УДК 539.3

В. І. Острик

АСИМПТОТИЧНІ РОЗПОДІЛИ НАПРУЖЕНЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ В ОКОЛІ КРАЮ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ

У задачах фрикційного контакту та контакту з повним зчепленням пружного тіла зі штампом, фрикційного контакту двох пружних тіл і контакту берегів міжфазної тріщини знайдено асимптотичні розподіли напружень і переміщень в околі крайової точки області контакту. Розподіли пружного поля отримано з використанням одного із комплексних потенціалів Колосова – Мусхелішвілі у вигляді інтеграла типу Коші, густиною якого є комплексна функція контактних зусиль.

У плоских контактних задачах теорії пружності пружне поле в околі краю області контакту має сингулярний або регулярний характер напружень залежно від того, потрапляє кутова точка контуру штампа на край області контакту, чи ні [1]. У першому випадку розподіли напружень і переміщень в околі зазначеної точки не залежать від форми та розмірів пружного тіла. Останні фактори визначають тільки коефіцієнт, єдиний для розподілів усіх складових пружного поля, – так званий коефіцієнт інтенсивності контактних напружень. У другому випадку, коли напруження обмежені, коефіцієнт в асимптотичній поведінці контактних напружень також є єдиним коефіцієнтом у розподілах напружень і переміщень в околі крайової точки області контакту, а самі розподіли зберігають свій вигляд для будь-якої контактної задачі.

У випадку гладкого контакту, коли не враховуються сили тертя, розподіли напружень і переміщень в околі точки зміни крайових умов є такими самими, як і в задачах теорії тріщин нормального відриву, з огляду на математичну аналогію між контактними задачами і задачами механіки руйнування. Такі розподіли добре вивчені у механіці руйнування [6, 9] і були досліджені A. Nádai [4] у випадку гладкого контакту штампа з нестисливим пружним тілом.

Для ковзного контакту пружного тіла зі штампом або двох пружних тіл, коли в області контакту нормальні і дотичні напруження підпорядковані закону тертя Амонтона, зазначені вище розподіли компонент пружного поля раніше не досліджувалися і складають предмет пропонованої статті.

Для контакту з повним зчепленням розподіли напружень і переміщень є такими, як і в задачах механіки руйнування для міжфазних тріщин у рамках осциляційної моделі, за умови, що один із матеріалів є абсолютно жорстким. Такі розподіли визначено раніше [11] (див. також [6]) тільки для напружень. Нижче для випадку контакту з повним зчепленням отримано асимптотичні розподіли як для напружень, так і для переміщень.

Як відомо, в теорії міжфазних тріщин з метою уникнення протиріч щодо перекриття берегів тріщини M. Comninou [2] запропоновано контактну модель, згідно з якою береги тріщини входять у контакт поблизу вершини тріщини. Розподіли напружень на краю області контакту берегів міжфазної тріщини, який міститься у вершині тріщини, визначено в [2, 10]. Нижче ці розподіли доповнено розподілами переміщень.

У кожному із зазначених вище випадків контакту для отримання асимптотичних розподілів пружного поля використовуються розподіли контактних зусиль (або їхня асимптотична поведінка на краю області контакту), які були знайдені раніше при розв'язанні відповідних контактних задач. Асимптотичні формули розв'язку основної крайової задачі, записаного через один із комплексних потенціалів Колосова – Мусхелішвілі, отримуються за припущення, що на межі пружної півплощини задано нормальні та дотичні зусилля. Пропонований у цій роботі підхід є простішим від

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2016. – 59, № 4. – С. 58-71.

інших відомих підходів: використання інтегрального перетворення Мелліна у полярних координатах для однієї пружної півплощини або двох спряжених різнорідних півплощин [8]; відшукання пружного поля у степеневому вигляді з використанням двох комплексних потенціалів Колосова – Мусхелішвілі [3]; знаходження асимптотики точного розв'язку контактної задачі, знайденого у кожній точці пружної півплощини [3, 7].

1. Напруження і переміщення всередині пружної півплощини. У випадку плоскої деформації розглянемо першу крайову задачу для пружної півплощини $-\infty < x < \infty$, $0 \le y < \infty$ з модулем зсуву G і коефіцієнтом Пуассона ν, коли на її межі задано напруження: $\frac{1}{2G}\sigma_y\Big|_{y=0} = -p(x)$, $\frac{1}{2G}\tau_{xy}\Big|_{y=0} = -q(x)$, причому $p(x) = 0$, $q(x) = 0$, коли $|x| > a$. Розв'язок цієї задачі згідно з [3] виражається через потенціал Колосова – Мусхелішвілі

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a} \frac{\overline{r(s)}}{s - z}\, ds, \qquad z = x + iy, \qquad r(s) = p(s) + iq(s), \tag{1}$$

за формулами Колосова

$$\frac{1}{2G}(\sigma_x + \sigma_y) = -4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z),$$

$$\frac{1}{2G}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) = 2\left[\overline{\Phi}(z) + \Phi(z) + (z - \overline{z})\Phi'(z)\right],$$

$$u_x - iu_y = -(z - \overline{z})\Phi(z) - \overline{\varphi}(z) - (3 - 4\nu)\overline{\varphi(z)}, \qquad \varphi'(z) = \Phi(z). \tag{2}$$

Первісну $\varphi(z)$ від функції $\Phi(z)$ визначаємо таким чином, щоб $\varphi(a) = 0$, тобто вважаємо, що переміщення у точці $x = a$, $y = 0$ відсутні.

У полярній системі координат r, ϑ з полюсом у точці $x = a$, $y = 0$ ($x = a + r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$) напруження і переміщення у декартовій системі координат зв'язані з відповідними величинами залежностями [3]

$$\sigma_r + \sigma_\vartheta = \sigma_x + \sigma_y, \qquad \sigma_\vartheta - \sigma_r + 2i\tau_{r\vartheta} = (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})e^{2i\vartheta},$$

$$u_r - iu_\vartheta = (u_x - iu_y)e^{i\vartheta}. \tag{3}$$

2. Сингулярне поле напружень при ковзному та гладкому контакті. Розглянемо ковзний контакт штампа з прямолінійною горизонтальною основою і пружної півплощини. В області контакту $-a < x < a$ $(y = 0)$ зусилля зв'язані рівністю $q(x) = \mu_0 p(x)$, де μ_0 – коефіцієнт тертя. Згідно з розв'язком відповідної контактної задачі функція контактного тиску має вигляд [1]

$$p(x) = \frac{P}{2\pi G}\frac{\cos\pi\gamma}{(a - x)^{1/2-\gamma}(a + x)^{1/2+\gamma}}, \qquad -a < x < a,$$

$$\gamma = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mu_0(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)},$$

де P – сила, яка вдавлює штамп у півплощину. На краях $x = \pm a$ області контакту тиск $p(x)$ є необмеженим. Зокрема, на краю $x = a$ асимптотична поведінка контактного тиску є такою:

$$p(x) \sim \frac{1}{2G}\frac{K}{(a - x)^{1/2-\gamma}}, \qquad x \to a - 0,$$

$$K = 2G\lim_{x\to a-0}(a - x)^{1/2-\gamma}p(x) = \frac{P\cos\pi\gamma}{\pi(2a)^{1/2+\gamma}},$$

де K – коефіцієнт інтенсивності контактного тиску.

