УДК 621.396.01: 519.614

П. О. Савенко, М. Д. Ткач

# ДОСЛІДЖЕННЯ ГАЛУЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ СИНТЕЗУ ВИПРОМІНЮЮЧИХ СИСТЕМ З ПЛОСКИМ РОЗКРИВОМ ЗА ЗАДАНОЮ АМПЛІТУДНОЮ ДІАГРАМОЮ НАПРЯМЛЕНОСТІ

*Продовжується дослідження проблеми неєдиності розв'язків у задачах синтезу випромінюючих систем з плоским розкривом залежно від двох параметрів, які характеризують величину розкриву та тілесний кут, в якому задана необхідна амплітудна діаграма напрямленості. З'ясовано існування та властивості дійсних (первинних) розв'язків чотирьох типів. Проведено дослідження галуження первинних розв'язків другого типу. Знайдено у першому наближенні аналітичні подання комплексних розв'язків, відгалужених від дійсного розв'язку. Визначено їх основні властивості. Проведено числові експерименти по дослідженню ефективності дійсних та відгалужених комплексних розв'язків.*

**Вступ.** У багатьох практичних застосуваннях на етапі проектування випромінюючої системи ставляться вимоги лише до її енергетичних характеристик ų амплітудної діаграми напрямленості (ДН) або ДН за потужністю [4, 5, 10–12]. Свобода вибору фазової ДН може бути використана для покращення апроксимації синтезованої ДН до заданої. Такі задачі відносяться до класу задач з неповною вхідною інформацією, характерною особливістю яких є неєдиність розв'язків. Проблема знаходження оптимальних розв'язків зводиться до дослідження й чисельного розв'язування нелінійних двовимірних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна (рівнянь синтезу), залежних від двох фізичних параметрів $c_1$, $c_2$ (див. [5, 7, 8]).

З'ясовано, що при довільних значеннях цих параметрів рівняння синтезу мають дійсні (первинні) розв'язки різних типів, які можуть бути ефективними (у розумінні прийнятих критеріїв) лише при відносно невеликих значеннях $c_1$, $c_2$. Зі зростанням цих параметрів від дійсних розв'язків відгалужуються більш ефективні комплексні розв'язки, які можуть бути прийнятними у практичних застосуваннях.

У роботах [7, 8] проведено дослідження галуження лише первинного розв'язку першого типу. З'ясовано основні властивості цього розв'язку, знайдено множину значень параметрів $c_1$, $c_2$, при яких відбувається відгалуження комплексних розв'язків, визначено їх якісні характеристики.

Виявляється, що, крім первинного розв'язку першого типу, основні рівняння синтезу мають принаймні ще два типи первинних розв'язків, властивості яких суттєво відрізняються від властивостей розв'язку першого типу. Особливістю цих розв'язків є наявність нульових значень на частині області їх існування. Це вимагає проведення додаткових досліджень.

Наведемо необхідні надалі основні рівняння та співвідношення. Задачу синтезу плоского розкриву за амплітудною ДН розглядатимемо у припущенні, що форма розкриву відома, а поле в ньому має еліптичну поляризацію [3]. У загальному випадку електромагнітне поле в дальній зоні, що випромінюється антеною з плоским розкривом $S$, розміщеним у площині $xOy$ декартової системи координат, має векторний характер. Проте введення Є. Г. Зелкіним [3] спеціальної системи координат $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$, яка зв'язана з ортами сферичної системи координат формулами

$$\mathbf{g}_1 = \cos\varphi\,\mathbf{i}_\vartheta - \sin\varphi\,\mathbf{i}_\varphi, \quad \mathbf{g}_2 = \sin\varphi\,\mathbf{i}_\vartheta + \cos\varphi\,\mathbf{i}_\varphi, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{i}_r, \tag{1}$$

дає змогу одержати такі вирази для компонент векторної ДН $\mathbf{f}(\theta,\varphi)$ плоского розкриву, в яких кожна компонента ДН зв'язана лише з однією компонентою поля у розкриві. У цій системі координат векторна ДН $\mathbf{f}(\theta,\varphi)$ має вигляд

$$\mathbf{f}(\theta,\varphi) = (1+\cos\theta)(f_x(\theta,\varphi)\mathbf{g}_1 + f_y(\theta,\varphi)\mathbf{g}_2),$$

компоненти якої $f_x(\theta,\varphi)$, $f_y(\theta,\varphi)$ подаються формулами

$$f_{x,y}(\theta,\varphi) = \iint_S U_{x,y}(x,y)e^{ik(x\sin\theta\cos\varphi + y\sin\theta\sin\varphi)}\,dx\,dy\,. \tag{2}$$

Таким чином, введення [3] узагальненої системи координат (1) дає змогу звести задачу синтезу антени з плоским розкривом за заданою амплітудною ДН з довільною поляризацією поля випромінювання в розкриві до двох незалежних і більш простих задач синтезу з лінійно поляризованими полями [5]. На підставі цього надалі розглядатимемо синтез лише однієї із компонент заданої амплітудної ДН. Для спрощення записів індекс у компонентах ДН (2) опустимо, а вираз для однієї компоненти подамо у вигляді

$$f(s_1,s_2) = AU \equiv \iint_{\tilde S} U(x,y)\,e^{i(xc_1s_1 + yc_2s_2)}\,dx\,dy\,, \tag{3}$$

який будемо розглядати як дію лінійного інтегрального оператора $A$ з комплексного простору $H_U = L_2(S)$ інтегровних з квадратом функцій, що описують розподіл полів (струмів) у розкриві $S$, у комплексний простір інтегровних з квадратом функцій $H_f = L_2(G)$. Тут $s_1 = \sin\vartheta\cos\varphi/\sin\gamma_1$, $s_2 = \sin\vartheta\sin\varphi/\sin\gamma_2$ − узагальнені кутові координати; $c_1 = ka_1\sin\gamma_1$, $c_2 = ka_2\sin\gamma_2$ − безрозмірні числові параметри, які характеризують електричні розміри розкриву $S$ (у довжинах хвиль) та область (тілесний кут) $G$, де задана амплітудна ДН $F(s_1,s_2)$; $k = 2\pi/\lambda$ − хвильове число; $\gamma_1$ і $\gamma_2$ − інтервали зміни кута $\vartheta$ при $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi/2$, відповідно (див. рис. 1).

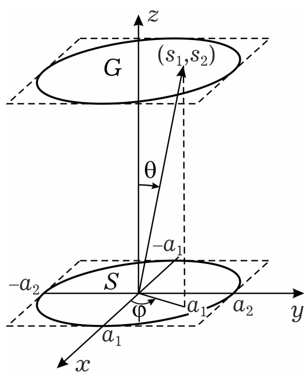


Рис. 1

За критерій оптимізації при синтезі однієї з компонент $F(s_1,s_2)$ заданої амплітудної ДН виберемо функціонал

$$\sigma_F(\mathbf{U}) = \iint_G [F(s_1,s_2) - |f(s_1,s_2)|]^2 ds_1\,ds_2 + \iint_{\mathbb{R}^2\setminus G} |f(s_1,s_2)|^2\,ds_1\,ds_2\,. \tag{4}$$

З необхідної умови мінімуму цього функціонала одержуємо рівняння Ейлера − Лаґранжа відносно сторонніх джерел збудження:

$$U(x,y) = \frac{c_1c_2}{(2\pi)^2}\iint_G F(s_1,s_2)\times$$

$$\times\exp i\left[\arg\iint_G U(x',y')e^{i(c_1x's_1 + c_2y's_2)}dx'dy' - i(c_1xs_1 + c_2ys_2)\right]ds_1\,ds_2\,. \tag{5}$$

Якщо подіяти на обидві сторони цього рівняння оператором $A$, то одержимо рівняння відносно синтезованої ДН:

$$f(s_1,s_2) = Bf \equiv \iint_G F(s_1',s_2')K(s_1,s_2,s_1',s_2',\mathbf{c})\,e^{i\arg f(s_1',s_2')}\,ds_1'\,ds_2'\,, \tag{6}$$

де

$$K(s_1,s_2,s_1',s_2',\mathbf{c}) = \frac{c_1c_2}{(2\pi)^2}\iint_{\tilde S}\exp[i(c_1x(s_1'-s_1) + c_2y(s_2'-s_2))]\,dx\,dy \tag{7}$$

– ядро рівняння, залежне від форми розкриву $S$ (тут позначено $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$). У випадку симетричних розкривів $S$ ядро (7) вдається спростити [5]. Зокрема, для прямокутного розкриву ядро (7) записується так:

$$K(s_1, s_2, s_1', s_2', \mathbf{c}) = \frac{\sin c_1(s_1 - s_1')}{\pi(s_1 - s_1')} \cdot \frac{\sin c_2(s_2 - s_2')}{\pi(s_2 - s_2')} . \qquad (8)$$

Взаємно однозначна відповідність між рівняннями (5) і (6) випливає з леми 2.2.2 [4].

Рівняння (6) у декомплексифікованому [9] просторі $\mathbf{C}(G) = C(G) \oplus C(G)$ зводиться до еквівалентної йому системи рівнянь

$$u(Q) = B_1(u, v) \equiv \iint\limits_G F(Q')K(Q, Q', \mathbf{c}) \frac{u(Q')}{\sqrt{u^2(Q') + v^2(Q')}} dQ' ,$$

$$v(Q) = B_2(u, v) \equiv \iint\limits_G F(Q')K(Q, Q', \mathbf{c}) \frac{v(Q')}{\sqrt{u^2(Q') + v^2(Q')}} dQ' , \qquad (9)$$

де $Q = (s_1, s_2)$, $dQ = ds_1 ds_2$.

