

КОНТАКТ ПРУЖНОГО ТІЛА І ЖОРСТКОЇ ОСНОВИ З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ КВАЗІЕЛІПТИЧНИХ ВИЇМОК, ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНИХ РІДИНОЮ, ЯКА ЗМОЧУЄ ПОВЕРХНІ ТІЛ

Змодельовано безфрикційний контакт пружного тіла та жорсткої основи за наявності в ній періодично розташованих виїмок квазіеліптичної форми, коли на краях міжповерхневих просвітів міститься нестислива рідина, яка змочує поверхні тіл, а в середніх частинах – газ, що перебуває під сталим тиском. Внаслідок поверхневого натягу рідини виникає перепад тисків у рідині й газі, що описується рівнянням Лапласа. Сформульовану контактну задачу для пружного півпростору зведено до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта відносно похідної від висоти просвітів і трансцендентного рівняння для визначення ширини ділянки з газом. Проаналізовано залежності ширини ділянки з газом, перепаду тисків, форми зазорів і контактної зближення тіл від прикладеного навантаження, об'єму рідини та її поверхневого натягу.

Вступ. Функціонування технічних і природних систем часто супроводжується конденсацією вологи на поверхнях, яка під час їхнього контакту переміщується під дією поверхневого натягу у вузьчі місця міжповерхневих просвітів. Вплив поверхневого натягу рідини та капілярних явищ на контактну поведінку тіл зростає зі зменшенням їхніх розмірів, що засвідчують експериментальні дані [17–19, 21, 22]. Для мікро- та наноструктур капілярна адгезія є істотним чинником формування фактичної площі контакту, тертя та зношування, контактної передачі навантажень, кінематичних параметрів рухомих з'єднань. У працях [2, 20, 23] розв'язано контактні задачі теорії пружності для тіл із неузгодженими поверхнями, для яких властивий локальний контакт, з урахуванням капілярних явищ.

У випадку взаємодії тіл з узгодженими поверхнями площа їхнього контакту співмірна з площею поверхонь, а локальний характер мають міжконтактні просвіти, які виникають в області малих геометричних збурень границь. Тоді заповнювач міжповерхневих просвітів стає активним чинником контактної системи, оскільки при навантаженні такі зазори можуть істотно змінювати об'єм і викликати зворотну реакцію з боку заповнювача у вигляді зміни тиску. Раніше вивчалася контактна поведінка тіл з узгодженими поверхнями, коли поодинокі або періодично розташовані просвіти містили один вид заповнювача – рідину або газ [3, 4, 9, 12].

Досліджено взаємодію тіл, які мають локальні виїмки гладкої форми, частково заповнені рідиною, що змочує [10, 11, 16] або не змочує [15] їхні поверхні, та тіл, межа одного з яких має періодичний рельєф, за наявності на краях просвітів містків рідини, яка змочує поверхні [6, 8] або не змочує [5] їх. Контакт пружного тіла та жорсткої основи з мілкими виїмками прямокутної форми, коли рідинний місток розташований в середній частині просвітів, а крайні його частини містять газ, що перебуває під сталим тиском, досліджено для поодинокі виїмки [13] і періодично розміщених виїмок [7].

У цій роботі досліджуємо взаємодію пружного тіла та жорсткої основи з регулярним рельєфом, сформованим періодично розміщеними виїмками квазіеліптичної форми, за наявності на краях міжповерхневих просвітів рідини, що змочує поверхні тіл, а в середніх частинах – газу, що перебуває під сталим тиском.

1. Постановка контактної задачі. Розглянемо безфрикційну взаємодію пружного ізотропного півпростору з жорсткою основою, межа якої має нескінченну систему розташованих з періодом d мілких тунельних виїмок ширини $2c$, форма яких описується парною функцією

$$r(x) = -A \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2(\pi x/d)}{\operatorname{tg}^2(\pi c/d)} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

такою що $A \ll 2c$. Півпростір притискається до основи під дією рівномірно розподілених на нескінченності стискувальних навантажень P^∞ . Внаслідок нерівності основи між тілами виникають просвіти висоти $h(x)$ (рис. 1). Вважаємо, що вони частково заповнені нестисливою рідиною, яка повністю змочує поверхні тіл (крайовий кут змочування $\theta = 0^\circ$), а частково газом, що перебуває під сталим тиском P_1 . Кількість рідини в кожному просвіті однакова і залишається незмінною при навантаженні. Тому виконується умова збереження рідини

$$\ell \int_b^c h(x) dx = \frac{1}{2} V_0 + \frac{h^2(b)}{8} \pi, \quad (2)$$

де $\ell = 1$ м, V_0 – об'єм рідини, що припадає на одиницю довжини кожного просвіту у поздовжньому напрямі.