Знайшовши інтеграл із (1) методом контурного інтегрування [3], маємо

$$\Phi(z) = \frac{iP}{4\pi G}\frac{1 - i\mu_0}{(z-a)^{1/2-\gamma}(z+a)^{1/2+\gamma}}, \tag{4}$$

звідки

$$\Phi(z) \sim \frac{iK}{4G\cos\pi\gamma}\frac{1 - i\mu_0}{(z-a)^{1/2-\gamma}},$$

$$\varphi(z) \sim \frac{iK}{4G\cos\pi\gamma}\frac{1 - i\mu_0}{1/2+\gamma}(z-a)^{1/2+\gamma}, \qquad z \to a. \tag{5}$$

За формулами (2), (5) визначаємо асимптотичні розподіли напружень і переміщень в околі краю $x = a$ області контакту ($x = a + r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$):

$$\sigma_x \sim -\frac{K'}{r^{1/2-\gamma}}\left\{\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta + \left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\sin\left(\frac{5}{2}-\gamma\right)\vartheta + \right.$$
$$\left. + \mu_0\left[\left(\frac{7}{2}+\gamma\right)\cos\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta + \left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\cos\left(\frac{5}{2}-\gamma\right)\vartheta\right]\right\},$$

$$\sigma_y \sim -\frac{K'}{r^{1/2-\gamma}}\left\{\left(\frac{5}{2}-\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta - \left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\sin\left(\frac{5}{2}-\gamma\right)\vartheta + \right.$$
$$\left. + \mu_0\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\left[\cos\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta - \cos\left(\frac{5}{2}-\gamma\right)\vartheta\right]\right\},$$

$$\tau_{xy} \sim -\frac{K'}{r^{1/2-\gamma}}\left\{\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\left[\cos\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta - \cos\left(\frac{5}{2}-\gamma\right)\vartheta\right] + \right.$$
$$\left. + \mu_0\left[\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta + \left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\sin\left(\frac{5}{2}-\gamma\right)\vartheta\right]\right\},$$

$$u_x \sim K'' r^{1/2+\gamma}\left\{\left(\text{æ} - \frac{1}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta + \left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)\vartheta - \right.$$
$$\left. - \mu_0\left[\left(\text{æ} + \frac{3}{2}+\gamma\right)\cos\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta - \left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\cos\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)\vartheta\right]\right\},$$

$$u_y \sim -K'' r^{1/2+\gamma}\left\{\left(\text{æ} + \frac{1}{2}-\gamma\right)\cos\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta + \left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\cos\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)\vartheta + \right.$$
$$\left. + \mu_0\left[\left(\text{æ} - \frac{3}{2}-\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta - \left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)\vartheta\right]\right\},$$
$$r \to 0,$$

$$K' = \frac{K}{2\cos\pi\gamma}, \qquad K'' = \frac{K'}{(1+2\gamma)G}, \qquad \text{æ} = 3 - 4\nu. \tag{6}$$

За допомогою формул (3) знаходимо асимптотичні розподіли компонент пружного поля у полярній системі координат:

$$\sigma_r \sim -\frac{K'}{r^{1/2-\gamma}}\left\{\left(\frac{5}{2}-\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta + \left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\sin\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\vartheta + \right.$$
$$\left. + \mu_0\left[\left(\frac{5}{2}-\gamma\right)\cos\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta + \left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\cos\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\vartheta\right]\right\},$$

$$\sigma_\vartheta \sim -\frac{K'}{r^{1/2-\gamma}}\left\{\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta - \left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\sin\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\vartheta + \right.$$
$$\left. + \mu_0\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\left[\cos\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta - \cos\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\vartheta\right]\right\},$$

$$\tau_{r\vartheta} \sim \frac{K'}{r^{1/2-\gamma}} \left\{ \left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\left[\cos\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta - \cos\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\vartheta\right] - \right.$$
$$\left. - \mu_0 \left[\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta - \left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\vartheta\right]\right\},$$
$$u_r \sim -K'' r^{1/2+\gamma} \left\{ \left(\text{æ} - \frac{1}{2}-\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta + \left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\sin\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\vartheta + \right.$$
$$\left. + \mu_0 \left[\left(\text{æ} - \frac{1}{2}-\gamma\right)\cos\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta + \left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\cos\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\vartheta\right]\right\},$$
$$u_\vartheta \sim -K'' r^{1/2+\gamma} \left\{ \left(\text{æ} + \frac{1}{2}+\gamma\right)\cos\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta + \left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\cos\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\vartheta - \right.$$
$$\left. - \mu_0 \left[\left(\text{æ} + \frac{1}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta + \left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\vartheta\right]\right\}.$$
$$r \to 0. \qquad (7)$$

У випадку гладкого контакту ($\mu_0 = 0$, $\gamma = 0$) маємо

$$\sigma_x \sim -\frac{K'}{2\sqrt{r}}\left(3\sin\frac{\vartheta}{2} + \sin\frac{5\vartheta}{2}\right), \qquad \sigma_y \sim -\frac{K'}{2\sqrt{r}}\left(5\sin\frac{\vartheta}{2} - \sin\frac{5\vartheta}{2}\right),$$
$$\tau_{xy} \sim -\frac{K'}{2\sqrt{r}}\left(\cos\frac{\vartheta}{2} - \cos\frac{5\vartheta}{2}\right),$$
$$\sigma_r \sim -\frac{K'}{2\sqrt{r}}\left(5\sin\frac{\vartheta}{2} + \sin\frac{3\vartheta}{2}\right), \qquad \sigma_\vartheta \sim -\frac{K'}{2\sqrt{r}}\left(3\sin\frac{\vartheta}{2} - \sin\frac{3\vartheta}{2}\right),$$
$$\tau_{r\vartheta} \sim \frac{K'}{2\sqrt{r}}\left(\cos\frac{\vartheta}{2} - \cos\frac{3\vartheta}{2}\right),$$
$$u_x \sim -u_r \sim \frac{K''}{2}\sqrt{r}\left[(5-8\nu)\sin\frac{\vartheta}{2} + \sin\frac{3\vartheta}{2}\right],$$
$$u_y \sim u_\vartheta \sim -\frac{K''}{2}\sqrt{r}\left[(7-8\nu)\cos\frac{\vartheta}{2} + \cos\frac{3\vartheta}{2}\right], \qquad r \to 0. \qquad (8)$$

Сингулярне поле напружень на краю області контакту має степеневу з особливість з показником $1/2-\gamma$ у випадку ковзного контакту і кореневу особливість – у випадку гладкого контакту. Компоненти вектора переміщень при цьому мають степеневу поведінку з показником $1/2+\gamma$, яка у випадку гладкого контакту переходить у кореневу.

