УДК 393.3

Г. М. Приймак

НЕКЛАСИЧНІ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ В АЛГЕБРАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО ТИПУ

Досліджено векторнозначні гомоморфізми алгебри аналітичних функцій обмеженого типу, які визначені на тензорному добутку комутативної банахової алгебри і банахового простору. Побудовано некласичні диференціювання вказаної алгебри та встановлено зв'язок цих диференціювань із відповідними гомоморфізмами.

Вступ. Алгебри цілих функцій обмеженого типу $H_b(X)$ на нескінченновимірних банахових просторах X є стандартним об'єктом нескінченновимірного комплексного аналізу.

Спектр алгебри $H_b(X)$ вперше описали Р. Арон, Б. Коул і Т. Гамелін у своїй роботі [1] у 1991 році. Гомоморфізми алгебри $H_b(X)$, диференціювання на ній та інші дотичні питання вивчалися у статтях [2, 3, 4, 5, 8, 9] вченими Д. Гарандо, Д. Гарсія, М. Маестре, А. В. Загороднюком, О. В. Лопушанським та іншими.

У роботах [6, 7] досліджено гомоморфізми алгебри A-значних цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі X для деякої банахової алгебри A. У цій статті побудовано нові (некласичні) диференціювання вказаної алгебри та встановлено зв'язок цих диференціювань із відповідними гомоморфізмами.

1. Попередні відомості. Нехай A – комутативна банахова алгебра, X – банахів простір над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Записом $A \otimes_\pi X$ позначимо проективний тензорний добуток алгебри A і простору X. Кожен елемент цього добутку можна подати у вигляді суми $\overline{a} = \sum_k a_k \otimes_\pi x_k$, де $a_k \in A$, $x_k \in X$.

Для кожного елемента $\overline{a} \in A \otimes_\pi X$ і функції $f \in H_b(X)$ визначимо $\overline{f}(\overline{a})$ як "значення" f на $\overline{a}$ в сенсі функціонального числення аналітичних функцій на банахових просторах [3]. Тоді $\tilde{\overline{f}}$ є продовженням Арона – Бернера для функції $\overline{f}$ [6].

Нехай $\mathcal{L}(H_b(A \otimes_\pi X), A)$ – простір усіх неперервних n-лінійних операторів з $H_b(A \otimes_\pi X)$ на A і $M_A(H_b(A \otimes_\pi X))$ – множина всіх гомоморфізмів з $H_b(A \otimes_\pi X)$ на A.

Позначимо через $A_n(X)$ замикання алгебри, породженої поліномами з $\mathcal{P}(^{\le n} X)$, з відповідною рівномірною топологією на обмежених підмножинах простору X.

Для кожного фіксованого елемента $\overline{a} \in A \otimes_\pi X$ визначимо *оператор згортки* $\tau_{\overline{a}}$ на $H_b(A \otimes_\pi X)$:

$$(\tau_{\overline{a}} \overline{f})(\overline{z}) = \overline{f}(\overline{a} + \overline{z}), \quad \overline{z} \in A \otimes_\pi X, \ \overline{f} \in H_b(A \otimes_\pi X).$$

Легко бачити, що $\tau_{\overline{a}} \overline{f}$ є аналітичною функцією на просторі $A \otimes_\pi X$ і обмеженою на його обмежених підмножинах. Отже, $\tau_{\overline{a}} \overline{f} \in H_b(A \otimes_\pi X)$.