Під дією поверхневого натягу σ рідина збиратиметься в найвужчих місцях просвітів і формуватиме міжповерхневі рідинні містки на краях просвітів у ділянках $(-c + kd, -b + kd) \cup (c + kd, a + kd)$, а газ – у середній частині просвітів у ділянках $(-b + kd, b + kd)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Меніск – бічна поверхня рідини, яка межує з газом, – у перерізі має форму півкола [10], радіус якого R дорівнює половині висоти просвітів у точках $x = \pm b$: $R = h(b)/2$. На менісках діє поверхневий натяг рідини σ . Внаслідок цього тиск у рідині P_2 менший, ніж тиск газу P_1 , і перепад тисків визначається формулою Лапласа [1]

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{2\sigma}{h(b)}. \quad (3)$$

У процесі навантаження змінюватимуться висота просвітів $h(x)$, ширина ділянок з газом $2b$ і тиск рідини P_2 .

Контактно-крайові умови сформульованої плоскої контактної задачі мають вигляд

– уздовж просвітів $|x - kd| < c$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$\tau_{xy} = 0, \quad x \in (-c + kd, c + kd), \quad (4)$$

$$\sigma_{yy} = -P_1, \quad x \in (-b + kd, b + kd), \quad (5)$$

$$\sigma_{yy} = -P_2, \quad x \in (-c + kd, -b + kd) \cup (b + kd, c + kd); \quad (6)$$

– на ділянках контакту $c \leq |x - kd| \leq d/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$\tau_{xy} = 0, \quad (7)$$

$$v = 0; \quad (8)$$

– на нескінченності $y \rightarrow \pm \infty$:

$$\sigma_{yy} = -P^\infty, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (9)$$

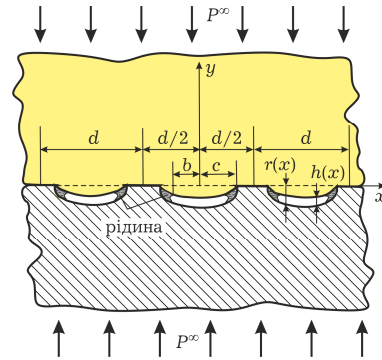


Рис. 1

Тут σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} – компоненти тензора напружень; v – складова вектора переміщень уздовж осі Oy .

2. Методика розв'язування задачі. Використовуючи метод комплексних потенціалів Колосова – Мусхелішвілі [14], напруження і переміщення подамо у вигляді

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} + \sigma_{xx} &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z) + P^\infty, \\ \sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} - P^\infty,\end{aligned}\quad (10)$$

$$2G(u' + iv') = \alpha\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} + \frac{3 - \alpha}{4}P^\infty, \quad (11)$$

де $z = x + iy$; $\Phi(z)$ – кусково-голоморфна у площині $D = D_1 \cup D_2$ функція, що згасає на нескінченності $y \rightarrow \pm\infty$; D_1 і D_2 – верхня $y > 0$ і нижня $y < 0$ півплощини; $\alpha = 3 - 4\nu$; G , ν – відповідно модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу пружного тіла.

Якщо виразити комплексний потенціал $\Phi(z)$ через похідну від висоти просвітів $h'(x)$ [10]

$$\Phi(z) = \frac{(-1)^{3-n}}{dK} \left[\int_{-c}^c h'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{d} dt - \int_{-c}^c r'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{d} dt \right], \quad (12)$$

де $K = 2(1 - \nu)/G$, то подання (10), (11) задовольнятимуть усі контактнокрайові умови (4)–(9), за винятком умов (5) і (6).