Розподіли (8) напружень і переміщень для гладкого контакту збігаються з відповідними розподілами біля вістря тріщини в однорідному матеріалі при нормальному навантаженні [6, 9], якщо прийняти, що $K = -K_I$, де K_I – коефіцієнт інтенсивності напружень нормального відриву. Це, очевидно, випливає із математичної аналогії між задачами гладкого контакту і задачами теорії тріщин при симетричному навантаженні, оскільки крайові умови в області контакту такі самі, як на продовженні тріщини, а поза областю контакту – такі, як на берегах тріщини.

Розподіли напружень σ_r, σ_ϑ, $\tau_{r\vartheta}$ і переміщень u_r, u_ϑ із (8) у випадку нестисливого матеріалу ($\nu = 0.5$) уперше були отримані A. Nadai [4], який розглянув удавлювання напівобмеженого штампа в пружну півплощину.

У розподілах (6), (7) пружного поля для випадку ковзного контакту перша складова (без коефіцієнта μ_0) збігається з розподілами для тріщини нормального відриву, якщо покласти $\gamma = 0$, $K = -K_I$, а друга складова (з коефіцієнтом μ_0) при $\gamma = 0$, $K = -K_{II}$ збігається з розподілами для тріщини поперечного зсуву (K_{II} – відповідний коефіцієнт інтенсивності напружень). Цей факт не є очевидним, оскільки, на відміну від пружного стану тіла з тріщиною, який є суперпозицією розтягу та зсуву, при фрикційному контакті нормальні та дотичні напруження зв'язані лінійно в області контакту, а їх поведінка на краях цієї області не є кореневою. Разом з тим, виявляється, що асимптотичні розподіли за коловою координатою ϑ при нехтуванні малим значенням γ є суперпозицією розподілів від нормальних і дотичних контактних зусиль. Уздовж радіальної координати r суперпозиція розподілів не має місця, оскільки змінюється показник особливості поля напружень у точці зміни крайових умов.

3. Регулярні розподіли напружень і переміщень. При контакті пружного тіла зі штампом, контур якого є опуклим і гладким, контактні напруження обмежені і на краю області контакту стають нульовими.

Розглянемо ковзний контакт ($q(x) = \mu_0 p(x)$) параболічного штампа і пружної півплощини. Контур штампа задаємо рівністю $y = -x^2/(2R)$ (R – радіус кривини контуру у його вершині). Розв'язком цієї контактної задачі є така функція контактного тиску [1]:

$$p(x) = \frac{P\cos\pi\gamma}{\pi(1-4\gamma^2)a^2G}(a-x)^{1/2+\gamma}(a+x)^{1/2-\gamma}, \qquad -a \le x \le a. \tag{9}$$

Отже,

$$p(x) \sim \frac{1}{2G}K_0(a-x)^{1/2+\gamma}, \qquad x \to a-0,$$

$$K_0 = 2G\lim_{x\to a-0}(a-x)^{-1/2-\gamma}p(x) = \frac{8P\cos\pi\gamma}{\pi(1-4\gamma^2)(2a)^{3/2+\gamma}}. \tag{10}$$

Обчисливши інтеграл із (1) для цього випадку, знаходимо

$$\Phi(z) = \frac{(1-i\mu_0)P}{2\pi i(1-4\gamma^2)a^2G}\left[(z-a)^{1/2+\gamma}(z+a)^{1/2-\gamma} - z + 2\gamma a\right], \tag{11}$$

звідки

$$\Phi(z) \sim \frac{1}{4iG\cos\pi\gamma}\left\{(1-i\mu_0)K_0(z-a)^{1/2+\gamma}\left[1+\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\frac{z-a}{2a}\right]-\right.$$

$$\left.-(K_1-i\mu_0K_2)(2a)^{1/2+\gamma}\left(\frac{1}{2}-\gamma+\frac{z-a}{2a}\right)\right\} + O\left((z-a)^{5/2+\gamma}\right),$$

$$\varphi(z) \sim \frac{1}{4iG\cos\pi\gamma}\left[(1-i\mu_0)K_0\frac{(z-a)^{3/2+\gamma}}{3/2+\gamma} - (K_1-i\mu_0K_2)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)(2a)^{1/2+\gamma}(z-a)\right] + O\left((z-a)^2\right), \quad z \to a. \tag{12}$$

Тут введено коефіцієнти K_1 і K_2, значення яких у задачі про ковзний контакт параболічного штампа і пружної півплощини є такими самими, як і значення коефіцієнта K_0 із (10). У загальному випадку фрикційного контакту пружного тіла зі штампом з гладким опуклим контуром коефіцієнти K_0, K_1, K_2, як буде показано нижче, мають різні значення.

За формулами (2) з урахуванням (12) знаходимо асимптотичну поведінку напружень і переміщень в околі краю $x = a$ області контакту:

$$\sigma_x \sim -4\mu_0K_2'\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)(2a)^{1/2+\gamma} -$$

$$-K_0'r^{1/2+\gamma}\left\{\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta + \left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)\vartheta - \right.$$

$$\left.-\mu_0\left[\left(\frac{9}{2}+\gamma\right)\cos\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta - \left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\cos\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)\vartheta\right]\right\} + O(r),$$

$$\sigma_y \sim -K_0' r^{1/2+\gamma}\left\{\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)\vartheta+\right.$$

$$\left.+\mu_0\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\left[\cos\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta-\cos\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)\vartheta\right]\right\},$$

$$\tau_{xy} \sim -K_0' r^{1/2+\gamma}\left\{\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\left[\cos\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta-\cos\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)\vartheta\right]+\right.$$

$$\left.+\mu_0\left[\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta+\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)\vartheta\right]\right\},$$

$$u_x \sim 4(1-\nu)\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)(2a)^{1/2+\gamma}\, r\left(K_1''\sin\vartheta-\mu_0 K_2''\cos\vartheta\right)-$$

$$-K_0'' r^{3/2+\gamma}\left\{\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta+\left(æ+\frac{1}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\vartheta+\right.$$