Означення. Для фіксованих $\Phi, \Theta \in \mathcal{L}(H_b(A \otimes_\pi X), A)$ *оператор згортки* $\Phi * \Theta$ в алгебрі $H_b(A \otimes_\pi X)$ визначається рівністю

$$(\Phi * \Theta)(\overline{f}) = \Phi(\Theta(\tau_{\overline{a}} \overline{f})).$$

Нехай $\overline{\Phi}$, $\overline{\Theta}$ – мультиплікативні оператори, $\overline{\Phi}, \overline{\Theta} \in M_A(H_b(A \otimes_\pi X))$. Припустимо, що $\overline{\Phi}$ задовольняє умову

$$\overline{\Phi}(P) = \lim_{\alpha} P(\overline{x_\alpha})$$

для кожного P на $A \otimes_\pi X$ для деякої напрямленості $(\overline{x_\alpha}) \subset A \otimes_\pi X$. Таким чином, отримуємо підмножину

$$\Omega = \left\{ \overline{\Phi} \in M_A(H_b(A \otimes_\pi X)) : \exists\, (\overline{x_\alpha}) \subset A \otimes_\pi X \right.$$

$$\left. \forall P \in P(A \otimes_\pi X) \text{ таких, що } \lim_{\alpha} P(\overline{x_\alpha}) = \overline{\Phi}(P) \right\}.$$

Іншими словами, $(\overline{x_\alpha}) \to \overline{\Phi}$ у слабко поліноміальній топології для всіх $\overline{\Phi} \in \Omega$. Зауважимо, що у випадку, коли $A = \mathbb{C}$, всі гомоморфізми належать класу Ω [1].

Нехай напрямленість $(\overline{y_\beta})$ збігається до $\overline{\Theta}$ у слабко поліноміальній топології: $(\overline{y_\beta}) \to \overline{\Theta}$, $\overline{\Theta} \in \Omega$.

Тоді

$$(\overline{\Phi} * \overline{\Theta})(P) = \lim_{\alpha} \lim_{\beta} P(\overline{x_\alpha} + \overline{y_\beta}).$$

Згортку n елементів $\overline{\Phi_1} * \ldots * \overline{\Phi_n}$ коротко запишемо так: $\mathop{*}\limits_{k=1}^{n} \overline{\Phi_k}$

Нехай I_k – мінімальний замкнений ідеал алгебри $H_b(A \otimes_\pi X)$, який породжений усіма m-однорідними поліномами $\mathcal{P}(^{\leq k}(A \otimes_\pi X))$, де $0 < m \leq k$. Очевидно, що I_k є власним ідеалом (не містить одиниці). Тому він міститься у замкнутому максимальному ідеалі.

Нехай

$$\mathcal{F}_k = \{\overline{\Phi} \in \Omega : \ker \overline{\Phi} \supset I_k\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Вважаємо, що $\mathcal{F}_0 = \Omega$.

Лема (Lemma 2.7 [6]). *Якщо* $P \in \mathcal{P}(^k(A \otimes_\pi \mathrm{X}))$ *і* $\overline{\Phi_j} \in \mathcal{F}_{j-1}$, *тоді для всіх* $m > k$

$$\mathop{*}\limits_{j=1}^{m} \overline{\Phi_j}(P) = \mathop{*}\limits_{j=1}^{k} \overline{\Phi_j}(P).$$

Задамо послідовність $(\overline{\Phi_n})_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$, де $\overline{\Phi_n} \in \mathcal{F}_{n-1}$. Нескінченна згортка $\mathop{*}\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\Phi_n}$ позначає лінійний мультиплікативний оператор на алгебрі всіх поліномів $\mathcal{P}(A \otimes_\pi X)$ таких, що $\mathop{*}\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\Phi_n}(P) = \mathop{*}\limits_{n=1}^{k} \overline{\Phi_n}(P)$ для всіх $P \in \mathcal{P}(^k(A \otimes_\pi X))$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Якщо цей мультиплікативний оператор є неперервним, то він однозначно визначає гомоморфізм в Ω. Ми будемо позначати цей гомоморфізм тим самим символом $\overset{\infty}{\underset{n=1}{*}} \overline{\Phi_n}$.

