метод ділення матриць із $M_{n,n}(R)$ будемо називати лівим діленням із залишком. На підставі теореми 1 вкажемо праве ділення матриць із залишком. Нехай $A, B \in M_{n,n}(R)$ і A − неособлива матриця. Нехай, далі,

$$H_{A^t} = A^t W = \begin{Vmatrix} h_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h'_{21} & h_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h'_{n1} & h'_{n2} & \dots & h'_{n,n-1} & h_n \end{Vmatrix}$$

– форма Ерміта транспонованої матриці A^t, де $W \in GL(n,R)$. Згідно з теоремою 1 для матриць A^t і B^t існує єдина пара матриць $P, Q \in M_{n,n}(R)$ таких, що $B^t = A^t\tilde{P} + \tilde{Q}$, де елементи k-го рядка $\|\tilde{q}_{k1} \quad \tilde{q}_{k2} \quad \dots \quad \tilde{q}_{kn}\|$ матриці $\tilde{Q}$ належать повній системі лишків за ідеалом (h_k) для всіх $k = 1,2,\dots,n$. Отже, для матриць A і B виконується рівність $B = DA + S$, де $D = \tilde{P}^t$, елементи k-го стовпчика $\|\tilde{q}_{1k} \quad \tilde{q}_{2k} \quad \dots \quad \tilde{q}_{nk}\|^t$ матриці $S = \tilde{Q}^t$ належать повній системі лишків R_{h_i} за ідеалом $(h_i) = Rh_i$ для всіх $i = 1,2,\dots,n$. На підставі сказаного сформулюємо твердження.

Теорема 2. *Нехай $A, B \in M_{n,n}(R)$ і A – неособлива матриця. Нехай, далі,*

$$H_{A^t} = A^t W = \begin{Vmatrix} h_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h'_{21} & h_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h'_{n1} & h'_{n2} & \dots & h'_{n,n-1} & h_n \end{Vmatrix}$$

– форма Ерміта транспонованої матриці A^t, де $W \in GL(n,R)$. Тоді для матриць A і B існує єдина пара матриць $D, Q \in M_{n,n}(R)$ таких, що $B = DA + S$, де $S = 0_{n,n}$ або елементи k-го стовпчика $\|s_{1k} \quad s_{2k} \quad \dots \quad s_{nk}\|$ матриці S належать до повної системи лишків R_{h_k} за ідеалом $(h_k) = Rh_k$ для всіх $1 \le k \le n$.

Оскільки кільце матриць $M_{n,n}(R)$ над областю головних ідеалів R є лівим і правим евклідовим кільцем, то задачі про ліве та праве ділення матриць над R із залишком є рівносильні. Тому надалі під діленням матриць із залишком будемо розуміти лівий алгоритм ділення із залишком.

2. Застосування. Наведемо застосування отриманих результатів до пошуку деяких спеціальних розв'язків (тобто розв'язків, на які накладаємо певні умови) матричного рівняння типу Сильвестра (див. [19, 20])

$$AX + YB = C, \tag{6}$$

де $A \in M_{m,m}(R)$, $B \in M_{n,n}(R)$, $C \in M_{m,n}(R)$, а X та Y – невідомі матриці над областю головних ідеалів R. Нагадаємо, що рівняння (6) розв'язне тоді й тільки тоді, коли матриці $\begin{Vmatrix} A & C \\ 0_{n,m} & B \end{Vmatrix}$ і $\begin{Vmatrix} A & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & B \end{Vmatrix}$ еквівалентні [18]. Зауважимо, що, якщо в рівнянні (6) A і B – неособливі матриці із взаємно простими визначниками, тобто $(\det A, \det B) = e$, то (6) розв'язне для довільної матриці $C \in M_{m,n}(R)$ [23]. Відомою також є роль рівняння (6) при дослідженні структури матриць над комутативними кільцями відносно перетворень еквівалентності (див. [15, 20, 24, 25]).

Нехай $R = F[\lambda]$ – кільце многочленів над полем F Поліноміальні діофантові рівняння мають застосування у теорії систем керування як спеціальний математичний об'єкт, використання якого дозволяє ефективно розв'язувати широкий спектр задач синтезу систем, у тому числі систем керування. На поліноміальних діофантових рівняннях (як у скалярному, так і матричному вигляді) практично будується вся класична теорія автоматів. Значна частина відомих методів синтезу лінійних систем представляє собою шляхи пошуку розв'язків матричного поліноміального рівняння $A(\lambda)X(\lambda)+Y(\lambda)B(\lambda)=C(\lambda)$ (зокрема «мінімальних» розв'язків). При цьому пошук і побудова всіх класів розв'язків лінійних поліноміальних рівнянь залежить від числа кроків подільності многочленів із залишком і отримується у явному вигляді відповідними підстановками (див. [9, 21]).