$$\left.+\mu_0\left[\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\cos\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta-\left(æ+\frac{5}{2}+\gamma\right)\cos\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\vartheta\right]\right\}+O(r^2),$$

$$u_y \sim 4\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)(2a)^{1/2+\gamma}\, r\left[\mu_0 K_2''\nu\sin\vartheta-K_1''(1-\nu)\cos\vartheta\right]+$$

$$+K_0'' r^{3/2+\gamma}\left\{\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\cos\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta+\left(æ-\frac{1}{2}-\gamma\right)\cos\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\vartheta-\right.$$

$$\left.-\mu_0\left[\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta-\left(æ-\frac{5}{2}-\gamma\right)\sin\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\vartheta\right]\right\}+O(r^2),$$

$$r\to 0,$$

$$x = a + r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta,$$

$$K_j' = \frac{K_j}{2\cos\pi\gamma}, \quad K_j'' = \frac{K_j'}{(3+2\gamma)G}, \quad j = 0,1,2. \tag{13}$$

У полярній системі координат із залученням рівностей (3) отримуємо

$$\sigma_r \sim -4\mu_0 K_2'\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)(2a)^{1/2+\gamma}\cos^2\vartheta-$$

$$-K_0' r^{1/2+\gamma}\left\{\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta+\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)\vartheta-\right.$$

$$\left.-\mu_0\left[\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)\cos\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta+\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)\cos\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)\vartheta\right]\right\}+O(r),$$

$$\sigma_\vartheta \sim -4\mu_0 K_2'\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)(2a)^{1/2+\gamma}\sin^2\vartheta-$$

$$-K_0' r^{1/2+\gamma}\left\{\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)\vartheta-\right.$$

$$\left.-\mu_0\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)\left[\cos\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta-\cos\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)\vartheta\right]\right\}+O(r),$$

$$\tau_{r\vartheta} \sim 2\mu_0 K_2'\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)(2a)^{1/2+\gamma}\sin 2\vartheta+$$

$$+K_0' r^{1/2+\gamma}\left\{\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\left[\cos\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta-\cos\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)\vartheta\right]+\right.$$

$$\left.+\mu_0\left[\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)-\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)\vartheta\right]\right\}+O(r),$$

$$u_r \sim -2\mu_0 K_2''\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)(2a)^{1/2+\gamma} r(1-2\nu+\cos 2\vartheta) -$$

$$- K_0'' r^{3/2+\gamma}\left\{\left(æ-\frac{3}{2}-\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta+\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)\vartheta-\right.$$

$$\left.-\mu_0\left[\left(æ-\frac{3}{2}-\gamma\right)\cos\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta+\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)\cos\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)\vartheta\right]\right\}+O(r^2),$$

$$u_\vartheta \sim -2\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)(2a)^{1/2+\gamma} r\left[2K_1''(1-\nu)-\mu_0 K_2''\sin 2\vartheta\right]+$$

$$+ K_0'' r^{3/2+\gamma}\left\{\left(æ+\frac{3}{2}+\gamma\right)\cos\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\cos\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)\vartheta+\right.$$

$$\left.+\mu_0\left[\left(æ+\frac{3}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta-\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)\vartheta\right]\right\}+O(r^2),$$

$$r \to 0. \qquad (14)$$

У випадку гладкого контакту (при $\mu_0 = 0$, $\gamma = 0$) розподіли (13), (14) переходять у наступні:

$$\sigma_x \sim -\frac{1}{2}K_0'\sqrt{r}\left(5\sin\frac{\vartheta}{2}+\sin\frac{3\vartheta}{2}\right), \qquad \sigma_y \sim -\frac{1}{2}K_0'\sqrt{r}\left(3\sin\frac{\vartheta}{2}-\sin\frac{3\vartheta}{2}\right),$$

$$\tau_{xy} \sim -\frac{1}{2}K_0'\sqrt{r}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}-\cos\frac{3\vartheta}{2}\right),$$

$$u_x \sim 3K_1''(1-\nu)\sqrt{2a}\, r\sin\vartheta-\frac{1}{2}K_0''\sqrt{r^3}\left[3\sin\frac{\vartheta}{2}+(7-8\nu)\sin\frac{3\vartheta}{2}\right]+O(r^2),$$

$$u_y \sim -3K_1''(1-\nu)\sqrt{2a}\, r\cos\vartheta+$$

$$+\frac{1}{2}K_0''\sqrt{r^3}\left[3\cos\frac{\vartheta}{2}+(5-8\nu)\cos\frac{3\vartheta}{2}\right]+O(r^2),$$

$$\sigma_r \sim -\frac{1}{2}K_0'\sqrt{r}\left(3\sin\frac{\vartheta}{2}+\sin\frac{5\vartheta}{2}\right), \qquad \sigma_\vartheta \sim -\frac{1}{2}K_0'\sqrt{r}\left(5\sin\frac{\vartheta}{2}-\sin\frac{5\vartheta}{2}\right),$$

$$\tau_{r\vartheta} \sim \frac{1}{2}K_0'\sqrt{r}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}-\cos\frac{5\vartheta}{2}\right),$$

$$u_r \sim -\frac{1}{2}K_0''\sqrt{r^3}\left[(3-8\nu)\sin\frac{\vartheta}{2}+\sin\frac{5\vartheta}{2}\right],$$

$$u_\vartheta \sim -3K_1''(1-\nu)\sqrt{2a}\, r+\frac{1}{2}K_0''\sqrt{r^3}\left[(9-8\nu)\cos\frac{\vartheta}{2}-\cos\frac{5\vartheta}{2}\right]+O(r^2),$$

$$r \to 0. \qquad (15)$$

У випадку, коли $\nu = 0.5$, розподіли для σ_r, σ_ϑ, $\tau_{r\vartheta}$, u_r, u_ϑ із (15) без урахування складових із коефіцієнтом K_1'' отримано в [4].

В асимптотичних розподілах (13)–(15) напружень і переміщень основні складові з коефіцієнтом K_0 або його похідними K_0', K_0'' мають поведінку $r^{1/2+\gamma}$ для напружень та $r^{3/2+\gamma}$ – для переміщень. Коефіцієнт K_0 є характеристикою задачі з конкретною формою штампа і області, яку займає пружне тіло, і після знаходження контактного тиску визначається залежностями (10). Ці складові можуть бути отримані із відповідних розподілів (6)–(8), узятих з протилежним знаком, формальною заміною γ на $\gamma+1$. Дві інші групи складових у формулах (13)–(15) з коефіцієнтами K_1, K_2 або їхніми похідними K_1'', K_2', K_2'' є незмінними уздовж радіального напрямку величинами для напружень і величинами, пропорційними координаті r, для переміщень. Складові з коефіцієнтом K_1 або K_1'' присутні тільки в переміщеннях і характеризують поворот пружного елемента із околу точки $x = a$, $y = 0$. Коефіцієнт K_1 визначається кутом нахилу основи штампа на краю області контакту до недеформованої межі пружного тіла. Складові з коефіцієнтом K_2 або K_2', K_2'' відповідають однорідному розтягу уздовж межі пружного тіла, викликаному наявністю дотичних зусиль в області контакту за присутності тертя.