Існування принаймні одного розв'язку системи (9) випливає з виконання умов принципу Шаудера [5, 13], згідно з яким оператор $\mathbf{B} = (B_1, B_2)^\top$ має нерухому точку $f_* = (u_*, v_*)^\top$, яка належить до обмеженої замкнутої множини $S_M \subset L_2(G)$. Ця точка є розв'язком системи рівнянь (9) і, відповідно, рівняння (6) [5].

Легко переконатись, що дійсна функція

$$f_0(Q, \mathbf{c}) = D(F) \equiv \iint\limits_G F(Q')K(Q, Q', \mathbf{c})\, dQ' , \qquad (10)$$

є одним із розв'язків рівняння (6), який назвемо *первинним розв'язком першого типу*. Оскільки оператор $D$ є додатним [5] на конусі невід'ємних функцій $\mathcal{K} \in C(G)$ і $D\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$, а $F \subset \mathcal{K}$, то розв'язок $f_0 = DF$ є невід'ємною функцією на області $G$. Дослідження галуження розв'язку $f_0(Q, \mathbf{c})$ проведено в роботах [7, 8]. З'ясовано основні властивості цього розв'язку, знайдено множину значень параметрів $c_1$, $c_2$, при яких відбувається відгалуження комплексних розв'язків, визначено їхні якісні характеристики.

Виявляється, що, крім дійсного розв'язку $f_0(Q, \mathbf{c})$, рівняння (6) має ще інші типи дійсних (первинних) розв'язків, властивості яких суттєво відрізняються від властивостей розв'язку $f_0(Q, \mathbf{c})$, що вимагає додаткових досліджень.

**1. Галуження первинного розв'язку другого типу.**

***1.1. Існування і властивості дійсних (первинних) розв'язків.*** Розглянемо частковий випадок, коли область $G$ має дві осі симетрії Безпосередньою перевіркою переконуємось, що, крім первинного розв'язку першого типу, існують два *первинні розв'язки другого типу*:

$$f_1(s_1, s_2, \mathbf{c}) = \iint\limits_G F(t_1, t_2)K(s_1, s_2, t_1, t_2, \mathbf{c}) \operatorname{sgn}\left(t_1 - t_1^{(0)}\right) dt_1\, dt_2 , \qquad (11)$$

$$f_2(s_1, s_2, \mathbf{c}) = \iint\limits_G F(t_1, t_2)K(s_1, s_2, t_1, t_2, \mathbf{c}) \operatorname{sgn}\left(t_2 - t_2^{(0)}\right) dt_1\, dt_2 , \qquad (12)$$

причому $t_1^{(0)}, t_2^{(0)} \in G$.

Суттєвою відмінністю розв'язків $f_1(s_1, s_2, \mathbf{c})$, $f_2(s_1, s_2, \mathbf{c})$ від розв'язку

$f_0(Q,\mathbf{c})$ є наявність відповідних множин нульових значень в області їх визначення, що породжує особливість в одержаних нижче лінійних однорідних інтегральних рівняннях на знаходження ліній галуження.

Поряд з розв'язками другого типу існує ще розв'язок

$$f_3(s_1,s_2,\mathbf{c}) = \iint_G F(t_1,t_2)K(s_1,s_2,t_1,t_2,\mathbf{c})\operatorname{sgn}(t_1)\operatorname{sgn}(t_2)\,dt_1\,dt_2\,, \tag{13}$$

який назвемо *первинним розв'язком третього типу.*

Застосовуючи правило Лопіталя, нескладно показати, що розв'язок $f_2(s_1,s_2,\mathbf{c})$ у точках $(0,s_2,\mathbf{c})$ і розв'язок $f_3(s_1,s_2,\mathbf{c})$ у точках $(s_1,0,\mathbf{c})$ мають нулі першого порядку. З'ясовано, що первинний розв'язок третього типу $f_4(s_1,s_2,\mathbf{c})$ у точці $(0,0,\mathbf{c})$ має нуль другого порядку.

***1.2. Галуження первинного розв'язку другого типу.*** Розглянемо галуження розв'язку $f_1(s_1,s_2,\mathbf{c})$, покладаючи $t_1^{(0)} = 0$, що не обмежує загальності дослідження. Для знаходження ліній галуження і комплексних розв'язків системи рівнянь (9), які відгалужуються від дійсного розв'язку $f_1(s_1,s_2,\mathbf{c})$, розглянемо задачу про знаходження такої множини значень параметрів $\mathbf{c}^{(0)} = \left(c_1^{(0)},c_2^{(0)}\right)$ і всіх відмінних від $f_1(s_1,s_2,\mathbf{c})$ розв'язків системи (9), які при $\left|\mathbf{c}-\mathbf{c}^{(0)}\right| \to 0$ задовольняють умови

$$\max_{(s_1,s_2)\in G}\left|u(s_1,s_2,\mathbf{c}) - f_1(s_1,s_2,\mathbf{c}^{(0)})\right| \to 0, \quad \max_{(s_1,s_2)\in G}\left|v(s_1,s_2,\mathbf{c})\right| \to 0. \tag{14}$$

Ці умови означають, що необхідно знайти такі малі неперервні на $G$ розв'язки

$$w(s_1,s_2,c_1,c_2) = u(s_1,s_2,\mathbf{c}) - f_1\left(s_1,s_2,\mathbf{c}^{(0)}\right), \quad \omega(s_1,s_2,\mathbf{c}) = v(s_1,s_2,\mathbf{c}), \tag{15}$$

які рівномірно збігаються до нуля при $\mathbf{c} \to \mathbf{c}^{(0)}$. При цьому необхідно враховувати також напрямок прямування вектора $\mathbf{c}$ до вектора $\mathbf{c}^{(0)}$. Покладемо

$$c_1 = c_1^{(0)} + \mu, \qquad c_2 = c_2^{(0)} + \nu\,, \tag{16}$$

а шукані розв'язки, враховуючи наявність нульових значень у первинному розв'язку $f_1\left(s_1,s_2,\mathbf{c}^{(0)}\right)$, знаходитимемо у вигляді

$$u(s_1,s_2,\mathbf{c}) = f_1\left(s_1,s_2,c_1^{(0)}c_2^{(0)}\right) + s_1x(s_1,s_2,\mu,\nu)\,,$$

$$v(s_1,s_2,\mathbf{c}) = s_1y(s_1,s_2,\mu,\nu)\,. \tag{17}$$

З рівностей (17) і умови (14) випливає, що[1]

$$w(s) = s_1\cdot x(s_1,s_2)\big|_{s_1=0} = 0, \qquad \omega(s_1,s_2) = s_1\cdot y(s_1,s_2)\big|_{s_1=0} = 0\,. \tag{18}$$

Після підстановки (17) у систему рівнянь (9) підінтегральні функції $\Phi_1$, $\Phi_2$ набувають вигляду

$$\Phi_1\left[s_1,s_2,s_1',s_2',c_1^{(\ell)}+\mu,c_2^{(\ell)}+\nu,f_1\left(s_1',s_2',c_1^{(\ell)},c_2^{(\ell)}\right)+w(s_1',s_2'),\omega(s_1',s_2')\right] =$$

$$= F(Q')K\left(Q,Q',c_1^{(\ell)}+\mu,c_2^{(\ell)}+\nu\right)\times$$

$$\times\frac{f_1\left(Q',c_1^{(\ell)},c_2^{(\ell)}\right)+s_1'\cdot x(Q')}{\left|f_1\left(Q',c_1^{(\ell)},c_2^{(\ell)}\right)\right|\sqrt{1+\dfrac{2s_1'x(Q')}{f_1\left(Q',c_1^{(\ell)},c_2^{(\ell)}\right)}+\dfrac{(s_1')^2\left(x^2(Q')+y^2(Q')\right)}{f_1^2\left(Q',c_1^{(\ell)},c_2^{(\ell)}\right)}}}\,,$$

[1] Тут і надалі для скорочення запису у функціях $x(Q,\mu)$, $y(Q,\mu)$ опущено їх залежність від параметра $\mu$ при збереженні тих же позначень.

$$\Phi_2\big[s_1,s_2,s_1',s_2',c_1^{(\ell)}+\mu,c_2^{(\ell)}+\nu,f_1\big(s_1',s_2',c_1^{(\ell)},c_2^{(\ell)}\big)+w(s_1',s_2'),\omega(s_1',s_2')\big]=$$

$$=F(Q')K\big(Q,Q',c_1^{(\ell)}+\mu,c_2^{(\ell)}+\nu\big)\times$$

$$\times\frac{s_1'\cdot x(Q')}{\big|f_1\big(Q',c_1^{(\ell)},c_2^{(\ell)}\big)\big|\sqrt{1+\dfrac{2s_1'x(Q')}{f_1\big(Q',c_1^{(\ell)},c_2^{(\ell)}\big)}+\dfrac{(s_1')^2\big(x^2(Q')+y^2(Q')\big)}{f_1^2\big(Q',c_1^{(\ell)},c_2^{(\ell)}\big)}}}. \quad (19)$$