S. Barnett [10], досліджуючи структуру многочленних матриць над полем, встановив, що регулярні матриці $A(\lambda)\in M_{m,m}(F[(\lambda])$ і $B(\lambda)\in M_{n,n}(F[(\lambda])$ мають взаємно прості визначники тоді й тільки тоді, коли для довільної матриці $C(\lambda)\in M_{m,n}(F[(\lambda])$ такої, що $\deg C(\lambda)\le \deg A(\lambda)+\deg B(\lambda)$, матричне рівняння

$$A(\lambda)X(\lambda)+Y(\lambda)B(\lambda)=C(\lambda) \tag{7}$$

має єдиний мінімальний розв'язок $X_0(\lambda)$, $Y_0(\lambda)$, тобто такий, що $\deg X_0(\lambda)\le$ $\le \deg B(\lambda)$ і $\deg Y_0(\lambda)\le \deg B(\lambda)$. Послаблення умов, за яких для рівняння (7) існує мінімальний розв'язок, встановлено в роботах [16] і [26]. У роботі [16] доведено, що умову Барнетта щодо існування єдиного мінімального розв'язку можна послабити: єдиний мінімальний розв'язок рівняння (7) існує у випадку, коли лише одна з матриць ($A(\lambda)$ або $B(\lambda)$) є регулярною. Пізніші дослідження показали, що умови роботи [16] про мінімальний розв'язок рівняння (7) теж можна послабити. У статті [26] доведено наступне: єдиний мінімальний розв'язок рівняння (7) існує, якщо хоча би одна з нерегулярних і неособливих матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ із взаємно простими визначниками регуляризується ($A(\lambda)$ зліва або $B(\lambda)$ справа). Отже, умови статті [26] охоплюють значно ширший клас рівнянь вигляду (7), для яких можна вказати мінімальний розв'язок. Методи побудови розв'язків рівнянь (6) і (7) при тих чи інших обмеженнях наведено в роботах [4, 13, 14, 20].

Використовуючи теорему 1 і наслідок 1 сформулюємо умови, за яких для рівнянь (6) та (7) існують розв'язки, елементи кожного рядка яких належать повній системі лишків за модулем відповідного ідеалу. Наступне твердження доводить, якщо рівняння (6) розв'язне, то такі розв'язки для рівняння (6) існують.

Твердження 1. *Нехай у рівнянні* (6) $A\in M_{m,m}(R)$ − *неособлива матриця. Нехай, далі,*

$$H_A = AW = \begin{Vmatrix} h_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_{21} & h_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{m,m-1} & h_m \end{Vmatrix}$$

− *форма Ерміта матриці* A, *де* $W\in GL(m,R)$. *Якщо матричне рівняння* (6) *розв'язне, то серед його розв'язків існує розв'язок* X_0, Y_0 *такий, що елементи* k*-го рядка* $\|y_{1k} \quad y_{2k} \quad \dots \quad y_{kn}\|$ *матриці* Y_0 *належать повній системі лишків* R_{h_k} *за ідеалом* $(h_k)=Rh_k$ *для всіх* $1\le k\le n$.

Д о в е д е н н я. Нехай пара матриць $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ − розв'язок рівняння (6), тобто $A\tilde{X}-\tilde{Y}B=C$. Оскільки H_A − форма Ерміта матриці A, то на підставі теореми 1 матрицю $\tilde{Y}$ запишемо у вигляді $\tilde{Y}=AQ+Y_0$, де $Q, Y_0\in$ $M_{m,n}(R)$, а елементи k-го рядка $\|y_{1k} \quad y_{2k} \quad \dots \quad y_{kn}\|$ матриці Y_0 містяться в повній системі лишків R_{h_k} за ідеалом $(h_k) = Rh_k$ для всіх $1 \le k \le n$. Тепер рівність $A\tilde{X} - \tilde{Y}B = C$ перепишемо у вигляді $A\tilde{X} - (AQ + Y_0)B = C$. Звідси отримуємо $AX_0 - Y_0 B = C$, де $X_0 = \tilde{X} - QB$, що й доводить твердження. ♦

Встановимо клас рівнянь, для яких розв'язки, описані в твердженні 1, визначаються однозначно.