Задовольнивши за допомогою подань (10)–(12) умови (5), (6), отримаємо сингулярне інтегральне рівняння (СІР) з ядром Гільберта відносно $h'(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{2}{d} \int_{-c}^c h'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt &= K(P^\infty - P(x)) + \\ &+ \frac{2}{d} \int_{-c}^c r'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt,\end{aligned}\quad (13)$$

$$\text{де } P(x) = \begin{cases} P_1 - 2\sigma/h(b), & b < |x| \leq c, \\ P_1, & |x| \leq b. \end{cases}$$

У крайніх точках просвітів повинні виконуватись умови рівності висоти зазорів і висоти виїмок $h(-c) = 0$, $h(c) = 0$, які в еквівалентному вигляді запишемо так:

$$\int_{-c}^c h'(t) dt = 0, \quad h(c) = 0. \quad (14)$$

Заміною змінних

$$\xi = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{d}, \quad \eta = \operatorname{tg} \frac{\pi t}{d}, \quad \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi c}{d}, \quad \beta = \operatorname{tg} \frac{\pi b}{d} \quad (15)$$

трансформуємо СІР (13) з ядром Гільберта у СІР з ядром Коші:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{d}{2(1 + \xi^2)} K(P^\infty - P(\xi)) - \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{r'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta, \quad \xi \in [-\alpha, \alpha], \quad (16)$$

$$\text{де } P(x) = \begin{cases} P_1 - 2\sigma/h(\beta), & \beta < |x| \leq \alpha, \\ P_1, & |x| \leq \beta. \end{cases}$$

Умови (14) у нових змінних мають вигляд

$$h(\pm\alpha) = 0. \quad (17)$$

У розглядуваному випадку функцію форми виїмок $r(x)$ у нових змінних (15) запишемо так:

$$r(\xi) = -\frac{A}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}. \quad (18)$$

Бачимо, що у нових змінних виїмки мають еліптичну форму. Тому виїмки, що описуються функцією (1), називатимемо квазіеліптичними.

Після врахування форми виїмок (18) СІР (16) набуде вигляду

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{d}{2(1 + \xi^2)} K(P^\infty - P(\xi)) - \frac{A\pi}{\alpha}, \quad \xi \in [-\alpha, \alpha]. \quad (19)$$

У зв'язку з наявністю на межі основи кутових точок шукатимемо необмежений [14] у точках $\xi = \pm\alpha$ розв'язок рівняння (19):

$$h'(\xi) = \left(\frac{K(P^\infty - P_1)\sqrt{\alpha^2 + 1}}{2\pi} - \frac{2K\sigma\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\pi^2 h(\beta)} \arcsin \frac{\beta\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha\sqrt{1 + \beta^2}} \right) \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} - \frac{K\sigma d}{2\pi^2 h(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha, \xi, \beta) - \Gamma(\alpha, \xi, -\beta)}{1 + \xi^2} - \frac{A}{\alpha} \frac{\xi}{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}, \quad \xi \in [-\alpha, \alpha]. \quad (20)$$

Для визначення висоти просвітів $h(\xi)$ необхідно проінтегрувати вираз (20) з урахуванням умови (17). Оскільки цей інтеграл не вдається взяти аналітично, функцію $h(\xi)$ будемо визначати наближено, подавши $h'(\xi)$ у вигляді скінченної суми ряду за поліномами Чебишова 1-го роду:

$$h'(\xi) = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} \sum_{\ell=0}^L \Theta_\ell (2\ell + 1) T_{2\ell+1} \left(\frac{\xi}{\alpha} \right). \quad (21)$$

Прирівнявши вирази (20) і (21) у точках колокацій $\xi_j = \alpha \cos(\pi j / (2L + 3))$, $j = 1, \dots, L + 1$, за які вибрано нулі полінома Чебишова $T_{2L+3}(\xi/\alpha)$, отримуємо систему $L + 1$ лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів Θ_ℓ :

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \xi_j^2}} \sum_{\ell=0}^L \Theta_\ell (2\ell + 1) T_{2\ell+1} \left(\frac{\xi_j}{\alpha} \right) &= -\frac{A}{\alpha} \frac{\xi_j}{\sqrt{\alpha^2 - \xi_j^2}} - \\ &- \frac{K\sigma d}{2\pi^2 h(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha, \xi_j, \beta) - \Gamma(\alpha, \xi_j, -\beta)}{1 + \xi_j^2} + \frac{\xi_j}{(1 + \xi_j^2)\sqrt{\alpha^2 - \xi_j^2}} \times \\ &\times \left(\frac{Kd(P^\infty - P_1)\sqrt{\alpha^2 + 1}}{2\pi} - \frac{2K\sigma d\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\pi^2 h(\beta)} \arcsin \frac{\beta\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha\sqrt{1 + \beta^2}} \right). \end{aligned}$$