4. Контакт двох пружних тіл. Нехай два пружних тіла з пружними сталими G_1, ν_1 і G_2, ν_2 обмежені гладкими контурами, які в області контакту $-a \le x \le a$ можуть бути апроксимовані параболами з радіусами кривизни R_1 і R_2 при вершині. Тіла стискаються нормальними силами P. Для забезпечення ковзного контакту до них також прикладені дотичні сили $Q = \mu_0 P$. Замінюючи для розрахунку напружень перше і друге тіло пружними півплощинами $y \ge 0$ і $y \le 0$, знаходимо [1] функцію контактного тиску у вигляді (9), де $G = G_1$, а параметр γ визначається рівністю

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\mu_0 \frac{(1-2\nu_1)G_2 - (1-2\nu_2)G_1}{2(1-\nu_1)G_2 + 2(1-\nu_2)G_1} \right).$$

Для півплощини $y \ge 0$ маємо розподіли (13)–(15), де $G = G_1$, $\nu = \nu_1$, $æ = æ_1 = 3 - 4\nu_1$.

Для півплощини $y \le 0$, перейшовши до нових змінних $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = x' + iy' = -z$ і замінивши γ на $-\gamma$, згідно з формулами (2), (11) маємо

$$\frac{1}{2G_1}(\sigma_x + \sigma_y) = -4 \operatorname{Re} \Phi(z'),$$

$$\frac{1}{2G_1}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) = 2\left[\bar{\Phi}(z') + \Phi(z') + (z' - \bar{z}')\Phi'(z')\right],$$

$$u_x - iu_y = \frac{G_1}{G_2}\left[(z' - \bar{z}')\Phi(z') + \bar{\varphi}(z') + (3 - 4\nu_2)\overline{\varphi(z')}\right],$$

$$\varphi'(z') = \Phi(z'), \qquad (16)$$

а також

$$\Phi(z') = \frac{(1 - i\mu_0)P}{2\pi i(1 - 4\gamma^2)a^2 G_1}\left[(z' - a)^{1/2+\gamma}(z' + a)^{1/2-\gamma} - z' - 2\gamma a\right]. \qquad (17)$$

Звідси з урахуванням (11) знаходимо

$$\Phi(z') = -\Phi(z), \qquad \varphi(z') = \varphi(z). \qquad (18)$$

Зі співвідношень (16) і (18) випливає, що у півплощині $y \le 0$ вирази (13)–(15) для напружень і переміщень необхідно взяти з протилежним знаком і при цьому покласти $G = G_2$, $\nu = \nu_2$, $æ = æ_2 = 3 - 4\nu_2$, а також вважати, що $-\pi \le \vartheta \le 0$ ($z - a = re^{i\vartheta}$, $z' + a = re^{i\vartheta'}$, $\vartheta' = \vartheta + \pi$).

5. Контакт із повним зчепленням. У задачі про штамп, який своєю прямолінійною горизонтальною основою зчеплений з межею пружної півплощини $y \ge 0$ на відрізку $-a \le x \le a$, комплексна функція контактних зусиль $r(x) = p(x) + iq(x)$ має вигляд [1]

$$r(x) = \frac{2(1-\nu)}{\pi\sqrt{3-4\nu}} \frac{P + iQ}{2G} \frac{1}{(a - x)^{1/2+i\theta}(a + x)^{1/2-i\theta}}, \qquad -a < x < a,$$

$$\theta = \frac{1}{2\pi}\ln(3 - 4\nu),$$

де P і Q − нормальна і дотична сили, які діють на штамп. Поблизу країв $x = \pm a$ області контакту контактні зусилля мають осциляційний характер з необмежено зростаючою амплітудою. Зокрема, на краю $x = a$ асимптотична поведінка функції контактних зусиль є такою:

$$r(x) \sim \frac{1}{2G} \frac{K}{(a-x)^{1/2+i\theta}}, \qquad x \to a-0,$$

$$K = K_1 + iK_2 = 2G \lim_{x \to a-0} (a-x)^{1/2+i\theta} r(x) = \frac{2(1-\nu)}{\pi\sqrt{3-4\nu}} \frac{P+iQ}{(2a)^{1/2-i\theta}},$$

де K − комплексний коефіцієнт інтенсивності контактних зусиль.

Аналогічно до (4) знаходимо

$$\Phi(z) = -\frac{P-iQ}{4\pi i G} \frac{1}{(z-a)^{1/2-i\theta}(z+a)^{1/2+i\theta}}.$$

Отже,

$$\Phi(z) \sim \frac{\sqrt{3-4\nu}}{8G(1-\nu)} \frac{i\bar{K}}{(z-a)^{1/2-i\theta}}, \quad \varphi(z) \sim \frac{\sqrt{3-4\nu}}{8G(1-\nu)} \frac{i\bar{K}}{1/2+i\theta}(z-a)^{1/2+i\theta}, \quad z \to a, \tag{19}$$

На підставі (19) за формулами (2) знаходимо

$$\sigma_x \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ 2e^{\theta\vartheta} \left[K_1' \sin\left(\frac{\vartheta}{2} + \theta \ln\frac{r}{2a}\right) - K_2' \cos\left(\frac{\vartheta}{2} + \theta \ln\frac{r}{2a}\right) \right] - \right.$$
$$- e^{-\theta\vartheta} \left[(5K_1' + 2\theta K_2') \sin\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta \ln\frac{r}{2a}\right) + \right.$$
$$+ (K_1' - 2\theta K_2') \sin\left(\frac{5\vartheta}{2} - \theta \ln\frac{r}{2a}\right) -$$
$$- (5K_2' - 2\theta K_1') \cos\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta \ln\frac{r}{2a}\right) +$$
$$\left.\left. + (K_2' + 2\theta K_1') \cos\left(\frac{5\vartheta}{2} - \theta \ln\frac{r}{2a}\right) \right] \right\},$$