Достатньою умовою для розвинення функцій $\Phi_1$, $\Phi_2$ у рівномірно збіжні степеневі ряди за $x(Q)$, $y(Q)$, $\mu$, $\nu$ є виконання нерівності

$$\max_{(s_1,s_2)\in G}\left|\frac{2s_1\cdot x(Q)}{f_1\big(Q,c_1^{(\ell)},c_2^{(\ell)}\big)}+\frac{s_1^2\big(x^2(Q)+y^2(Q)\big)}{f_1^2\big(Q,c_1^{(\ell)},c_2^{(\ell)}\big)}\right|=\delta<1. \quad (20)$$

Оскільки при $s_1=0$ величина $s_1/f_1(s_1,s_2,\mathbf{c})=\mathrm{const}\neq 0$, то на підставі умови (20) існують такі сумісні радіуси збіжності $\rho_x$, $\rho_y$, $\rho_\mu$, $\rho_\nu$, що при $\|x\|_{C(G)}\le\rho_x$, $\|y\|_{C(G)}\le\rho_y$ і $|\nu|\le\rho_\nu$, $|\mu|\le\rho_\mu$ розвинення функцій $\Phi_1$, $\Phi_2$ у ряди в околі точок $\big(c_1^{(\ell)},c_2^{(\ell)},f_1\big(Q,c_1^{(\ell)},c_2^{(\ell)}\big),0,0\big)$ записуються так:

$$\Phi_1\big[Q,Q',c_1^{(\ell)}+\mu,c_2^{(\ell)}+\nu,f_1\big(Q',c_1^{(\ell)},c_2^{(\ell)}\big)+w(Q'),\omega(Q')\big]=$$

$$=\sum_{m+n+p+q\ge 0}^{\infty}A_{mnpq}\big(Q,Q',\mathbf{c}^{(\ell)}\big)x^m(Q')y^n(Q')\mu^p\nu^q,$$

$$\Phi_2\big[Q,Q',c_1^{(\ell)}+\mu,c_2^{(\ell)}+\nu,f_1\big(Q',c_1^{(\ell)},c_2^{(\ell)}\big)+w(Q'),\omega(Q')\big]=$$

$$=\sum_{m+n+p+q\ge 0}^{\infty}B_{mnpq}\big(Q,Q',\mathbf{c}^{(\ell)}\big)x^m(Q')y^n(Q')\mu^p\nu^q. \quad (21)$$

Рівномірна збіжність цих рядів при виконанні умови (20) обґрунтовується аналогічно, як у [5].

Підставимо вирази (21) в систему (9). Аналогічно, як у [7], одержуємо систему нелінійних інтегральних рівнянь типу Ляпунова – Шмідта в припущенні, що функція $F(t_1,t_2)$ має в області лише одну нульову лінію при $t_1=0$:

$$w(Q)=a_{10}\big(Q,\mathbf{c}^{(0)}\big)\mu+a_{01}\big(Q,\mathbf{c}^{(0)}\big)\nu+$$

$$+\sum_{m+n+p+q\ge 2}\mu^p\nu^q\iint_G A_{mnpq}\big(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\big)w^m(Q')\omega^n(Q')\,dQ', \quad (22)$$

$$\omega(Q)-\iint_G\tilde F(Q')K\big(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\big)\frac{\omega(Q')}{f_1\big(Q',\mathbf{c}^{(0)}\big)}dQ'=$$

$$=\sum_{m+n+p+q\ge 2}\mu^p\nu^q\iint_G B_{mnpq}\big(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\big)w^m(Q')\omega^n(Q')\,dQ', \quad (23)$$

де

$$\tilde F(t_1,t_2)=F(t_1,t_2)\,\mathrm{sgn}(t_1),$$

$$a_{10}\big(Q,\mathbf{c}^{(0)}\big)=\iint_G A_{0010}\big(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\big)\,dQ',\quad a_{01}\big(Q,\mathbf{c}^{(0)}\big)=\iint_G A_{0001}\big(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\big)\,dQ'.$$

На підставі нелінійного рівняння (23), згідно з [2, 5], одержуємо лінійне однорідне інтегральне рівняння на точки можливого галуження:

$$\varphi(s_1,s_2) = T(c_1,c_2)\varphi \equiv$$

$$\equiv \iint_G \frac{F(t_1,t_2)\,\mathrm{sgn}(t_1)}{f_1(t_1,t_2,c_1,c_2)} K(s_1,s_2,t_1,t_2,c_1,c_2)\varphi(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2\,, \qquad (24)$$

яке фактично є нелінійною двопараметричною спектральною задачею [5, 6]:

$$\varphi(s_1,s_2) = T(c_1,c_2)\varphi \qquad (25)$$

на знаходження множини значень параметрів $\left(c_1^{(0)},c_2^{(0)}\right)$, при яких можливе відгалуження від дійсного розв'язку $f_1(t_1,t_2,c_1,c_2)$ комплексних розв'язків. Зазначимо, що власні функції рівняння (24) використовуються при побудові відгалужених розв'язків.

Зауважимо, що для знаходження ліній можливого галуження розв'язків системи рівнянь (9) достатньо знайти розв'язки рівняння (24), застосовуючи при цьому метод неявної функції [6]. Однак для застосування до системи рівнянь (22), (23) методів теорії галуження [2] необхідно знати кратність власних значень і властивості власних функцій.

***1.3. Власні функції рівняння* (24)**.

***1.3.1.*** Розглянемо рівняння (24) для випадку, коли області $S$ і $G$ мають прямокутну форму і відповідним нормуванням координат зводяться до вигляду

$$S = \{(x,y) \in S : |x| \le 1, |y| \le 1\}, \quad G = \{(s_1,s_2) \in G : |s_1| \le 1, |s_2| \le 1\}. \qquad (26)$$

Тоді рівняння (24) записується так:

$$\varphi(s_1,s_2) = T(c_1,c_2)\varphi \equiv$$

$$\equiv \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{F(t_1,t_2)\mathrm{sgn}(t_1)}{f_1(t_1,t_2,c_1,c_2)} K(s_1,s_2,t_1,t_2,c_1,c_2)\varphi(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2, \qquad (27)$$

де ядро $K(s_1,s_2,t_1,t_2,c_1,c_2)$ визначається за формулою (8).

Поряд з нелінійною спектральною задачею на власні значення (24) для оцінки кратності власних значень і властивостей розв'язків рівняння (27) розглянемо задачу на власні значення з лінійним спектральним параметром $\lambda$:

$$\lambda\varphi(s_1,s_2) = T(c_1,c_2)\varphi \equiv$$

$$\equiv \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{F(t_1,t_2)\mathrm{sgn}(t_1)}{f_1(t_1,t_2,c_1,c_2)} K(s_1,s_2,t_1,t_2,c_1,c_2)\varphi(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2. \qquad (28)$$

Зі структури рівняння (28) випливає, що його власні значення нелінійно залежать від параметрів $\left(c_1^{(0)},c_2^{(0)}\right)$. Отже, точками можливого галуження називатимемо ті значення параметрів $\left(c_1^{(0)},c_2^{(0)}\right)$, при яких хоча би одне з власних значень рівняння (28) $\lambda\left(c_1^{(0)},c_2^{(0)}\right) = 1$. Таким чином, для знаходження точок галуження необхідно розв'язати нелінійну двопараметричну спектральну задачу на власні значення (27) або задачу (28) з лінійним спектральним параметром $\lambda$.

Під двовимірним випадком галуження розв'язків системи нелінійних рівнянь (9) будемо розуміти такі значення параметрів $\left(c_1^{(0)},c_2^{(0)}\right)$, при яких кратність власного значення $\lambda\left(c_1^{(0)},c_2^{(0)}\right) = 1$ рівняння (28) дорівнює двом.

Покладемо, що параметри $c_1$, $c_2$ належать області

$$\mathbf{\Lambda}_c = \{(c_1,c_2) \in \mathbf{\Lambda}_c : 0 < c_1 \le a_1,\ 0 < c_2 \le a_2\}. \qquad (29)$$

Легко переконатись, що однією з власних функцій рівняння (27) при будь-яких значеннях параметрів $(c_1, c_2) \in \mathbf{\Lambda}_c$ є функція (11), яка набуває вигляду

$$\varphi_1(s_1, s_2, c_1, c_2) = f_1(s_1, s_2, c_1, c_2) \equiv$$

$$\equiv \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2) \operatorname{sgn}(t_1) \frac{\sin(c_1(s_1 - t_1))}{\pi(s_1 - t_1)} \cdot \frac{\sin(c_2(s_2 - t_2))}{\pi(s_2 - t_2)} dt_1\, dt_2 . \quad (30)$$

Для знаходження відмінних від (30) власних функцій рівняння (27) виконаємо такі перетворення. Спочатку введемо в (27) заміну $\chi(t_1, t_2) = \varphi(t_1, t_2)/f_1(t_1, t_2, c_1, c_2)$. Тоді $\varphi(t_1, t_2) = \chi(t_1, t_2) f_1(t_1, t_2, c_1, c_2)$, і на підставі (27) з урахуванням (30) одержуємо рівняння відносно функції $\chi(t_1, t_2)$:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2) \operatorname{sgn}(t_1) K(s_1, s_2, t_1, t_2, c_1, c_2)\, \chi(s_1, s_2)\, dt_1\, dt_2 =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2) \operatorname{sgn}(t_1) K(s_1, s_2, t_1, t_2, c_1, c_2) \chi(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 . \quad (31)$$

На розв'язку це рівняння перетворюється у тотожність

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2) \operatorname{sgn}(t_1) \frac{\sin(c_1(s_1 - t_1))}{\pi(s_1 - t_1)} \cdot \frac{\sin(c_2(s_2 - t_2))}{\pi(s_2 - t_2)} \times$$

$$\times [\chi(s_1, s_2) - \chi(t_1, t_2)]\, dt_1 dt_2 \equiv 0 . \quad (32)$$

Проінтегрувавши (32) за змінними $s_1$, $s_2$, одержуємо рівність

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2) \operatorname{sign}(t_1) \frac{\sin(c_1(s_1 - t_1))}{\pi(s_1 - t_1)} \cdot \frac{\sin(c_2(s_2 - t_2))}{\pi(s_2 - t_2)} \times$$

$$\times [\chi(s_1, s_2) - \chi(t_1, t_2)]\, dt_1\, dt_2\, ds_1\, ds_2 = 0 . \quad (33)$$

Зазначимо, що (33) є необхідною, а тотожність (32) достатньою умовами для того, щоб функція

$$\varphi(t_1, t_2) = \chi(t_1, t_2) f_1(t_1, t_2, c_1, c_2) \quad (34)$$

була власною функцією рівняння (27).