Проінтегрувавши (21), з урахуванням (17) знаходимо висоту просвітів:

$$h(\xi) = \sqrt{\alpha^2 - \xi^2} \sum_{\ell=0}^L \Theta_\ell U_{2\ell} \left(\frac{\xi}{\alpha} \right), \quad |\xi| \leq \alpha. \quad (22)$$

Підставивши (22) в умову збереження кількості рідини (2), отримаємо трансцендентне рівняння для невідомої ширини β ділянки з газом:

$$\int_{\beta}^{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{1 + \xi^2} \sum_{\ell=0}^L \Theta_{\ell} U_{2\ell} \left(\frac{\xi}{\alpha} \right) d\xi = \frac{Ad(\sqrt{\alpha^2 + 1} - 1)}{2\alpha\ell} V_0 + \frac{h^2(\beta)}{8\ell} \pi. \quad (23)$$

З подань (10)–(12), використовуючи співвідношення (21) та формулу Лапласа (3), знайдемо вирази для контактних напружень:

$$\sigma_{yy} = \begin{cases} \frac{2\pi(1 + \xi^2)}{Kd\sqrt{\xi^2/\alpha^2 - 1}} \sum_{\ell=0}^L (2\ell + 1)\theta_{\ell} \left(\frac{|\xi|}{\alpha} - \sqrt{\frac{\xi^2}{\alpha^2} - 1} \right)^{2\ell+1} + \\ + \frac{2\pi(1 + \xi^2)A}{d\alpha} \left(1 - \frac{|\xi|}{\sqrt{\xi^2 - \alpha^2}} \right) - P^{\infty}, & |\xi| \geq \alpha, \\ -P_1 + \frac{2\sigma}{h(\beta)}, & \beta < |\xi| < \alpha, \\ -P_1, & |\xi| \leq \beta. \end{cases}$$

Контактне зближення тіл Δv^{∞} , яке визначається за формулою

$$\Delta v^{\infty} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} (r(x) - h(x)) dx,$$

буде мати вигляд

$$\Delta v^{\infty} = \frac{A}{\alpha} \left(\sqrt{\alpha^2 + 1} - 1 \right) - \sum_{\ell=0}^L \Theta_{\ell} \alpha^{-2\ell} (-1)^{\ell} \left(\sqrt{\alpha^2 + 1} - 1 \right)^{2\ell+1}.$$

Трансцендентне рівняння (23) відносно невідомої β розв'язуємо чисельно, використовуючи метод послідовних наближень. За початкове наближення вибираємо аналітичний розв'язок задачі, коли нехтуємо поверхневим натягом рідини ($\sigma = 0$), тобто за сталого тиску заповнювача P_1 у проsvітах:

$$h_0(\xi) = -\frac{Kd(P^{\infty} - P_1)}{2\pi} \operatorname{arcth} \sqrt{\frac{\alpha^2 - \xi^2}{\alpha^2 + 1}} + \frac{A}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}, \quad |\xi| \leq \alpha.$$

Невідому півширину ділянки з газом на нульовому кроці β_0 знаходимо з умови збереження кількості рідини (2):

$$\begin{aligned} & -\frac{Kd^2(P^{\infty} - P_1)}{2\pi^2} \int_{\beta_0}^{\alpha} \ln \frac{\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{\sqrt{\alpha^2 + 1} - \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} + \\ & + \frac{2dA\ell}{\pi\alpha} \left(\arcsin \frac{\beta_0}{\alpha} - \sqrt{\alpha^2 + 1} \arcsin \frac{\beta_0 \sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha \sqrt{\beta_0^2 + 1}} \right) + \\ & + \frac{dA\ell}{\alpha} \left(\sqrt{\alpha^2 + 1} - 1 \right) - V_0 \frac{dA\ell}{\alpha} \left(\sqrt{\alpha^2 + 1} - 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