Теорема 3. *Нехай* $A \in M_{m,m}(R)$, $B \in M_{n,n}(R)$ *– неособливі матриці і* $C \in M_{m,n}(R)$. *Нехай, далі, матриця* $W \in GL(m, R)$ *така, що*

$$H_A = AW = \begin{Vmatrix} h_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_{21} & h_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{m,m-1} & h_m \end{Vmatrix}$$

– форма Ерміта матриці A. *Якщо* $(\det A, \det B) = e$, *то для рівняння* $AX - YB = C$ *існує єдиний розв'язок* X_0, Y_0 *такий, що елементи* k*-го рядка* $\begin{Vmatrix} y_{1k} & y_{2k} & \dots & y_{kn} \end{Vmatrix}$ *матриці* Y_0 *належать повній системі лишків* R_{h_k} *за ідеалом* $(h_k) = Rh_k$ *для всіх* $1 \le k \le n$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $(\det A, \det B) = e$, то матричне рівняння (6) розв'язне. На підставі твердження 1 для рівняння (6) існує розв'язок X_0, Y_0, такий, що елементи k-го рядка $\begin{Vmatrix} y_{1k} & y_{2k} & \dots & y_{kn} \end{Vmatrix}$ матриці Y_0 належать повній системі лишків R_{h_k} за ідеалом $(h_k) = Rh_k$ для всіх $1 \le k \le n$.

Припустимо, що для рівняння (6), крім розв'язку X_0, Y_0, існує ще один розв'язок X_1, Y_1, відмінний від попереднього, такий, що елементи k-го рядка $\begin{Vmatrix} y_{1k} & y_{2k} & \dots & y_{kn} \end{Vmatrix}$ матриці Y_1 належать повній системі лишків R_{h_k} за ідеалом $(h_k) = Rh_k$ для всіх $1 \le k \le n$.

Так як $AX_0 - Y_0 B = C$ і $AX_0 - Y_0 B = C$, то з цих рівностей отримуємо $AU - VB = 0_{m,n}$, де $U = X_0 - X_1$ і $V = Y_0 - Y_1$. Оскільки $\det B \ne 0$, то з рівності $V = Y_0 - Y_1$ випливає, що

$$H_A W^{-1} B^* = V \det B, \tag{8}$$

де B^* – матриця, приєднана до матриці B, тобто $B^* B = I_n \det B$, і I_n – одинична $(n \times n)$-матриця. Тепер легко переконатись в тому, що елементи $\bar{v}_k \in M_{1,n}(R)$ k-го рядка матриці V належать повній системі лишків R_{h_k} за ідеалом $(h_k) = Rh_k$ для всіх $1 \le k \le n$. Так як $(\det A, \det B) = e$, то очевидно, що $(h_k, \det B) = e$ для всіх $1 \le k \le m$.

Отже, з рівності (8) отримуємо

$$\bar{v}_k = 0_{1,m} (\operatorname{mod} h_k).$$

Оскільки елементи рядка $\bar{v}_k \in M_{1,n}(R)$ належать до повної системі лишків R_{h_k} за ідеалом $(h_k) = Rh_k$, то з останньої рівності випливає, що $\bar{v}_k \equiv 0_{1,m}$. Так як $1 \le k \le m$, то $X_0 = X_1$ і $Y_0 = Y_1$, що й доводить теорему. ♦

Надалі нехай $R = F[\lambda]$ – кільце многочленів над полем F. На підставі теорем 1 і 3 отримуємо наступні твердження.

Наслідок 1. *Нехай* $A(\lambda), B(\lambda) \in M_{n,n}(F[\lambda])$ *і* $A(\lambda)$ *– неособлива матриця. Нехай, далі, матриця* $W(\lambda) \in GL(n, F[\lambda])$ *така, що*

$$H_A(\lambda) = A(\lambda)W(\lambda) = \begin{Vmatrix} h_1(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_{21}(\lambda) & h_2(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1}(\lambda) & h_{n2}(\lambda) & \dots & h_{n,n-1}(\lambda) & h_n(\lambda) \end{Vmatrix}$$