Покажемо, що у випадку парної за обома аргументами функції $F(t_1, t_2)$ рівняння (27) має спектральні лінії, що належать до області $\mathbf{\Lambda}_c$, яким (крім власної функції (30)) відповідає власна функція

$$\varphi_2(s_1, s_2) = s_1 \cdot f_1(s_1, s_2, c_1, c_2), \quad (35)$$

тобто $\chi(s_1, s_2) = s_1$. Підставляючи цей вираз у рівність (33), одержуємо

$$\left\{ \int_{-1}^{1} \sin(c_1 s_1) \times \right.$$

$$\times \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2) \cos(c_1 t_1) \operatorname{sgn}(t_1) \frac{\sin(c_2(s_2 - t_2))}{\pi(s_2 - t_2)} dt_2\, dt_1\, ds_2\, ds_1 -$$

$$- \int_{-1}^{1} \cos(c_1 s_1) \times$$

$$\left. \times \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2) \operatorname{sgn}(t_1) \sin(c_1 t_1) \frac{\sin(c_2(s_2 - t_2))}{\pi(s_2 - t_2)} dt_2\, dt_1\, ds_2\, ds_1 \right\} \equiv 0 .$$

Оскільки $\sin(c_1 s_1)$ і $\cos(c_1 s_1)$ – непарна й парна функції, відповідно, то для перетворення останнього виразу у тотожність необхідно, щоб при $|s_2| \le 1$ для параметрів $c_1$, $c_2$ справджувалась така рівність:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \sin(c_1 t_1)\operatorname{sgn}(t_1)\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\frac{\sin(c_2(s_2-t_2))}{\pi(s_2-t_2)}dt_2\, ds_2\, dt_1 = 0. \tag{36}$$

Розглянемо рівність (36). Легко переконатись, що функція

$$f_{0,2}(t_1,s_2) = \int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\frac{\sin(c_2(s_2-t_2))}{\pi(s_2-t_2)}dt_2 \tag{37}$$

є парною за обома аргументами. Отже, як рівняння на знаходження множини власних значень $(c_1,c_2)$, що не співпадає зі всією областю $\Lambda_c$, будемо розглядати рівність (36), яка повинна справджуватись при $|s_2| \le 1$.

Для знаходження множини власних значень $(c_1^{(0)},c_2^{(0)}) \in \Lambda_c$, що відповідають власним функціям вигляду (35), розглянемо рівняння (36) як трансцендентне рівняння

$$\Phi(c_1,c_2) \equiv \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \sin(c_1 t_1)\operatorname{sgn}(t_1)\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\frac{\sin(c_2(s_2-t_2))}{\pi(s_2-t_2)}dt_2\, ds_2\, dt_1 = 0 \tag{38}$$

на визначення множини значень параметрів $(c_1,\, c_2) \in \Lambda_c$ (спектральних ліній), що є двократними власними значеннями рівняння (27), яким відповідають власні функції (30), (35).

Для знаходження розв'язків рівняння (38) чисельними методами розглядаємо його як рівняння $\Phi_1(c_1,c_2) = 0$ на знаходження неявно заданих функцій $c_2 = c_2(c_1)$ або $c_1 = c_1(c_2)$. У першому випадку маємо таку задачу Коші [5, 8]:

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{\partial\Phi_1(c_1,c_1)/\partial c_1}{\partial\Phi_2(c_1,c_1)/\partial c_2}, \qquad c_2(c_1^{(0)}) = c_2^{(0)}. \tag{39}$$

Для знаходження початкових умов розв'язуємо допоміжну нелінійну однопараметричну задачу на промені $(c_2 = \beta c_1) \in \Lambda_c$, тобто знаходимо корені рівняння

$$\tilde{\Phi}_1(c_1) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\cos(c_1 t_1)\frac{\sin(\beta c_1(s_2-t_2))}{\pi(s_2-t_2)}dt_1\, dt_2\, ds_2 = 0, \tag{40}$$

використовуючи відомі чисельні методи.

***1.3.2.*** Розглянемо частковий випадок рівняння (27), коли функція $F(t_1,t_2)$ допускає відокремлення змінних, тобто $F(t_1,t_2) = F_1(t_1)F_2(t_2)$. У цьому випадку $f_1(t_1,t_2,c_1,c_2) = f_{11}(t_1,c_1)\cdot f_{12}(t_2,c_2)$, а рівняння (27) у припущенні, що

$$\varphi(t_1,t_2) = \varphi_1(t_1)\cdot\varphi_2(t_2) \tag{41}$$

розпадається на два рівняння відносно параметрів $c_1$ і $c_2$:

$$\varphi_1(s_1) = \int_{-1}^{1} F_1(t_1)\operatorname{sgn}(t_1)\frac{\sin(c_1(s_1-t_1))}{\pi(s_1-t_1)}\frac{\varphi_1(t_1)}{f_{11}(t_1 c_1)}dt_1, \tag{42}$$

$$\varphi_2(s_2) = \int_{-1}^{1} F_2(t_2)\frac{\sin(c_2(s_2-t_2))}{\pi(s_2-t_2)}\frac{\varphi_2(t_2)}{f_{12}(t_2 c_2)}dt_2, \tag{43}$$

де

$$f_{11}(t_1, c_1) = \int_{-1}^{1} F_1(\tau_1)\,\mathrm{sgn}(\tau_1) \frac{\sin(c_1(t_1 - \tau_1))}{\pi(t_1 - \tau_1)} d\tau_1 \,,$$

$$f_{12}(t_2, c_2) = \int_{-1}^{1} F_2(\tau_2) \frac{\sin(c_2(t_2 - \tau_2))}{\pi(t_2 - \tau_2)} d\tau_2 \,.$$

Власними функціями рівняння (42) у двовимірному випадку є

$$\varphi_{11}(s_1, c_1) = f_{11}(s_1, c_1), \qquad \varphi_{12}(s_1, c_1) = s_1 f_{11}(s_1, c_1)\,. \tag{44}$$

Перша з них існує при будь-якому $c_1 \in \Lambda_c$. Друга власна функція існує при таких $c_1 \in \Lambda_c$, що задовольняють рівняння [4]:

$$\int_{-1}^{1} F_1(t_1) \sin(c_1 t_1)\,\mathrm{sgn}(t_1)\, dt_1 = 0\,. \tag{45}$$

Власними функціями рівняння (43) у двовимірному випадку є

$$\varphi_{21}(s_2, c_2) = f_{12}(s_2, c_2), \qquad \varphi_{22}(s_2, c_2) = s_2 f_{11}(s_2, c_2)\,. \tag{46}$$

Перша з них існує при будь-якому $c_1 \in \Lambda_c$. Друга власна функція існує при таких $c_1 \in \Lambda_c$, що задовольняють рівняння [4]:

$$\int_{-1}^{1} F_2(t_2) \cos(c_2 t_2)\, dt_2 = 0\,. \tag{47}$$

Отже, у двовимірному випадку при відокремленні змінних, згідно з рівностями (41), (44), (46), існують такі власні функції рівняння (27):

$$\varphi_1(s_1, s_2, c_1, c_2) = \varphi_{11}(s_1, c_1) \cdot \varphi_{21}(s_2, c_2) \equiv f_1(s_1, s_2, c_1, c_2) \tag{48}$$

для будь-яких $(c_1, c_2) \in \boldsymbol{\Lambda}_c$;

$$\varphi_2(s_1, s_2, c_1, c_2) = \varphi_{12}(s_1, c_1) \cdot \varphi_{21}(s_2, c_2) \equiv s_1 \cdot f_1(s_1, s_2, c_1, c_2) \tag{49}$$

для будь-яких $(c_2) \in \Lambda_c$ та $c_1$, що задовольняє рівняння (45);

$$\varphi_3(s_1, s_2, c_1, c_2) = \varphi_{11}(s_1, c_1) \cdot \varphi_{22}(s_2, c_2) \equiv s_2 f_1(s_1, s_2, c_1, c_2) \tag{50}$$

для будь-яких $(c_1) \in \Lambda_c$ та $c_2$, що задовольняє рівняння (47);

$$\varphi_4(s_1, s_2, c_1, c_2) = \varphi_{12}(s_1, c_1) \cdot \varphi_{22}(s_2, c_2) \equiv s_1 s_2 \cdot f_1(s_1, s_2, c_1, c_2) \tag{51}$$

для таких $(c_1, c_2) \in \boldsymbol{\Lambda}_c$, що задовольняють одночасно рівняння (45) і (47)[2].