3. Аналіз числових результатів. Числові розрахунки виконано для координати $\tilde{x} = x/d$, форми поверхні пружного тіла, яка просіла над виїмкою $\tilde{h}^*(\tilde{x}) = h^*(x/d)$ ($h^*(x) = r(x) + h(x)$), півширини ділянки з газом $\tilde{b} = b/d$, півширини виїмки $\tilde{c} = c/d$, поверхневого натягу рідини $\tilde{\sigma} = K\sigma/d$, тиску на нескінченності $\tilde{P}^{\infty} = KP^{\infty}$, тиску газу $\tilde{P}_1 = KP_1$, максимальної висоти виїмки $\tilde{A} = A/d$, контактного зближення $\Delta \tilde{v}^{\infty} = \Delta v^{\infty}/d$, об'єму рідини в зазорі $\tilde{V}_0 = V_0/V$, де V – об'єм виїмки. Контактну поведінку

системи проаналізовано для значень півширин виїмки $\tilde{c} = 0.25$ і $\tilde{c} = 0.3$, максимальної висоти виїмки $\tilde{A} = 0.001$ і тиску газу $\tilde{P}_1 = 10^{-3}$. На рис. 2 проілюстровано результати обчислень, виконаних для поверхневого натягу рідини $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$ та об'ємів рідини $\tilde{V}_0 = 0.1$ (криві 1), $\tilde{V}_0 = 0.2$ (криві 2), $\tilde{V}_0 = 0.3$ (криві 3), а на рис. 3–6 – для об'єму рідини $\tilde{V}_0 = 0.1$ за поверхневих натягів рідини $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$ (криві 1), $\tilde{\sigma} = 7 \cdot 10^{-8}$ (криві 2), $\tilde{\sigma} = 10^{-7}$ (криві 3), $\tilde{\sigma} = 3 \cdot 10^{-7}$ (криві 4). Суцільні криві відповідають півширині виїмок $\tilde{c} = 0.25$, а штрихові – значенню $\tilde{c} = 0.3$.

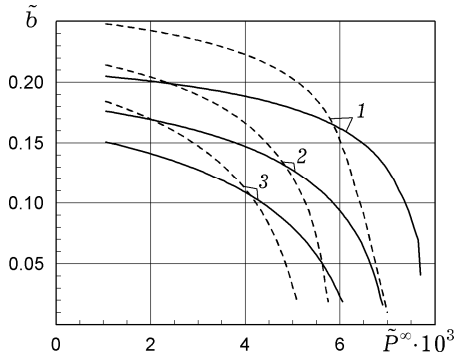


Рис. 2

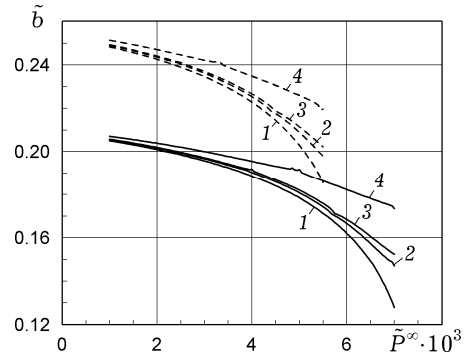


Рис. 3

Зі зменшенням об'єму рідини \tilde{V}_0 ділянка з газом збільшується (рис. 2). Зі збільшенням поверхневого натягу рідини $\tilde{\sigma}$ ширина ділянки з газом збільшується (рис. 3), а з ростом навантаження – зменшується. Чим більша ширина виїмок \tilde{c} , тим більша ширина ділянки з газом \tilde{b} .

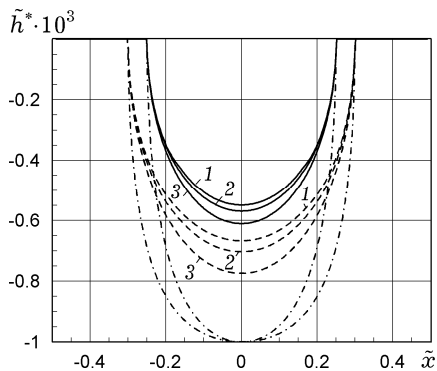


Рис. 4

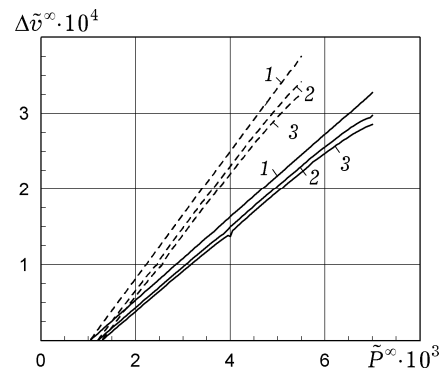


Рис. 5

За фіксованого зовнішнього навантаження $\tilde{P}^\infty = 5.35 \cdot 10^{-3}$ зі збільшенням поверхневого натягу рідини $\tilde{\sigma}$ висота просвітів h^* зростає (рис. 4) в їхній центральній частині. Штрихпунктирні криві описують форму виїмок $\tilde{r}(\tilde{x})$. Чим менша ширина виїмок, тим більша висота зазорів.