Відомо, що оператор $\delta_x(f) = f(x)$ відображає X в M_b і $\tilde{\delta}_{x''}(f) = \tilde{f}(x'')$ є продовженням δ_x на X'' Аналогічно позначимо $\theta_{\overline{a}}(\overline{f}) = \theta(\overline{a})(\overline{f}) = \overline{f}(\overline{a})$, тоді $\tilde{\theta}_{\overline{a}''}(\overline{f}) = \tilde{\theta}(\overline{a}'')(\overline{f}) = \tilde{\overline{f}}(\overline{a}'')$ є продовженням оператора $\theta_{\overline{a}}$ на $(A \otimes_\pi X)''$.

Теорема 1 (Theorem 2.8 [6]). *Існує послідовність спряжених банахових просторів* $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ *і послідовність відображень*

$$\theta^{(n)} : Z_n \to \Omega$$

таких, що

$$Z_1 = (A \otimes_\pi X)'', \quad Z_n = \mathcal{L}(H_b(A \otimes_\pi X), A), \quad \theta^{(1)} = \tilde{\theta},$$

і довільний гомоморфізм $\overline{\Phi} \in \Omega$ *можна подати у вигляді*

$$\overline{\Phi} = \overset{\infty}{\underset{n=1}{*}} \theta^{(n)}(u_n)$$

для деяких $u_n \in Z_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

2. Основні результати. Нехай $u_k \in Z_k$. Застосовуючи теорему 1, можемо визначити гомоморфізм $\overline{\Phi} = \overset{\infty}{\underset{n=1}{*}} \theta^{(n)}(u_n) \in \Omega$, $\overline{\Phi}(\overline{f}) = \tilde{\overline{f}}(u_k)$, для всіх $\overline{f} \in (H_b(A \otimes_\pi X))$. Крім того, елемент u_k належить до симетричного тензорного добутку спряжених просторів $(\odot_\pi^k (A \otimes_\pi X))''$. Тому існує інший природний спосіб задання лінійного функціонала на $H_b(A \otimes_\pi X)$, асоційованого з u_k.

Нехай

$$\eta = \eta(u_k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} \eta_m \in H_b(A \otimes_\pi X)',$$

де $\eta_k = \tilde{\overline{P}}(u_k)$, якщо $P \in \mathcal{P}(^k(A \otimes_\pi X))$, і $\eta_m = 0$ при $m \neq k$. Через $\tilde{\overline{P}}$ позначено продовження полінома $P \in \mathcal{P}(^n(A \otimes_\pi X))$ на простір $\mathcal{P}(^n(A \otimes_\pi X)'')$. Зауважимо, що відображення η не є гомоморфізмом, якщо $u_k \neq 0$.

Визначимо лінійний оператор $\overline{\partial}_{(k)}(u_k)$ на $H_b(A \otimes_\pi X)$:

$$\overline{\partial}_{(k)}(u_k)(\overline{f})(\overline{x}) := \eta(u_k) \circ \tau_{\overline{a}}(\overline{f}), \quad \overline{f} \in H_b(A \otimes_\pi X).$$

Для мультилінійної форми A_P, асоційованої з n-однорідним поліномом $P \in \mathcal{P}(^n(A \otimes_\pi X))$, позначимо через $\overline{A}_P(\overline{x}^{n-k}, u_k)$ значення в сенсі функціонального числення у точці $u_k \in Z_k$ для k-однорідного полінома при фіксованому $\overline{x} \in (A \otimes_\pi X) : u_k \mapsto \overline{A}_P(\overline{x}^{n-k}, \cdot)$.

Теорема 2. *Нехай* $u_k \in Z_k$. *Оператор* $\overline{\partial}_{(k)}(u_k)$ *є неперервним диференціюванням на* $H_b(A \otimes_\pi X)$,

$$\overline{\partial}_{(k)}(u_k)(P)(\overline{x}) = \binom{n}{k} \tilde{\overline{A}}_P(\overline{x}^{n-k}, u_k), \quad \overline{x} \in A \otimes_\pi X, \tag{1}$$

для всіх $P \in \mathcal{P}({}^n(A \otimes_\pi X))$ *і*

$$\theta^{(k)}(u_k)(\bar{f})(\bar{x}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} \frac{(k!)^m}{(mk)!} \bar{\partial}^m_{(k)}(u_k)(\bar{f})(\bar{x}), \quad \bar{x} \in A \otimes_\pi X, \tag{2}$$

для всіх $\bar{f} \in H_b(A \otimes_\pi X)$.