У часткових випадках рівняння (45), (47) мають точні розв'язки [4], що дозволяє контролювати результати числових експериментів.

***1.3.3.*** Повторюючи викладки і міркування, аналогічні до наведених вище, для знаходження параметрів $\left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right)$, яким відповідає власна функція (49), отримуємо рівняння

$$\Phi_2(c_1, c_2) \equiv \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2)\,\mathrm{sgn}(t_1) \sin(c_2 t_2) \frac{\sin(c_1(s_1 - t_1))}{\pi(s_1 - t_1)} dt_1\, ds_1\, dt_2 = 0\,, \tag{52}$$

розв'язки якого знаходимо чисельно, розв'язуючи відповідну задачу Коші, аналогічну до (39).

Підставляючи $\chi(s_1, s_2) = s_1 s_2$ у рівність (33), одержуємо більш загальне рівняння

---

[2] Звернемо увагу, що наведені вище власні функції і рівняння на знаходження відповідних їм параметрів $(c_1, c_2) \in \boldsymbol{\Lambda}_c$ для нелінійної двопараметричної задачі навіть у випадку відокремлення змінних можуть не описувати всіх розв'язків рівняння (24) [5].

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\,\mathrm{sgn}(t_1)\sin(c_1(s_1-t_1))\times$$
$$\times\frac{\sin(c_2(s_2-t_2))}{\pi(s_2-t_2)}\cdot s_2\,dt_1\,dt_2\,ds_1\,ds_2+$$
$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\,\mathrm{sgn}(t_1)\sin(c_2(s_2-t_2))\times$$
$$\times\frac{\sin(c_1(s_1-t_1))}{\pi(s_1-t_1)}\cdot t_1\,dt_1\,dt_2\,ds_1\,ds_2=0 \qquad (53)$$

на знаходження множини значень параметрів $\left(c_1^{(0)},c_2^{(0)}\right)$, які є власними значеннями рівняння (27), що відповідають власній функції (51).

Таким чином, визначено власні функції лінійного однорідного рівняння на знаходження множини точок можливого галуження розв'язків системи нелінійних рівнянь (9) і відповідно рівняння (6). Оскільки власна функція $\varphi_1(s_1,s_2,c_1,c_2)=f_1(s_1,s_2,c_1,c_2)$, що відповідає власному значенню $\lambda(c_1,c_2)=1$ рівняння (28), існує при довільних значеннях параметрів $(c_1,c_2)\in\mathbf{\Lambda}_c$, то ті значення параметрів $(c_1,c_2)$, при яких існує ще одна з власних функцій $\varphi_2(s_1,s_2,c_1,c_2)$, $\varphi_3(s_1,s_2,c_1,c_2)$ або $\varphi_4(s_1,s_2,c_1,c_2)$, будуть власними значеннями рівнянь (27), (28) кратності два.

***1.4. Двовимірний випадок галуження.*** Галуження розв'язку $f_1(s_1,s_2,c_1,c_2)$ будемо досліджувати на промені $c_2=\beta c_1$, де $\beta$ − дійсний числовий параметр. Як уже зазначалося, двовимірний випадок галуження первинного розв'язку першого типу $f_0(s_1,s_2,\mathbf{c})$ проведено в роботах [7, 8]. Оскільки методика дослідження галуження первинного розв'язку другого типу $f_1(s_1,s_2,\mathbf{c})$ не відрізняється від дослідження двовимірного випадку галуження первинного розв'язку першого типу $f_0(s_1,s_2,\mathbf{c})$, то нижче наведемо лише основні результати необхідних перетворень для знаходження відгалужених від $f_1(s_1,s_2,\mathbf{c})$ розв'язків у першому наближенні.

Запишемо необхідне надалі спряжене до (27) рівняння

$$\psi(s_1,s_2)=T^*(\mathbf{c})\psi\equiv\frac{\tilde{F}(s_1,s_2)}{f_1(s_1,s_2,\mathbf{c})}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}K(s_1,s_2,t_1,t_2,\mathbf{c})\psi(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2\,. \qquad (54)$$

При довільних $\mathbf{c}=(c_1,c_2)\in\mathbf{\Lambda}_c$ однією з власних функцій цього рівняння є

$$\psi_1(s_1,s_2)=\tilde{F}(s_1,s_2)\,. \qquad (55)$$

Зауважимо, що коефіцієнти розкладів підінтегральних функцій (19) на променях $c_2=\beta c_1$ залежать лише від двох параметрів: $c_1$ та $\beta$. Їхні вирази у точках $\left(c_1^{(\ell)},\beta c_1^{(\ell)}\right)$ позначимо через $A_{mnp}\left(Q,Q',c_1^{(\ell)},\beta c_1^{(\ell)}\right)$, $B_{mnp}\left(Q,Q',c_1^{(\ell)},\beta c_1^{(\ell)}\right)$. Ці коефіцієнти є неперервно залежними від своїх аргументів. Відмінними від тотожного нуля при $m+n+p\le 4$ у розкладах (21) є такі коефіцієнти: $A_{001}$, $A_{002}$, $A_{020}$, $A_{120}$, $A_{021}$, $A_{003}$, $A_{220}$, $A_{040}$, $A_{121}$, $A_{022}$, $A_{004}$, $B_{010}$, $B_{011}$, $B_{110}$, $B_{210}$, $B_{030}$, $B_{111}$, $B_{012}$, $B_{310}$, $B_{130}$, $B_{211}$, $B_{031}$, $B_{112}$, $B_{103}$.

Запишемо перші (при $m+n+p\le 3$) відмінні від тотожного нуля коефіцієнти $A_{mnp}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(\ell)}\right)$ та $B_{mnp}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(\ell)}\right)$, необхідні надалі для знаходження відгалужених розв'язків у першому наближенні:

$$A_{000}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)=\tilde{F}(Q')\left\{\frac{\sin(c_1^{(\ell)}(s_1-s_1'))}{\pi(s_1-s_1')}\cdot\frac{\sin(\beta c_1^{(\ell)}(s_2-s_2'))}{\pi(s_2-s_2')}\right\},$$

$$A_{001}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}) = \tilde{F}(Q')\left\{\frac{\sin(c_1^{(\ell)}(s_1 - s_1'))}{\pi(s_1 - s_1')} \cdot \frac{\beta\cos(\beta c_1^{(\ell)}(s_2 - s_2'))}{\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin(\beta c_1^{(\ell)}(s_2 - s_2'))}{\pi(s_2 - s_2')} \cdot \frac{\cos(c_1^{(\ell)}(s_1 - s_1'))}{\pi}\right\},$$

$$A_{020}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}) = -\frac{1}{2}\frac{\tilde{F}(Q')(s_1')^2}{f_1^2(Q',\mathbf{c}^{(0)})}\left\{\frac{\sin(c_1^{(\ell)}(s_1 - s_1'))}{\pi(s_1 - s_1')} \cdot \frac{\sin(\beta c_1^{(\ell)}(s_2 - s_2'))}{\pi(s_2 - s_2')}\right\},$$

$$A_{002}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}) = -\tilde{F}(Q')\left\{\frac{\sin(c_1^{(\ell)}(s_1 - s_1'))}{\pi(s_1 - s_1')} \cdot \beta^2(s_2 - s_2')^2 \times \right.$$

$$\times \frac{\sin(\beta c_1^{(0)}(s_2 - s_2'))}{2\pi(s_2 - s_2')} + \frac{\sin(c_1^{(\ell)}(s_1 - s_1'))}{\pi(s_1 - s_1')}\frac{\sin(\beta c_1^{(\ell)}(s_2 - s_2'))}{\pi(s_2 - s_2')} \times$$

$$\left. \times \frac{(s_1 - s_1')^2}{2!} - \beta\frac{\cos(c_1^{(\ell)}(s_1 - s_1'))}{\pi}\frac{\cos(\beta c_1^{(0)}(s_2 - s_2'))}{\pi}\right\}; \qquad (56)$$

$$B_{010}(Q,Q',\mathbf{c}^{(\ell)}) = \frac{\tilde{F}(Q')(s_1')}{f_1(Q',\mathbf{c}^{(\ell)})}\left\{\frac{\sin(c_1^{(\ell)}(s_1 - s_1'))}{\pi(s_1 - s_1')} \cdot \frac{\sin(\beta c_1^{(\ell)}(s_2 - s_2'))}{\pi(s_2 - s_2')}\right\},$$

$$B_{011}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}) = \frac{\tilde{F}(Q')(s_1')}{f_1(Q',\mathbf{c}^{(0)})}\left\{\frac{\sin(c_1^{(0)}(s_1 - s_1'))}{\pi(s_1 - s_1')} \cdot \frac{\beta\cos(\beta c_1^{(0)}(s_2 - s_2'))}{\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin(\beta c_1^{(\ell)}(s_2 - s_2'))}{\pi(s_2 - s_2')} \cdot \frac{\cos(c_1^{(\ell)}(s_1 - s_1'))}{\pi}\right\},$$

$$B_{110}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}) = -\frac{\tilde{F}(Q')(s_1')^2}{f_1^2(Q',\mathbf{c}^{(0)})}\left\{\frac{\sin(c_1^{(\ell)}(s_1 - s_1'))}{\pi(s_1 - s_1')} \cdot \frac{\sin(\beta c_1^{(\ell)}(s_2 - s_2'))}{\pi(s_2 - s_2')}\right\},$$