$$\sigma_y \sim -\frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ 2e^{\theta\vartheta} \left[K_1' \sin\left(\frac{\vartheta}{2} + \theta \ln\frac{r}{2a}\right) - K_2' \cos\left(\frac{\vartheta}{2} + \theta \ln\frac{r}{2a}\right) \right] + \right.$$
$$+ e^{-\theta\vartheta} \left[(3K_1' - 2\theta K_2') \sin\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta \ln\frac{r}{2a}\right) - \right.$$
$$- (K_1' - 2\theta K_2') \sin\left(\frac{5\vartheta}{2} - \theta \ln\frac{r}{2a}\right) +$$
$$+ (3K_2' + 2\theta K_1') \cos\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta \ln\frac{r}{2a}\right) -$$
$$\left.\left. - (K_2' + 2\theta K_1') \cos\left(\frac{5\vartheta}{2} - \theta \ln\frac{r}{2a}\right) \right] \right\},$$

$$\tau_{xy} \sim -\frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ 2e^{\theta\vartheta} \left[K_1' \cos\left(\frac{\vartheta}{2} + \theta \ln\frac{r}{2a}\right) + K_2' \sin\left(\frac{\vartheta}{2} + \theta \ln\frac{r}{2a}\right) \right] - \right.$$
$$- e^{-\theta\vartheta} \left[(K_1' + 2\theta K_2') \cos\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta \ln\frac{r}{2a}\right) + \right.$$
$$+ (K_1' - 2\theta K_2') \cos\left(\frac{5\vartheta}{2} - \theta \ln\frac{r}{2a}\right) -$$
$$- (K_2' - 2\theta K_1') \sin\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta \ln\frac{r}{2a}\right) -$$
$$\left.\left. - (K_2' + 2\theta K_1') \sin\left(\frac{5\vartheta}{2} - \theta \ln\frac{r}{2a}\right) \right] \right\},$$

$$u_x \sim -\sqrt{r}\left\{e^{\theta\vartheta}\left[(K_2'' + 2\theta K_1'')\cos\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + (K_1'' - 2\theta K_2'')\sin\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right)\right] +$$

$$+ e^{-\theta\vartheta}\left[\left(2æ\theta K_1'' + \left(æ + \frac{1}{2} + 2\theta^2\right)K_2''\right)\cos\left(\frac{\vartheta}{2} + \theta\ln\frac{r}{2a}\right) + \right.$$

$$+ \left(2æ\theta K_2'' - \left(æ + \frac{1}{2} + 2\theta^2\right)K_1''\right)\sin\left(\frac{\vartheta}{2} + \theta\ln\frac{r}{2a}\right) -$$

$$- \left(\frac{1}{2} + 2\theta^2\right)\left(K_1''\sin\left(\frac{3\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right) + \right.$$

$$\left.\left.\left. + K_2''\cos\left(\frac{3\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right)\right)\right]\right\},$$

$$u_y \sim \sqrt{r}\left\{e^{\theta\vartheta}\left[(K_2'' + 2\theta K_1'')\sin\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right) - \right.\right.$$

$$\left. - (K_1'' - 2\theta K_2'')\cos\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right)\right] -$$

$$- e^{-\theta\vartheta}\left[\left(2æ\theta K_1'' + \left(æ - \frac{1}{2} - 2\theta^2\right)K_2''\right)\sin\left(\frac{\vartheta}{2} + \theta\ln\frac{r}{2a}\right) - \right.$$

$$- \left(2æ\theta K_2'' - \left(æ - \frac{1}{2} - 2\theta^2\right)K_1''\right)\cos\left(\frac{\vartheta}{2} + \theta\ln\frac{r}{2a}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} + 2\theta^2\right)\left(K_1''\cos\left(\frac{3\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right) - \right.$$

$$\left.\left.\left. - K_2''\sin\left(\frac{3\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right)\right)\right]\right\}, \qquad r \to 0,$$

$$K' = K_1' + iK_2' = \frac{\sqrt{æ}}{2(æ + 1)}\frac{K}{(2a)^{i\theta}}, \quad K'' = K_1'' + iK_2'' = \frac{2K'}{(1 + 4\theta^2)G},$$

$$æ = 3 - 4\nu . \tag{20}$$

Із використанням рівностей (3) отримуємо

$$\sigma_r \sim -\frac{1}{\sqrt{r}}\left\{2e^{\theta\vartheta}\left[K_1'\sin\left(\frac{3\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right) + K_2'\cos\left(\frac{3\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right)\right] + \right.$$

$$+ e^{-\theta\vartheta}\left[(5K_1' - 2\theta K_2')\sin\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right) - \right.$$

$$- (K_1' + 2\theta K_2')\sin\left(\frac{3\vartheta}{2} + \theta\ln\frac{r}{2a}\right) +$$

$$+ (5K_2' + 2\theta K_1')\cos\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right) +$$

$$\left.\left. + (K_2' - 2\theta K_1')\cos\left(\frac{3\vartheta}{2} + \theta\ln\frac{r}{2a}\right)\right]\right\},$$

$$\sigma_\vartheta \sim \frac{1}{\sqrt{r}}\left\{2e^{\theta\vartheta}\left[K_1'\sin\left(\frac{3\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right) + K_2'\cos\left(\frac{3\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right)\right] - \right.$$

$$- e^{-\theta\vartheta}\left[(3K_1' + 2\theta K_2')\sin\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right) + \right.$$

$$+ (K_1' + 2\theta K_2')\sin\left(\frac{3\vartheta}{2} + \theta\ln\frac{r}{2a}\right) +$$