– форма Ерміта матриці $A(\lambda)$, *тобто* $h_i(\lambda) \in F[\lambda]$ *– унітальні многочлени, причому* $\deg h_i(\lambda) > \deg h_{ij}(\lambda)$, *якщо* $\deg h_i(\lambda) \ge 1$, *і* $\deg h_{ij}(\lambda) = 0$, *якщо* $\deg h_i(\lambda) = 0$ *для всіх* $1 \le j < i \le n$. *Тоді для матриць* $A(\lambda)$ *і* $B(\lambda)$ *існує єдина пара матриць* $P(\lambda), Q(\lambda) \in M_{n,n}(F[\lambda])$ *таких, що*

$$B(\lambda) = A(\lambda)P(\lambda) + Q(\lambda),$$

де $Q(\lambda) = 0_{n,n}$ *або степені елементів* k*-го рядка* $\begin{Vmatrix} q_{k1}(\lambda) & q_{k2}(\lambda) & \dots & q_{kn}(\lambda) \end{Vmatrix}$ *матриці* $Q(\lambda)$ *менші від степеня елемента* $h_k(\lambda)$ *для всіх* $k = 1, 2, \dots, n$. *Якщо ж для деякого* k_0 *елемент* $h_{k_0}(\lambda) = e$, *то* k*-й рядок матриці* $Q(\lambda)$ *є нульовим.*

Наслідок 2. *Нехай* $A(\lambda) \in M_{m,m}(F[\lambda])$ *і* $B(\lambda) \in M_{n,n}(F[\lambda])$ *– неособливі матриці. Нехай, далі,*

$$H_A(\lambda) = \begin{Vmatrix} h_1(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_{21}(\lambda) & h_2(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1}(\lambda) & h_{n2}(\lambda) & \dots & h_{n,n-1}(\lambda) & h_n(\lambda) \end{Vmatrix}$$

– форма Ерміта матриці $A(\lambda)$. *Якщо* $(\det A(\lambda), \det B(\lambda)) = e$, *то для довільної матриці* $C(\lambda) \in M_{m,n}(F[\lambda])$ *для рівняння*

$$A(\lambda)X(\lambda) - Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$$

існує єдиний розв'язок $X_0(\lambda)$, $Y_0(\lambda)$ *такий, що елементи* k*-го рядка* $\begin{Vmatrix} y_{1k}(\lambda) & y_{2k}(\lambda) & \dots & y_{kn}(\lambda) \end{Vmatrix}$ *матриці* $Y_0(\lambda)$ *менші від степеня елемента* $h_k(\lambda)$ *для всіх* $k = 1, 2, \dots, n$. *Якщо ж для деякого* k_0 *елемент* $h_{k_0}(\lambda) = e$, *то* k*-й рядок матриці* $Y_0(\lambda)$ *є нульовим.*

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1988. – 552 с.
   Те саме: *Gantmacher F. R.* The theory of matrices. – New York: Chelsea Publ. Co., 1959. – Vol. 1: x+377 p.; Vol. 2: x+277 p.
   http://science.sciencemag.org/content/131/3408/1216.2
2. *Джалюк Н., Петричкович В.* Напівскалярна еквівалентність поліноміальних матриць та розв'язування матричних поліноміальних рівнянь Сильвестра // Мат. вісн. НТШ. – 2013. – **9**. – С. 81–88.
3. *Зарисский О., Самюэль П.* Коммутативная алгебра: В 2 т. – Т. 1. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1963. – 371 с.
4. *Калайджич Г. В.* Об евклидовости матричных модулей над данным евклидовым кольцом // Сиб. мат. журн. – 1985. – **26**, № 6. – С. 48–53.
5. *Ладзоришин Н. Б.* Цілочислові розв'язки матричних лінійних односторонніх і різносторонніх рівнянь над квадратичними кільцями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58,** № 2. – С. 47–54.

Те саме: *Ladzoryshyn N. B.* Integer solutions of matrix linear unilateral and bilateral equations over quadratic rings // J. Math. Sci. – 2017. – **223**, No. 1. – P. 50–59.
https://doi.org/10.1007/s10958-017-3337-0.