$$B_{210}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}) = \frac{\tilde{F}(Q')(s_1')^3}{f_1^3(Q',\mathbf{c}^{(0)})}\left\{\frac{\sin(c_1^{(\ell)}(s_1 - s_1'))}{\pi(s_1 - s_1')} \cdot \frac{\sin(\beta c_1^{(\ell)}(s_2 - s_2'))}{\pi(s_2 - s_2')}\right\},$$

$$B_{030}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}) = -\frac{\tilde{F}(Q')(s_1')^3}{2f_1^3(Q',\mathbf{c}^{(0)})}\left\{\frac{\sin(c_1^{(\ell)}(s_1 - s_1'))}{\pi(s_1 - s_1')} \cdot \frac{\sin(\beta c_1^{(\ell)}(s_2 - s_2'))}{\pi(s_2 - s_2')}\right\},$$

$$B_{111}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}) = -\frac{\tilde{F}(Q')(s_1')}{f_1^2(Q',\mathbf{c}^{(0)})}\left\{\frac{\sin(c_1^{(0)}(s_1 - s_1'))}{\pi(s_1 - s_1')} \cdot \frac{\beta\cos(\beta c_1^{(0)}(s_2 - s_2'))}{\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin(\beta c_1^{(\ell)}(s_2 - s_2'))}{\pi(s_2 - s_2')} \cdot \frac{\cos(c_1^{(\ell)}(s_1 - s_1'))}{\pi}\right\},$$

$$B_{012}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}) = -\frac{\tilde{F}(Q')(s_1')}{f_1(Q',\mathbf{c}^{(0)})}\left\{\frac{\sin(c_1^{(0)}(s_1 - s_1'))}{\pi(s_1 - s_1')} \cdot \frac{\sin(\beta c_1^{(0)}(s_2 - s_2'))}{2\pi(s_2 - s_2')} \times \right.$$

$$\times \beta^2(s_2 - s_2')^2 + \frac{\sin(c_1^{(\ell)}(s_1 - s_1'))}{\pi(s_1 - s_1')}\frac{\sin(\beta c_1^{(\ell)}(s_2 - s_2'))}{\pi(s_2 - s_2')}\frac{(s_1 - s_1')^2}{2!} -$$

$$\left. - \beta\frac{\cos(c_1^{(0)}(s_1 - s_1'))}{\pi}\frac{\cos(\beta c_1^{(0)}(s_2 - s_2'))}{\pi}\right\}. \qquad (57)$$

Для дослідження розв'язків системи рівнянь (22), (23) у точці галуження, якій відповідають власні функції $\varphi_1$, $\varphi_2$, запишемо необхідні надалі власні функції спряженого до (27) рівняння, що відповідають власним значенням $\mathbf{c}^{(0)} = (c_1^{(0)}, c_2^{(0)}) = (c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)})$:

$$\psi_1(s_1,s_2) = \tilde{F}(s_1,s_2), \qquad \psi_2(s_1,s_2) = s_1 \cdot \tilde{F}(s_1,s_2). \qquad (58)$$

Оскільки у правій частині рівняння (22) відсутні лінійні члени відносно невідомих функцій $w(s)$, $\omega(s)$ (з урахуванням параметра $\mu$), то згідно з [2] це рівняння належить до найпростіших інтегральних рівнянь типу Ляпунова – Шмідта. Виключаючи з ядра інтегрального оператора в лівій частині рівняння (23) ортонормовані власні функції (30), (35), (58), аналогічно, як у [7], одержуємо друге рівняння системи найпростіших рівнянь типу Ляпунова – Шмідта у вигляді

$$\omega(Q)=\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\varphi_j(Q)+\sum_{m+n+p\geq 2}^{\infty}\mu^p\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}g_{mnp}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)})w^m(Q')\omega^n(Q')\,dQ', \quad (59)$$

де

$$g_{mnp}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)})=B_{mnp}(Q,Q')+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}R(Q,P,\mathbf{c}^{(0)})B_{mnp}(P,Q')\,dP, \quad (60)$$

$$\zeta_1=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\omega(Q)\varphi_1(Q)\,dQ, \quad (61)$$

$$\zeta_2=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\omega(Q)\varphi_2(Q)\,dQ. \quad (62)$$

Таким чином, для знаходження відгалужених у точці $\mathbf{c}^{(0)}=\left(c_1^{(0)},\beta c_1^{(0)}\right)$ розв’язків отримано систему двох найпростіших рівнянь (22), (59) типу Ляпунова – Шмідта. Згідно з [2] ця система при достатньо малих $\mu$, $|\zeta_1|$, $|\zeta_2|$ має єдиний неперервний розв’язок, який запишемо у вигляді рівномірно збіжних рядів:

$$w(Q)=a(Q,\mathbf{c}^{(0)})\mu+\sum_{i+j+\ell\geq 2}^{\infty}\alpha_{ij\ell}(Q)\zeta_1^i\zeta_2^j\mu^\ell, \quad (63)$$

$$\omega(Q)=\zeta_1\varphi_1(Q)+\zeta_2\varphi_2(Q)+\sum_{i+j+\ell\geq 2}^{\infty}\beta_{ij\ell}(Q)\zeta_1^i\zeta_2^j\mu^\ell. \quad (64)$$

Підставляючи вирази (63), (64) у рівняння (22), (59) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових одночленах, одержуємо рекурентну систему для визначення коефіцієнтів $\alpha_{ij\ell}(Q)$, $\beta_{ij\ell}(Q)$. Наведемо ті з них, які необхідні для знаходження відгалужених розв’язків у першому наближенні:

$$\alpha_{002}(Q)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}A_{002}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)})\,dQ',$$

$$\alpha_{020}(Q)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}A_{020}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)})\varphi_2^2(Q')\,dQ',$$

$$\beta_{011}(Q)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[g_{011}(Q,Q')+g_{110}(Q,Q')\,a(Q',\mathbf{c}^{(0)})\right]\varphi_2(Q')\,dQ',$$

$$\beta_{030}(Q)=\int_{-1}^{1}\left[g_{110}(Q,Q')\alpha_{020}(Q')\varphi_1(Q')+g_{030}(Q,Q')\varphi_2^2(Q')\right]\varphi_2(Q')\,dQ',$$

$$\beta_{012}(Q)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}g_{011}(Q,Q')\beta_{011}(Q')\,dQ'+$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}g_{110}(Q,Q')\left[a(Q',\mathbf{c}^{(0)})\beta_{011}(Q')+\alpha_{002}(Q')\varphi_2(Q')\right]\varphi_2(Q')\,dQ'+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\Big[g_{012}(Q,Q')\varphi_2(Q') + g_{111}(Q,Q')\varphi_2(Q')a\big(Q',\mathbf{c}^{(0)}\big)\Big]dQ' +$$

$$+\,2\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} g_{210}(Q,Q')a^2(Q',\mathbf{c}^{(0)})dQ'\,. \qquad (65)$$

Для визначення усіх можливих значень параметрів $\zeta_1$, $\zeta_2$ (що входять у розв'язки (63), (64)), як функцій від змінної $\mu$, підставимо вираз (64) у формули (61), (62). В результаті отримуємо систему рівнянь розгалуження Ляпунова – Шмідта

$$L_{011}^{(\delta)}\zeta_1\mu + \sum_{i+j+\ell\geq 3} L_{ij\ell}^{(\delta)}\zeta_1^i\,\zeta_2^j\,\mu^\ell = 0, \qquad \delta = 1,2\,, \qquad (66)$$

де

$$L_{ij\ell}^{(\delta)} = \int\limits_{-1}^{1}\beta_{ij\ell}(s)\varphi_\delta(s)\,ds \qquad (67)$$

– коефіцієнти системи рівнянь розгалуження[3].

Згідно з [2] кількість розв'язків системи (66) визначає кількість відгалужених від $f_1\big(Q,\mathbf{c}^{(0)}\big)$ розв'язків системи (22), (59).

Як показано в [4], розв'язки рівняння (6) визначаються з точністю до сталого множника $\exp(i\gamma)$, де $\gamma$ – довільна дійсна константа. Для однозначності шуканих розв'язків будемо вимагати виконання умови $\arg f(0,0) = 0$, що еквівалентно, зокрема, виконанню такої тотожності:

$$\omega(Q,\mu)\big|_{Q=0} = \omega(0,0,\mu) \equiv 0\,. \qquad (68)$$

Ця умова буде виконуватись, якщо в рівнянні (59) і у представленні відгалужених розв'язків (63), (64) покласти $\zeta_1(\mu) \equiv 0$. У цьому випадку рівняння розгалуження набуває вигляду

$$\left(L_{11}\mu + L_{12}\mu^2\right)\zeta_2 + L_{30}\,\zeta_2^3 + \sum_{\substack{j+\ell\geq 4\\ j\geq 1}} L_{j\ell}\,\zeta_2^j\,\mu^\ell = 0\,, \qquad (69)$$

де $L_{j\ell} = L_{0j\ell}^{(2)}$.

Для знаходження усіх розв'язків рівняння (69) застосовуємо метод діаграми Ньютона [2]. Шукані розв'язки подамо у вигляді дробово-степеневого ряду

$$\zeta_1(\mu) = d_1\mu^{\varepsilon_1} + d_2\mu^{\varepsilon_2} + d_3\mu^{\varepsilon_3} + \ldots\,, \qquad (70)$$

де $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, … – зростаюча послідовність раціональних чисел. Шуканими є коефіцієнти $d_n$ і показники степенів $\varepsilon_n$.