Д о в е д е н н я. Для доведення формули (1) зауважимо, що

$$P(z + x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} A_P(x^{n-m}, z^m).$$

Ця рівність буде виконуватися у випадку, коли доданки z і x є елементами тензорного добутку:

$$P(\bar{z} + \bar{x}) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \tilde{\bar{A}}_P(\bar{x}^{n-m}, \bar{z}^m), \quad \bar{x}, \bar{z} \in A \otimes_\pi X.$$

Таким чином, для фіксованого $\bar{x} \in A \otimes_\pi X$ маємо

$$\bar{\partial}_{(k)}(u_k)(P)(\bar{x}) = \eta(u_k)(P(\bar{z} + \bar{x})) = \binom{n}{k} \tilde{\bar{A}}_P(\bar{x}^{n-k}, u_k).$$

Зауважимо, що при $\deg P \le k$ з означення $\bar{\partial}_{(k)}(u_k)$ отримаємо $\bar{\partial}_{(k)}(u_k)(P)(\bar{x}) = 0$ для всіх $\bar{x} \in A \otimes_\pi X$.

Нехай $P \in \mathcal{P}({}^n(A \otimes_\pi X))$ і $Q \in \mathcal{P}({}^m(A \otimes_\pi X))$. Мультилінійну форму $\tilde{\bar{A}}_{PQ}(\bar{x}^{nm-k}, \bar{z}^k)$, асоційовану з поліномом PQ, можна подати у вигляді суми

$$\tilde{\bar{A}}_{PQ}(\bar{x}^{nm-k}, \bar{z}^k) = \tilde{\bar{A}}^1_{PQ}(\bar{x}^{nm-k}, \bar{z}^k) + \tilde{\bar{A}}^2_{PQ}(\bar{x}^{nm-k}, \bar{z}^k) + \tilde{\bar{A}}^3_{PQ}(\bar{x}^{nm-k}, \bar{z}^k),$$

де

$$\tilde{\bar{A}}^1_{PQ}(\bar{x}^{n-k}, \bar{z}^k) := \tilde{\bar{A}}_P(\bar{x}^{n-k}, \bar{z}^k)\tilde{\bar{A}}_Q(\bar{x}^m),$$

$$\tilde{\bar{A}}^2_{PQ}(\bar{x}^{n-k}, \bar{z}^k) := \tilde{\bar{A}}_P(\bar{x}^n)\tilde{\bar{A}}_Q(\bar{x}^k, \bar{z}^{m-k})$$

і

$$\tilde{\bar{A}}^3_{PQ}(\bar{x}^{n-k}, \bar{z}^k) := \frac{1}{k-1} \sum_{s=1}^{k-1} \tilde{\bar{A}}_P(\bar{x}^{n-s}, \bar{z}^s)\tilde{\bar{A}}_Q(\bar{x}^{k-s}, \bar{z}^{m-k+s}).$$

Якщо $n \le k$, тоді $\tilde{\bar{A}}^1_{PQ} = 0$. Аналогічно, якщо $m \le k$, тоді $\tilde{\bar{A}}^2_{PQ} = 0$. Згідно з означенням $\eta(u_k)$ і u_k маємо

$$\eta(u_k)\tilde{\bar{A}}^3_{PQ}(\bar{x}^{n-k}, \bar{z}^k) = 0$$

для довільного фіксованого $\bar{x} \in A \otimes_\pi X$. Таким чином, ми показали, що виконується рівність

$$\bar{\partial}_{(k)}(u_k)(PQ)(\bar{x}) = \bar{\partial}_{(k)}(u_k)(P)(\bar{x})Q(\bar{x}) + P(\bar{x})\bar{\partial}_{(k)}(u_k)(Q)(\bar{x}).$$