З підвищенням навантаження контактне зближення $\Delta\tilde{v}^\infty$ тіл монотонно зростає (рис. 5), причому, чим більший поверхневий натяг, тим воно є меншим. Чим більша ширина виїмок \tilde{c} , тим більшим є контактне зближення тіл.

Дві горизонтальні ділянки на рис. 6а відображають розподіл тиску заповнювача $P(x) = -\sigma_{yy}(x, 0)$ за фіксованого зовнішнього навантаження $\tilde{P}^\infty = 5.35 \cdot 10^{-3}$ уздовж просвіту: перша – на середній його частині, що за-

повнена газом, друга – на двох крайніх, які заповнені рідиною, де тиск є найменшим. При збільшенні поверхневого натягу тиск рідини на цій ділянці буде зменшуватись. Контактний тиск поверхонь $P(x)$ на ділянках їхнього контакту $\tilde{c} \leq |\tilde{x}| \leq 1/2$ прямує до нескінченності на краях виїмки, а при віддаленні від неї – монотонно спадає (рис. 6б), набуваючи локального мінімуму в точках $\tilde{x} = \pm 0.5$, що ділять навпіл ділянки між виїмками. Зі збільшенням поверхневого натягу рідини $\tilde{\sigma}$ контактний тиск поверхонь зростає. Чим менша ширина виїмок, тим менший контактний тиск. При зменшенні поверхневого натягу рідини від $\tilde{\sigma} = 3 \cdot 10^{-7}$ до $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$ тиск рідини збільшується на 5%, а контактний тиск у точці, яка ділить навпіл ділянки між виїмками, зменшується на 17%.

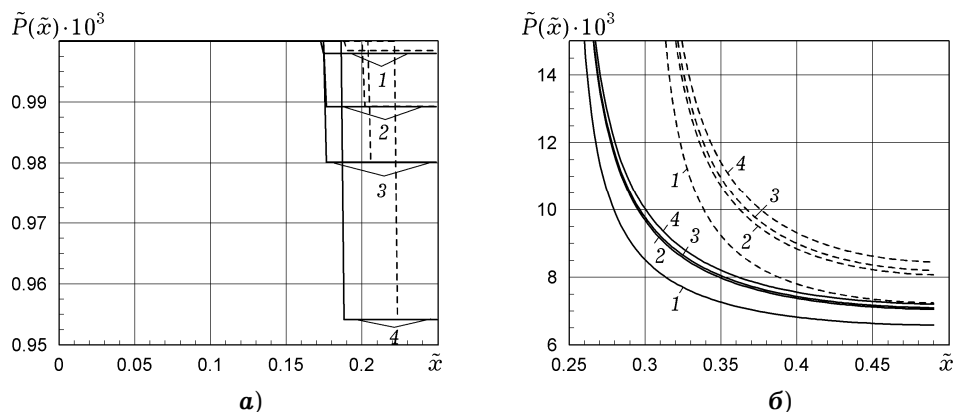


Рис. 6

Висновки. Досліджено контакт пружного тіла та жорсткої основи, межа якої містить періодичну систему виїмок квазіеліптичної форми, за наявності в міжконтактних просвітах газу та нестисливої рідини, яка змочує поверхні тіл. Перепад тисків у рідині та газі описується рівнянням Лапласа. Ширина ділянки з газом і висота просвітів заздалегідь невідомі та змінюються разом з навантаженням. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта відносно висоти міжконтактних просвітів і трансцендентного рівняння відносно довжини ділянки з рідиною, яке розв'язано чисельно. Досліджено залежності ширини ділянки з рідиною та висоти просвітів від прикладеного навантаження, об'єму рідини і її поверхневого натягу. Встановлено, що збільшення зовнішнього навантаження і поверхневого натягу рідини зумовлює зростання ширини ділянки з рідиною. Наявність рідинних містків зумовлює зменшення висоти просвіту: чим більший поверхневий натяг рідини, тим менший просвіт між тілами. Зі зменшенням поверхневого натягу рідини її тиск збільшується, а контактний тиск поверхонь зменшується.