Діаграма Ньютона рівняння (69) має вигляд, зображений на рис. 2. Довжина абсциси спадаючого відрізка діаграми дорівнює двом. Звідси випливає, що рівняння (69) має два відмінні від тотожного нуля розв'язки, які є дійсними у випадку, коли коефіцієнти $L_{11}$, $L_{30}$ мають різні знаки й подаються формулою

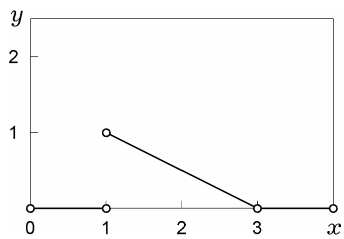


Рис. 2

[3] Зауважимо, що при обчисленні коефіцієнтів (62) застосовується рівність

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} g_{ij\ell}(P,Q')\varphi_\delta(P)\,dP = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} B_{ij\ell}(P,Q')\psi_\delta(P)\,dP, \qquad \delta = 1,2\,.$$

$$\zeta_2^{\delta}(\mu) = \pm h_1\mu^{1/2} + \sum_{\ell=3}^{\infty} d_\ell^{(\delta)}\mu^{(\ell+1)/2}, \qquad \delta = 1,2\,, \tag{71}$$

де

$$h_1 = \sqrt{-L_{11} / L_{30}}\,. \tag{72}$$

Числа $d_\ell^{(\delta)}$ знаходимо методом невизначених коефіцієнтів. Якщо коефіцієнти $L_{11}$, $L_{30}$ у рівнянні (69) мають різні знаки, то коефіцієнт $h_1$ у рівності (72) є дійсною величиною. У цьому випадку дійсна та уявна частини відгалужених розв'язків належать до простору дійсних функцій, і відгалуження розв'язків відбувається вправо, тобто при $\mu > 0$. Якщо ж коефіцієнти $L_{11}$ і $L_{30}$ мають один і той же знак, то $h_1$ − уявна величина. Відповідно дійсна та уявна частини відгалужених розв'язків можуть бути дійсними функціями лише при $\mu < 0$, тобто відгалуження розв'язків відбувається вліво.

З рівності (64) випливає, що малі розв'язки визначаються через функцію $\zeta_2(\mu)$, записану формулою (71). Підставляючи (71) у ряди (63), (64) і покладаючи $\zeta_1(\mu) \equiv 0$, з використанням формул (17) знаходимо, що в точці $\mathbf{c}_1^{(0)} = \left(c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}\right)$ від первинного розв'язку $f_1\left(Q, \mathbf{c}_1^{(0)}\right)$ відгалужуються два комплексно-спряжені між собою розв'язки системи (9), які в першому наближенні мають вигляд

$$\begin{aligned} f_{1,2}^{(1)}(s_1, s_2, c_1, \beta c_1) &= f_1\left(s_1, s_2, c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}\right) + \\ &+ \left(a\left(s_1, s_2, c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}\right) + \alpha_{020}^{(1)}\left(s_1, s_2, c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}\right) h_1^2\right)\mu \pm \\ &\pm i\,\frac{\varphi_2\left(s_1, s_2, c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}\right)}{\left\|\varphi_2\left(s_1, s_2, c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}\right)\right\|} h_1\mu^{1/2} + O(\mu^{3/2})\,. \end{aligned} \tag{73}$$

Таким чином, дві різні функції $\zeta_2^{(\delta)}(\mu)$, $\delta = 1,2$, породжують два комплексно-спряжені між собою розв'язки. У рівностях (73) $a\left(s_1, s_2, c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}\right)$, $\alpha_{020}^{(1)}\left(s_1, s_2, c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}\right)$ − дійсні непарні за $s_1$ функції у випадку, коли задана ДН $F(t_1, t_2)$ є парною функцією за двома аргументами. Отже, $\arg f_{1,2}^{(1)}(s_1, s_2, c_1, \beta c_1)$ є непарною за $s_1$ функцією. Відповідний такому типу розв'язку амплітудно-фазовий розподіл поля у розкриві, обчислений за формулою

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \frac{c_1 c_2}{(2\pi)^2} \iint_G F(s_1, s_2) \times \\ &\times \exp\left[i\left(\arg f_{1,2}^{(1)}(s_1, s_2, c_1, \beta c_1) - (c_1 x s_1 + c_2 y s_2)\right)\right] ds_1\, ds_2\,, \end{aligned} \tag{74}$$

є дійсним і несиметричним відносно осі $Ox$.

Зазначимо, що дослідження двовимірного випадку галуження первинного розв'язку $f_2(s_1, s_2)$ проводиться за схемою, аналогічною до наведеної вище.

**2. Чисельне знаходження розв'язків.**

***2.1. Метод послідовних наближень.*** Для знаходження розв'язків системи (9) застосовуємо, зокрема, метод послідовних наближень:

$$\begin{aligned} u_{n+1}(Q) &= \iint_G F(Q') K(Q, Q', \mathbf{c}) \frac{u_n(Q')}{\sqrt{u_n^2(Q') + v_n^2(Q')}}\, dQ'\,, \\ v_{n+1}(Q) &= \iint_G F(Q') K(Q, Q', \mathbf{c}) \frac{v_n(Q')}{\sqrt{u_n^2(Q') + v_n^2(Q')}}\, dQ', \quad n = 0,1,2,\ldots. \end{aligned} \tag{75}$$

У результаті ітераційного процесу (75) одержуємо послідовність $\{u_n(Q), v_n(Q)\}$, на підставі якої за формулою (8) знаходимо послідовність значень функції розподілу стороннього поля збудження у розкриві:

$$U_n(x,y) = \frac{c_1 c_2}{(2\pi)^2} \iint\limits_{G} F(Q) \times$$

$$\times \exp\left[i\left(\arg f_n(Q) - (c_1 x s_1 + c_2 y s_2)\right)\right] ds_1\, ds_2, \qquad n = 0,1,2,\dots . \quad (76)$$

Релаксаційні властивості ітераційного процесу (75) доведено в [1, 4].

***2.2. Числові результати.*** Розглянемо числові результати синтезу заданої в прямокутній області $G$ амплітудної ДН $F(s_1,s_2) = |\sin(\pi s_1)|\cos(\pi s_2/2)$, зображеної на рис. 3.

На рис. 4***а***, рис. 4***б*** показано амплітуду та фазу первинного розв'язку другого типу $f_1(s_1,s_2,\mathbf{c})$ при $c_1 = 7.8$, $c_2 = 7.2$. Характерною особливістю цього розв'язку є наявність нульової лінії при $s_1 = 0$, яка співпадає з нульовою лінією заданої амплітудної ДН (див. рис. 3).

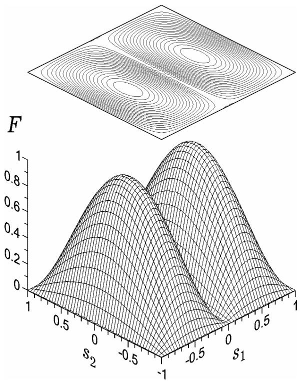
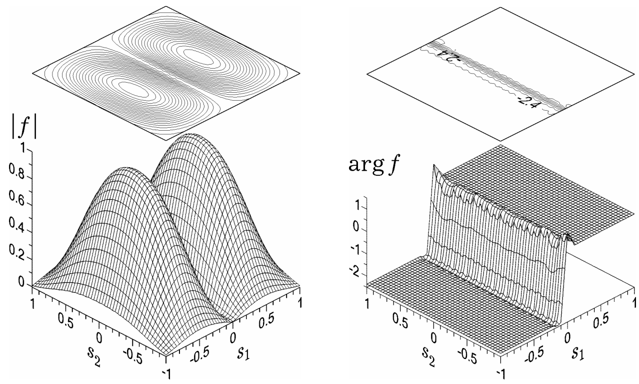


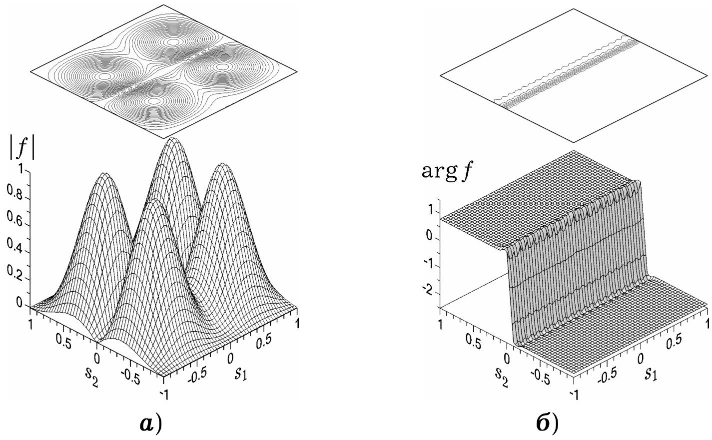

Рис. 3




***а***) ***б***)

Рис. 4

Другий первинний розв'язок другого типу $f_3(s_1,s_2,\mathbf{c})$ зображено на рис. 5. Як бачимо, він має дві нульові лінії, Одна з них, по осі $Os_1$, відповідає нульовій лінії заданої амплітудної ДН. Друга нульова лінія, по осі $Os_2$, відповідає наявності множника $\operatorname{sgn}(t_2 - t_2^{(0)})$ при $t_2^{(0)} = 0$ у формулі (15). Із аналізу рис. 5 випливає, що цей розв'язок є неефективним.