З лінійності оператора $\bar{\partial}_{(k)}(u_k)$ та тотожності Лейбніца випливає, що $\bar{\partial}_{(k)}(u_k)$ є оператором диференціювання на алгебрі $H_b(A \otimes_\pi X)$. Неперервність $\bar{\partial}_{(k)}(u_k)$ випливає з неперервності $\eta(u_k)$ і неперервності оператора $\tau_{\bar{a}}$.

Нехай $P \in \mathcal{P}({}^n(A \otimes_\pi X))$ і $n = km$. З рівності (1) маємо, що

$$\overline{\partial}_{(k)}^m(u_k)(P) = \binom{km}{k}\binom{k(m-1)}{k}\cdots\binom{k}{k}\tilde{\overline{P}}(u_k) = \frac{(mk)!}{(k!)^m}\theta^{(k)}(u_k)(P).$$

Отже,

$$\theta^{(k)}(u_k) = \sum_{m\in\mathbb{Z}_+}\frac{(k!)^m}{(mk)!}\overline{\partial}_{(k)}^m(u_k),$$

тобто формула (2) доведена. ♦

1. *Aron R. M., Cole B. J., Gamelin T. W.* Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. – 1991. – **1991**, No. 415. – P. 51–93. https://doi.org/10.1515/crll.1991.415.51
2. *Carando D., Garcia D., Maestre M.* Homomorphisms and composition operators on algebras of analytic functions of bounded type // Adv. Math. – 2005. – **197**, No. 2. – P. 607–629. – https://doi.org/10.1016/j.aim.2004.10.018
3. *Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A.* Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra // Proc. Edinb. Math. Soc. – 2012. – **55**, No. 1. – P. 125–142. https://doi.org/10.1017/S0013091509001655
4. *Dineen S., Harte R. E., Taylor C.* Spectra of tensor product elements. III: Holomorphic properties // Math. Proc. Roy. Ir. Acad. – 2003. – **103**A, No. 1. – P. 61–92.
5. *Lopushansky O., Zagorodnyuk A.* Representing measures and infinite-dimensional holomorphy // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – **333**, No. 2. – P. 614–625. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.09.035
6. *Pryimak H.* Description of homomorphisms of algebras of analytic functions on Banach spaces // Int. Journal of Math. Analysis. – 2016. – **10**, No. 14. – P. 669–676. https://doi.org/10.12988/ijma.2016.6459
7. *Pryimak H. M.* Homomorphisms and functional calculus in algebras of entire functions on Banach spaces // Карпат. мат. публ. – 2015. – **7**, No. 1. – P. 108–113. https://doi.org/10.15330/cmp.7.1.108-113
8. *Zagorodnyuk A.* Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces // Contemp. Math. – 2007. – **435**. – P. 381–394.
9. *Zagorodnyuk A.* Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 2006. – **134**. – P. 2559–2569. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-06-08260-8

НЕКЛАССИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ В АЛГЕБРАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ТИПА

Исследованы векторнозначные гомоморфизмы алгебры аналитических функций ограниченного типа, определенных на тензорном произведении коммутативной банаховой алгебры и банахова пространства. Построены неклассические дифференцирования указанной алгебры и установлена связь между дифференцированиями и соответствующими гомоморфизмами.

NON-CLASSICAL DIFFERENTIATION IN ALGEBRAS OF ANALYTICAL FUNCTIONS OF BOUNDED TYPE

The vector-valued homomorphisms of algebra of analytic functions of bounded type which are defined on the tensor product of a commutative Banach algebra and Banach space are studied. The non-classical differentiations of the algebra are constructed and the relationship between these differentiations and corresponding homomorphisms are established.

Прикарпатський нац. ун-т
ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
17.12.2016