1. Арцъбышев С. А. Курс физики. Ч. 1. Механика и теплота – Москва: Учпедгиз, 1951. – 671 с.
2. Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю. Адгезионное взаимодействие упругих тел // Прикл. математика и механика. – 2001. – 65, № 2. – С. 279–289.
The same: Goryacheva I. G., Makhovskaya Yu. Yu. Adhesive interaction of elastic bodies // J. Appl. Math. Mech. – 2001. – 65, No. 2. – P. 273–282.
3. Кит Г. С., Мартыняк Р. М., Мачишин И. М. Влияние газожидкостного заполнителя межконтактного пространства на напряженное состояние сопряженных тел // Прикл. механика. – 2003. – 39, № 3. – С 52–60.
The same: Kit G. S., Martynyak R. M., Machishin I. M. The effect of a fluid in the contact gap on the stress state of conjugate bodies // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, No. 3. – P. 292–299.

4. Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М. Взаємодія двох пружних тіл за наявності між ними періодично розташованих зазорів, заповнених реальним газом // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2015. – **58**, № 1. – С. 103–111.
Te same: *Kozachok O. P., Slobodian B. S., Martynyak R. M. Interaction of two elastic bodies in the presence of periodically located gaps filled with a real gas* // *J. Math. Sci.* – 2017. – **222**, No. 2. – P. 131–142.
5. Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М. Контакт пружних тіл за наявності газу та незмочувальної рідини у періодичних міжповерхневих просвітах // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2015. – **51**, № 6. – С. 50–57.
Te same: *Kozachok O. P., Slobodyan B. S., Martynyak R. M. Contact of elastic bodies in the presence of gas and incompressible liquid in periodic interface gaps* // *Mater. Sci.* – 2016. – **51**, No. 6. – P. 804–813.
6. Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М. Взаимодействие упругих тел с периодическим рельефом при наличии жидкостных мостиков в межконтактных зазорах // *Теорет. и прикл. механика.* – 2013. – Вып. 7(53). – С. 45–52.
7. Козачок О., Слободян Б., Мартиняк Р. Вплив міжповерхневих рідинних містків на контакт пружного тіла і жорсткої основи з періодичною системою прямокутних виїмок // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2015. – Вип. 22. – С. 67–76.
8. Козачок О., Слободян Б., Мартиняк Р. Вплив міжповерхневих рідинних містків на контактну взаємодію тіл з хвилястим рельєфом // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2016. – Вип. 24. – С. 34–46.
9. Мартиняк Р. М. Контакт півпростору з нерівною основою при заповненому ідеальним газом міжконтактному зазорі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1998. – **41**, № 4. – С. 144–149.
Te same: *Martynyak R. M. The contact of a half-space and an uneven base in the presence of an intercontact gap filled by an ideal gas* // *J. Math. Sci.* – 2001. – **107**, No. 1. – P. 3680–3685.
10. Мартиняк Р. М., Слободян Б. С. Взаємодія двох тіл за наявності капілярів у міжконтактному зазорі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2006. – **49**, № 1. – С. 164–173.
11. Мартиняк Р. М., Слободян Б. С. Вплив рідинних містків у міжповерхневому просвіті на контакт тіл із податливих матеріалів // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2008. – **44**, № 2. – С. 7–13.
Te same: *Martynyak R. M., Slobodyan B. S. Influence of liquid bridges in the interface gap on the contact of bodies made of compliant materials* // *Mater. Sci.* – 2008. – **44**, No. 2. – P. 147–155.
12. Мартиняк Р. М., Слободян Б. С. Контакт пружних півпросторів за наявності між ними еліптичного зазору з рідиною // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2009. – **45**, № 1. – С. 62–65.
Te same: *Martynyak R. M., Slobodyan B. S. Contact of elastic half spaces in the presence of an elliptic gap filled with liquid* // *Mater. Sci.* – 2009. – **45**, No. 1. – P. 66–71.
13. Мартиняк Р. М., Слободян Б. С., Зеленьак В. М. Тиск пружного півпростору на жорстку основу з прямокутною виїмкою за наявності між ними рідинного містка // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2008. – **51**, № 1. – С. 150–156.
Te same: *Martynyak R. M., Slobodyan B. S., Zelenyak V. M. Pressure of an elastic half space on a rigid base with rectangular hole in the case of a liquid bridge between them* // *J. Math. Sci.* – 2009. – **160**, No. 4. – P. 470–477.
14. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
Te same: *Muskhelishvili N. I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity.* – Gröningen: Springer, 1977. – 732 p.
15. Слободян Б. С. Тиск пружного тіла на жорстку основу з виїмкою, частково заповненою рідиною, що не змочує їх поверхні // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2011. – **47**, № 4. – С. 122–128.
Te same: *Slobodyan B. S. Pressure of an elastic body on a rigid base with a recess partially filled with a liquid that does not wet their surfaces* // *Mater. Sci.* – 2012. – **47**, No. 4. – P. 561–568.
16. Слободян Б., Чижик С., Мартиняк Р. Контактна взаємодія тіл за наявності в міжповерхневому зазорі ідеального газу та рідинних містків // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2013. – Вип. 18. – С. 189–197.