6. *Прокіп В. М.* Про розв'язність системи лінійних рівнянь над областю головних ідеалів // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 4. – С. 566–570.
Те саме: *Prokip V. M.* On the solvability of a system of linear equations over the domain of principal ideals // Ukr. Math. J. – 2014. – **66**, No. 4. – P. 633–637.
https://doi.org/10.1007/s11253-014-0960-5.
7. *Родосский К. А.* Алгоритм Евклида. – Москва: Наука, 1988. – 240 с.
8. *Санов И. Н.* Алгорифм Евклида и односторонние разложения на простые множители для матричных колец // Сиб. мат. журн. – 1967. – **8**, № 4. – С. 846–852.
9. *Barnett S.* Polynomials and linear control systems. – New York: Marcel Dekker, Inc., 1983. – 452 p.
10. *Barnett S.* Regular polynomial matrices having relatively prime determinants // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1969. – **65**, No. 3. – P. 585–590.
https://doi.org/10.1017/S0305004100003364
11. *Brungs H.-H.* Left Euclidean rings // Pacific J. Math. – 1973. – **45,** No. 1. – P. 27–33.
12. *Cohn P. M.* Free rings and their relations. – London: Acad. Press, 1985. – xxii+588 p.
13. *Chen S., Tian Y.* On solutions of generalized Sylvester equation in polynomial matrices // J. Franklin Institute. – 2014. – **351**, No. 12. – P. 5376–5385.
https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2014.09.024.
14. *Feinberg R. B.* Equivalence of partitioned matrices // J. Res. Natl Bur. Stand. Sect. **B**: Math. Sci. – 1976. – **80B,** No. 1. – P. 89–98.
http://dx.doi.org/10.6028/jres.080B.015.
15. *Feinstein J., Barness Y.* On the uniqueness minimal solution of the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda)+Y(\lambda)B(\lambda)=C(\lambda)$ // J. Franklin Inst. – 1980. – **310**, No. 2. – P. 131–134.
https://doi.org/10.1016/0016-0032(78)90012-1.
16. *Fletcher C. R.* Euclidean rings // J. London Math. Soc. – 1971. – **s2-4**, No. 1. – P. 79–82.
https://doi.org/10.1112/jlms/s2-4.1.79
17. *Gustafson W. H.* Roth's theorems over commutative rings // Linear Algebra Appl. – 1979. – **23**. – P. 245–251.
https://doi.org/10.1016/0024-3795(79)90106-X.
18. *Jategaonkar A. V.* Rings with transfinite left division algorithm // Bull. Amer. Math. Soc. – 1969. – **75**, No. 3. – P. 559–561.
https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1969-12242-1.
19. *Kaashoek M. A., Lerer L.* On a class of matrix polynomial equations // Linear Algebra Appl. – 2013. – **439**, No. 3. – С. 613–620.
https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.08.020.
20. *Kaczorek T.* Polynomial and rational matrices. Applications in dynamical systems theory. – London: Springer, 2007. – 503 p.
21. *Lezowski P.* On some Euclidean properties of matrix algebras // J. Algebra. – 2017. – **486**. – P. 157–203.
https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2017.05.018.
22. *Motzkin T.* The Euclidean algorithm // Bul. Amer. Math. Soc. – 1949. – **55**, No. 12. – P. 1142–1146.
https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1949-09344-8.
23. *Newman M.* The Smith normal form of a partitioned matrix // J. Res. Natl Bur. Stand. Sect. **B**: Math. Sci. – 1974. – **78B**, No. 1. – P. 3–6.
http://dx.doi.org/10.6028/jres.078B.002.
24. *Newman M.* Integral matrices. – New York: Acad. Press, 1972. – 224 p. – Ser. Pure and Applied Mathematics. – Vol. 45.
25. *Olshevsky V.* Similarity of block diagonal and block triangular matrices // Integr. Equat. Oper. Theory. – 1992. – **15**, No. 5. – P. 853–863..
https://doi.org/10.1007/BF01200704.
26. *Prokip V. M.* About the uniqueness solution of the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda)+Y(\lambda)B(\lambda)=C(\lambda)$ // Lobachevskii J. Math. – 2008. – **29**, No. 3. – P. 186–191. – https://doi.org/10.1134/S1995080208030098.

О ДЕЛИМОСТИ С ОСТАТКОМ МАТРИЦ НАД ОБЛАСТЬЮ ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ

Исследуется задача о делимости матриц с остатком над областью главных идеалов R*. Установлены условия, при которых для пары* $(n \times n)$*-матриц* A *и* B *над областью* R *существует единственная пара* $(n \times n)$*-матриц* P *и* Q *над* R *таких что* $B = AP + Q$*. Приведено применение полученных результатов для нахождения специальных решений матричного уравнения типа Сильвестра.*

ON DIVISIBILITY WITH A REMAINDER OF MATRICES OVER A PRINCIPAL IDEAL DOMAIN

A problem on divisibility with a remainder of matrices over a principal ideal domain R *is studied. The conditions under which for a pair of* $(n \times n)$*-matrices* A *and* B *over the domain* R *there exists a unique pair of pair of* $(n \times n)$*-matrices* P *and* Q *over* R *such that* $B = AP + Q$*, are established. Obtained results are applied to find special solutions of the Sylvester type matrix equation.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
17.01.17