$$
\begin{aligned}
&+(3K_2' - 2\theta K_1')\cos\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right) - \\
&- (K_2' - 2\theta K_1')\cos\left(\frac{3\vartheta}{2} + \theta\ln\frac{r}{2a}\right)\Bigg]\Bigg\}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{r\vartheta} \sim -\frac{1}{\sqrt{r}}\Bigg\{ 2e^{\theta\vartheta}\Bigg[& K_1'\cos\left(\frac{3\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right) - K_2'\sin\left(\frac{3\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right) - \\
& - e^{-\theta\vartheta}\Bigg[(K_1' + 2\theta K_2')\cos\left(\frac{3\vartheta}{2} + \theta\ln\frac{r}{2a}\right) + \\
& + (K_1' - 2\theta K_2')\cos\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right) + \\
& + (K_2' - 2\theta K_1')\sin\left(\frac{3\vartheta}{2} + \theta\ln\frac{r}{2a}\right) - \\
& - (K_2' + 2\theta K_1')\sin\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right)\Bigg]\Bigg\}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_r \sim -\sqrt{r}\,\Bigg\{ e^{\theta\vartheta}\Bigg[& (K_2'' + 2\theta K_1'')\cos\left(\frac{3\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right) + \\
& + (K_1'' - 2\theta K_2'')\sin\left(\frac{3\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right)\Bigg] + \\
& + e^{-\theta\vartheta}\Bigg[\left(2æ\theta K_1'' + \left(æ - \frac{1}{2} - 2\theta^2\right)K_2''\right)\cos\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right) - \\
& - \left(2æ\theta K_2'' - \left(æ - \frac{1}{2} - 2\theta^2\right)K_1''\right)\sin\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right) - \\
& - \left(\frac{1}{2} + 2\theta^2\right)\left(K_1''\sin\left(\frac{3\vartheta}{2} + \theta\ln\frac{r}{2a}\right) - \right. \\
& \left. - K_2''\cos\left(\frac{3\vartheta}{2} + \theta\ln\frac{r}{2a}\right)\right)\Bigg]\Bigg\}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_\vartheta \sim \sqrt{r}\,\Bigg\{ e^{\theta\vartheta}\Bigg[& (K_2'' + 2\theta K_1'')\sin\left(\frac{3\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right) - \\
& - (K_1'' - 2\theta K_2'')\cos\left(\frac{3\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right)\Bigg] + \\
& + e^{-\theta\vartheta}\Bigg[\left(2æ\theta K_1'' + \left(æ + \frac{1}{2} + 2\theta^2\right)K_2''\right)\sin\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right) + \\
& + \left(2æ\theta K_2'' - \left(æ + \frac{1}{2} + 2\theta^2\right)K_1''\right)\cos\left(\frac{\vartheta}{2} - \theta\ln\frac{r}{2a}\right) + \\
& + \left(\frac{1}{2} + 2\theta^2\right)\left(K_1''\cos\left(\frac{3\vartheta}{2} + \theta\ln\frac{r}{2a}\right) + \right. \\
& \left. + K_2''\sin\left(\frac{3\vartheta}{2} + \theta\ln\frac{r}{2a}\right)\right)\Bigg]\Bigg\}\,, \qquad r \to 0\,. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Формули для напружень із (21) збігаються з формулами, отриманими G. C. Sih і E. P. Chen [11] (див. також [6]) для міжфазної тріщини в рамках осциляційної моделі у випадку, коли один із матеріалів є абсолютно жорстким.

6. Контакт берегів міжфазної тріщини. На спільній межі $y = 0$ двох пружних півплощин $y \ge 0$ і $y \le 0$ з пружними сталими G_1, ν_1 і G_2, ν_2 знаходиться міжфазна тріщина, одна з вершин якої міститься у точці $x = a$, $y = 0$. На продовженні тріщини ($x \ge a$, $y = 0$) межі півплощин жорстко з'єднані. Береги тріщини згідно з моделлю Comninou [2] контактують поблизу її вершини ($a-\varepsilon \le x < a$, $y=0$), де контактні зусилля підпорядковані закону тертя Амонтона: $q(x)=\mu_0 p(x)$ (μ_0 – коефіцієнт тертя, $p(x) = -\dfrac{1}{2G_1}\sigma_y\Big|_{y=0}$, $q(x) = -\dfrac{1}{2G_1}\tau_{xy}\Big|_{y=0}$).

Поведінка в околі вершини тріщини нормальних і дотичних зусиль на межі півплощин є такою [5]:

$$p(x) = O(1), \qquad q(x) \sim \frac{1}{2G_1}\frac{K}{(x-a)^{1/2-\gamma}}, \qquad x \to a+0,$$

$$p(x) = \frac{1}{\mu_0}q(x) \sim \frac{K\sin\pi\gamma}{2G_1\mu_0}\frac{1}{(a-x)^{1/2-\gamma}}, \qquad x \to a-0,$$

$$\gamma = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(\mu_0 \operatorname{th}\pi\theta), \qquad \theta = \frac{1}{\pi}\ln\frac{G_1+G_2æ_1}{G_1æ_2+G_2},$$

$$æ_1 = 3-4\nu_1, \qquad æ_2 = 3-4\nu_2,$$

де K – коефіцієнт інтенсивності зсувних напружень.

У півплощині $y \ge 0$, розглядаючи суперпозицію навантажень на інтервалах $-a<x<a$, $a<x<3a$ межі півплощини, аналогічно (5) матимемо

$$\Phi(z) \sim \frac{K}{4G_1\cos\pi\gamma}\left[(\mu_0+i)\frac{\sin\pi\gamma}{\mu_0} - \left(\frac{z-3a}{2a}\right)^{1/2-\gamma}\right]\frac{1}{(z-a)^{1/2-\gamma}}, \qquad z \to a. \tag{22}$$

Після перетворень отримаємо

$$\Phi(z) \sim -\frac{iKe^{-\pi\theta}}{4G_1\operatorname{ch}\pi\theta}\frac{1}{(z-a)^{1/2-\gamma}}, \qquad \bar\Phi(z) \sim -\frac{iKe^{\pi\theta}}{4G_1\operatorname{ch}\pi\theta}\frac{1}{(z-a)^{1/2-\gamma}},$$

$$\varphi(z) \sim -\frac{iKe^{-\pi\theta}}{4G_1(1/2+\gamma)\operatorname{ch}\pi\theta}(z-a)^{1/2+\gamma},$$

$$\bar\varphi(z) \sim -\frac{iKe^{\pi\theta}}{4G_1(1/2+\gamma)\operatorname{ch}\pi\theta}(z-a)^{1/2+\gamma}, \qquad z \to a. \tag{23}$$

За формулами (2), (23) визначаємо асимптотичні розподіли напружень і переміщень в околі краю $x=a$ області контакту ($x = a + r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, $0<\vartheta<\pi$):

$$\sigma_x \sim \frac{K'}{r^{1/2-\gamma}}\left\{\left[e^{\pi\theta} + \left(\frac{5}{2}+\gamma\right)e^{-\pi\theta}\right]\sin\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2}-\gamma\right)e^{-\pi\theta}\sin\left(\frac{5}{2}-\gamma\right)\vartheta\right\},$$

$$\sigma_y \sim -\frac{K'}{r^{1/2-\gamma}}\left\{\left[e^{\pi\theta} - \left(\frac{3}{2}-\gamma\right)e^{-\pi\theta}\right]\sin\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2}-\gamma\right)e^{-\pi\theta}\sin\left(\frac{5}{2}-\gamma\right)\vartheta\right\},$$

$$\tau_{xy} \sim -\frac{K'}{r^{1/2-\gamma}}\left\{\left[e^{\pi\theta} + \left(\frac{1}{2}+\gamma\right)e^{-\pi\theta}\right]\cos\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2}-\gamma\right)e^{-\pi\theta}\cos\left(\frac{5}{2}-\gamma\right)\vartheta\right\},$$

$$u_x \sim -K''r^{1/2+\gamma}\left\{\left[e^{\pi\theta} + \left(æ_1+\frac{1}{2}+\gamma\right)e^{-\pi\theta}\right]\sin\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta + \right.$$

$$+\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)e^{-\pi\theta}\sin\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)\vartheta\biggr\},$$

$$u_y \sim -K''r^{1/2+\gamma}\left\{\left[e^{\pi\theta}-\left(æ_1-\frac{1}{2}-\gamma\right)e^{-\pi\theta}\right]\cos\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)e^{-\pi\theta}\cos\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)\vartheta\right\},\qquad r\to 0\,,$$

$$K'=\frac{K}{2\,\mathrm{ch}\,\pi\theta},\qquad K''=\frac{K'}{(1+2\gamma)G_1}\,. \tag{24}$$