***а***) ***б***)

Рис. 5

Далі розглянемо значення функціонала (4), яких він набуває на розв'язках різних типів (див. рис. 6). Крива ***1*** відповідає другому первинному розв'язку другого типу, який при значеннях параметрів $c_1 = 7.8$, $c_2 = 7.2$ зображено на рис. 5. Крива ***2*** відповідає первинному розв'язку першого типу $f_0(Q, \mathbf{c})$ (формула (10)). Крива ***3*** відображає відгалужений від $f_0(Q, \mathbf{c})$ розв'язок з непарною за $s_2$ фазовою ДН. Значенню функціонала $\sigma_F$ на першому первинному розв'язку другого типу $f_1(s_1, s_2, \mathbf{c})$ відповідає крива ***4***. Відгалуженому від $f_1(s_1, s_2, \mathbf{c})$ розв'язку з непарною за $s_1$ фазовою ДН відповідає крива **5**. Із аналізу рисунка бачимо, що найбільш ефективним (у сенсі значень функціонала $\sigma_F$) для заданої амплітудної ДН є відгалужений від $f_1(s_1, s_2, \mathbf{c})$ розв'язок з непарною за $s_1$ фазовою ДН (крива **5**).

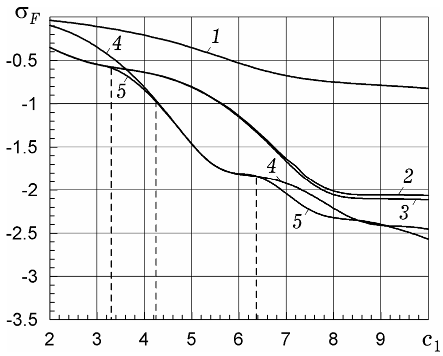
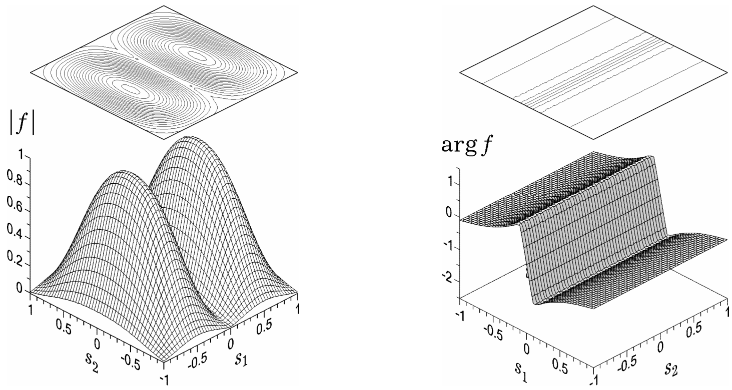


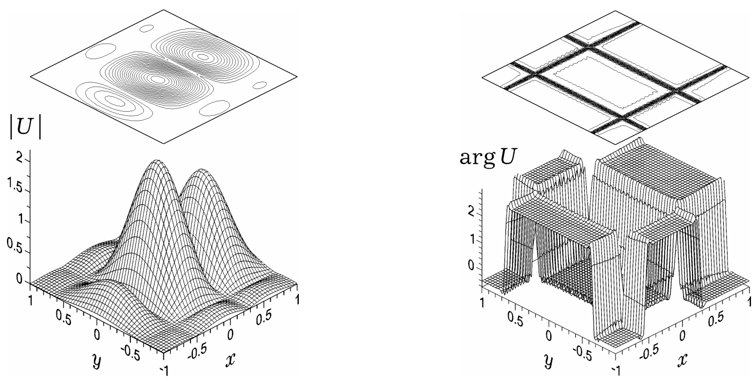
Рис. 6

Приклад синтезованої амплітудної ДН, що відповідає відгалуженому від $f_1(s_1, s_2, \mathbf{c})$ розв'язку при $c_1 = 7.8$, $c_2 = 7.2$, наведено на рис. 7. Оптимальний розподіл поля в розкриві, що породжує ДН, наведену на рис. 7, є дійсним, але несиметричним відносно координатних осей і зображений на рис. 8.



***а***) ***б***)

Рис. 7



***а***) ***б***)

Рис. 8

**Висновки.** Відмітимо, що задачі синтезу радіотехнічних та акустичних випромінюючих систем за заданими енергетичними характеристиками напрямленості належать до класу задач з неповною вхідною інформацією, для яких є характерною неєдиність розв'язків. Дослідження галуження первинного розв'язку першого типу проведено в роботах [5, 7, 8]. У цій роботі наведено дослідження двовимірного випадку галуження первинного розв'язку другого типу. Водночас існують тривимірні випадки галуження, які вимагають додаткових досліджень. Із аналізу числових результатів випливає, що первинні розв'язки другого типу та відгалужені від них розв'язки є ефективними лише для заданих ДН типу двопелюсткових.

Наявність неєдиності розв'язків у розглянутому класі задач дає для практики можливість вибрати найбільш ефективний розв'язок, який має простішу фізичну реалізацію.

Наведені у цій роботі і в роботах [5, 7, 8] результати досліджень можуть бути застосованими до задач синтезу плоских антенних решіток [4, 5].


1. *Андрийчук М. И., Войтович Н. Н., Савенко П. А., Ткачук В. П.* Синтез антенн по амплитудной диаграмме направленности. Численные методы и алгоритмы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 256 с.
2. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 527 с.
3. *Зелкин Е. Г., Соколов В. Г.* Методы синтеза антенн: Фазированные антенные решетки и антенны с непрерывным раскрывом. – Москва: Сов. радио, 1980. – 296 с.
4. *Савенко П. А., Процах Л. П.* Метод неявной функции в решении двумерной нелинейной спектральной проблемы // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 11 (546). – С. 41–44.
   Те саме: *Savenko P. O., Protsakh L. P.* Implicit function method in solving a two-dimensional nonlinear spectral problem // Russ. Math. (Izv. VUZ). – 2007. – **51**, No. 11. – P. 40–43.
5. *Савенко П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем (теорія і методи розв'язування). – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2002. – 320 с.
6 *Савенко П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем з плоским розкривом. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2014. – 314 с.
7. *Савенко П. О., Процах Л. П., Ткач М. Д.* Про найкраще середньоквадратичне наближення дійсної невід'ємної фінітної неперервної функції від двох змінних модулем подвійного інтеграла Фур'є. I // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 1. – С. 53–64.
   Те саме: *Savenko P. O., Protsakh L. P., Tkach M. D.* On the best mean-square approximation of a real nonnegative finite continuous function of two variables by the modulus of a double Fourier integral. I // J. Math. Sci. – 2009. – **160**, No. 3. – P. 343–356. – https://doi.org/10.1007/s10958-009-9502-3.
8. *Савенко П. О., Процах Л. П., Ткач М. Д.* Про найкраще середньоквадратичне наближення дійсної невід'ємної фінітної неперервної функції від двох змінних модулем подвійного інтеграла Фур'є. II // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 4. – С. 80–85.
   Те саме: *Savenko P. O., Protsakh L. P., Tkach M. D.* On the best mean-square approximation of a real nonnegative finite continuous function of two variables by the modulus of a double Fourier integral. II // J. Math. Sci. – 2010. – **167**, No. 1. – P. 89–95. – https://doi.org/10.1007/s10958-010-9904-2.
9. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1980. – 496 с.
10. *Savenko P.* Computational methods in the theory of synthesis of radio and acoustic radiating systems // Appl. Math. – 2013. – **4**, No. 3. – P. 523–549.
11. *Savenko P., Klakovych L., Tkach M.* Theory of nonlinear synthesis of radiating systems. – LAP (LAMBERT Acad. Publ.), 2016. – 357 p.
12. *Savenko P., Tkach M.* Numerical approximation of real finite nonnegative function by the modulus of discrete Fourier transform // Appl. Math. – 2010. – **1**, No. 1. – P. 41–51.
13. *Zeidler E.* Nonlinear functional analysis and its applications. I: Fixed-point theorems. – New York: Springer-Verlag, 1986. – xxi+897 p.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕТВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ СИНТЕЗА ИЗЛУЧАЮЩИХ СИСТЕМ С ПЛОСКИМ РАСКРЫВОМ ПО ЗАДАННОЙ АМПЛИТУДНОЙ ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ**

*Продолжается исследование проблемы неединственности решений в задачах синтеза излучающих систем с плоским раскрывом в зависимости от двух параметров, характеризующих величину раскрыва и телесный угол, в котором задана необходимая амплитудная диаграмма направленности. Обосновано существование и свойства действительных (первичных) решений четырех типов. Проведено исследование ветвления первичных решений второго типа. Найдены в первом приближении аналитические представления комплексных решений, ответвленных от действительного решения. Определены их основные свойства. Проведены численные эксперименты по исследованию эффективности действительных и ответвленных комплексных решений.*

**INVESTIGATION OF BRANCHING SOLUTIONS OF SYNTHESIS PROBLEMS FOR RADIATING SYSTEMS WITH A FLAT APERTURE ACCORDING TO THE PRESCRIBED DIRECTIVITY PATTERN**

*In the present paper the study of the question of non-uniqueness of solutions in synthesis problems of the radiating systems with a flat aperture depending on the two parameters that characterize the size of aperture and the solid angle in which the required amplitude directivity pattern is given, is continued. The existence and properties of real (primary) solutions of four types are elucidate. Branching the primary solutions of the second type is investigated. Analytical representations of complex solutions, branched from a real solution, are found in the first approximation, and their main properties were determined too. Numerical experiments were conducted to study the efficiency of real and branched complex solutions.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
20.07.17