17. Kato T., Watanabe S., Matsuoka H. Dynamic characteristics of an in-contact head-slider considering meniscus force: Part 1 – Formulation and application to the disk with sinusoidal undulation // Trans. ASME. J. Tribol. – 1999. – **122**, No. 3. – P. 633–638.
18. Kato T., Watanabe S., Matsuoka H. Dynamic characteristics of an in-contact head-slider considering meniscus force: Part 2 – Application to the disk with random undulation and design conditions // Trans. ASME. J. Tribol. – 2000. – **123**, No. 1.– P. 168–174.
19. Kobatake S., Kawakubo Y., Suzuki S. Laplace pressure measurement on laser textured thin-film disk // Tribol. Int. – 2003. – **36**, No. 4–6. – P. 329–333.
20. Rabinovich Y. I., Esayanur M. S., Moudgil B. M. Capillary forces between two spheres with a fixed volume liquid bridge: theory and experiment // Langmuir. – 2005. – **21**, No. 24. – P. 10992–10997.
21. Shi L., Majumdar A. Thermal transport mechanisms at nanoscale point contacts // Trans. ASME. J. Heat Transfer. – 2001. – **124**, No. 2. – P. 329–337.
22. Zheng J., Streater J. L. A liquid bridge between two elastic half-spaces: A theoretical study of interface instability // Tribol. Lett. – 2004. – **16**, No. 1-2. – P. 1–9.
23. Zitzler L., Herminghaus S., Mugele F. G. Capillary forces in tapping mode atomic force microscopy // Phys. Rev. B. – 2002. – **66**, No. 15. – P. 155436 (8 pages).

КОНТАКТ УПРУГОГО ТЕЛА И ЖЕСТКОЙ ОСНОВЫ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВЫЕМОК, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ, СМАЧИВАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛ

Смоделирован безфрикционный контакт упругого тела и жесткой основы при наличии в ней периодически расположенных выемок квазиэллиптической формы, когда на краях межповерхностных зазоров содержится несжимаемая жидкость, смачивающая поверхности тел, а в средних частях – газ, находящийся под постоянным давлением. Вследствие поверхностного натяжения жидкости возникает перепад давлений в жидкости и газе, который описывается уравнением Лапласа. Сформулированная контактная задача для упругого полупространства сведена к сингулярному интегральному уравнению с ядром Гильберта относительно производной от высоты зазоров и трансцендентного уравнения для определения ширины участка с газом. Проанализированы зависимости ширины участка с газом, перепада давлений, формы зазоров и контактного сближения тел от приложенной нагрузки, объема жидкости и ее поверхностного натяжения.

THE CONTACT BETWEEN AN ELASTIC BODY AND A RIGID BASE WITHA PERIODIC ARRAY OF QUASIELLIPTIC GROOVES PARTIALLY FILLED WITH LIQUID THAT WETS THE SURFACES OF BODIES

The frictionless contact between an elastic body and a rigid base with periodically arranged quasielliptical grooves is modeled. The edges of interface gaps contain incompressible liquid, and, in the middle parts, the gas under constant pressure. Due to the surface tension of the liquid, a pressure drop described by the Laplace equation occurs in the liquid and the gas. The formulated contact problem for the elastic half-space is reduced to a singular integral equation with the Hilbert kernel for a derivative of the gaps height and a transcendental equation for the width of the gas area. The dependences of the width of gas area, the pressure drop, the shape of the gaps and the contact approach of the bodies on the applied load, the volume and the surface tension of the liquid are analyzed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
02.02.17