За допомогою формул (3) знаходимо асимптотичні розподіли компонент пружного поля у полярній системі координат:

$$\sigma_r \sim \frac{K'}{r^{1/2-\gamma}}\left\{\left(\frac{5}{2}-\gamma\right)e^{-\pi\theta}\sin\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta-\right.$$

$$\left.-\left[e^{\pi\theta}+\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)e^{-\pi\theta}\right]\sin\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\vartheta\right\},$$

$$\sigma_\vartheta \sim \frac{K'}{r^{1/2-\gamma}}\left\{\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)e^{-\pi\theta}\sin\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta+\right.$$

$$\left.+\left[e^{\pi\theta}+\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)e^{-\pi\theta}\right]\sin\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\vartheta\right\},$$

$$\tau_{r\vartheta} \sim -\frac{K'}{r^{1/2-\gamma}}\left\{\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)e^{-\pi\theta}\cos\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta+\right.$$

$$\left.+\left[e^{\pi\theta}+\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)e^{-\pi\theta}\right]\cos\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\vartheta\right\},$$

$$u_r \sim K''r^{1/2+\gamma}\left\{\left(æ_1-\frac{1}{2}-\gamma\right)e^{-\pi\theta}\sin\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta-\right.$$

$$\left.-\left[e^{\pi\theta}+\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)e^{-\pi\theta}\right]\sin\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\vartheta\right\},$$

$$u_\vartheta \sim K''r^{1/2+\gamma}\left\{\left(æ_1+\frac{1}{2}+\gamma\right)e^{-\pi\theta}\cos\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta-\right.$$

$$\left.-\left[e^{\pi\theta}+\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)e^{-\pi\theta}\right]\cos\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)\vartheta\right\},\qquad r\to 0\,. \tag{25}$$

У півплощині $y\le 0$ напруження і переміщення виражаються формулами (16). При цьому

$$\Phi(z')\sim -\frac{iKe^{\pi\theta}}{4G_1\,\mathrm{ch}\,\pi\theta}\frac{1}{(z-a)^{1/2-\gamma}},\qquad \bar{\Phi}(z')\sim -\frac{iKe^{-\pi\theta}}{4G_1\,\mathrm{ch}\,\pi\theta}\frac{1}{(z-a)^{1/2-\gamma}},$$

$$\varphi(z')\sim -\frac{iKe^{\pi\theta}}{4G_1(1/2+\gamma)\,\mathrm{ch}\,\pi\theta}(z-a)^{1/2+\gamma},$$

$$\bar{\varphi}(z')\sim -\frac{iKe^{-\pi\theta}}{4G_1(1/2+\gamma)\,\mathrm{ch}\,\pi\theta}(z-a)^{1/2+\gamma},\qquad z\to a\,. \tag{26}$$

Відмітимо, що вирази із (23) переходять у відповідні формули з (26) при заміні θ на $-\theta$. Отже, на підставі рівностей (2), (16) у півплощині $y\le 0$ отримуємо розподіли напружень і переміщень у вигляді виразів (24), (25), де $-\pi\le\vartheta\le 0$, а G_1, $æ_1$, θ необхідно замінити відповідно на G_2, $æ_2$, $-\theta$.

Формули для напружень із (25) при $y\ge 0$ і відповідні формули при $y\le 0$ отримані M. Comninou [2, 10].

1. *Джонсон К*. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
   Те саме: *Johnson K. L*. Contact mechanics. – Cambridge ect.: Cambridge Univ. Press, 1987. – 452 p.
2. *Дундурс Я., Комниноу М*. Обзор и перспективы исследования межфазной трещины // Разрушение композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1979. – С. 78–87.
3. *Мусхелишвили Н. И*. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
   Те саме: *Muskhelishvili N. I*. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. – Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1977. – xxxi+732 p.
4. *Надаи А*. Пластичность и разрушение твердых тел: В 2 т. – Москва: Мир, 1969. – Т. 2. – 863 с.
   Те саме: *Nádai A*. Theory of flow and fracture of solids. – Vol. 2. – New York: McGraw-Hill Book Co., 1963. – xviii+706 p.
   https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=uc1.b4140942;view=1up;seq=10.
5. *Острик В. И., Улитко А. Ф*. Метод Винера – Хопфа в контактных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 2006. – 328 с.
6. *Саврук М. П*. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с. – (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие в 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка – Т. 2.)
7. *Снеддон И*. Преобразования Фурье. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
   Те саме: *Sneddon I*. Fourier transforms. – New York: McGraw-Hill, 1951. – 542 p.
8. *Уфлянд Я. С*. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.
9. *Черепанов Г. П*. Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
10. *Comninou M*. Interface crack with friction in the contact zone // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – **44**, No. 4. – P. 780–781.
11. *Sih G. C., Chen E. P*. Cracks in composite materials: A compilation of stress solutions for composite systems with cracks. – London etc.: Martinus Nijhoff publishers, 1981. – Lxxxii+538 p. – Ser. Mechanics of fracture. Vol. 6.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ КРАЯ ОБЛАСТИ КОНТАКТА

В задачах фрикционного контакта и контакта с полным сцеплением упругого тела со штампом, фрикционного контакта двух упругих тел и контакта берегов межфазной трещины найдены асимптотические распределения напряжений и перемещений в окрестности граничной точки области контакта. Распределения упругого поля получены с использованием одного из комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили в виде интеграла типа Коши, плотность которого есть комплексная функция контактных усилий.

ASYMPTOTIC DISTRIBUTIONS OF STRESSES AND DISPLACEMENTS IN THE VICINITY OF THE EDGE OF CONTACT DOMAIN

The asymptotic distributions of stresses and displacements are found in the vicinity of boundary point of the contact domain for problems of frictional contact and adhesive contact of an elastic body with a stamp as well as for problems of frictional contact of two elastic bodies and contact of edges of the interface crack. The elastic field distributions are obtained by using one of the Kolosov – Muskhelishvili complex potentials in form of the Cauchy type integral which has a density as a complex function of the contact stresses.

Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ

Одержано
29.01.16