УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен, Н. І. Турчина

МАТРИЦЯ ҐРІНА МОДЕЛЬНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З ВЕКТОРНОЮ ПАРАБОЛІЧНОЮ ВАГОЮ

Розглянуто загальну модельну крайову задачу для $\overrightarrow{2b}$-параболічної за Ейдельманом системи диференціальних рівнянь із частинними похідними. Для такої задачі побудовано матрицю Ґріна, отримано точні оцінки всіх її компонент разом з їх похідними та встановлено для компонент дивергентне зображення.

Вступ. У 60-х роках минулого століття була створена загальна теорія крайових задач для рівнянь і систем рівнянь, параболічних у розумінні І. Г. Петровського та більш загальних у сенсі В. О. Солонникова [1–4, 6, 7, 10]. Для довільних параболіних рівнянь і систем рівнянь ця теорія дала відповідь на запитання: скільки і які крайові умови треба задавати, щоб відповідна задача була добре поставлена? Умова, яка виникла при цьому, є аналогом умови доповняльності Я. Б. Лопатинського для випадку еліптичних систем. Ця умова разом з умовою параболічності системи рівнянь визначає параболічну крайову задачу. Зауважимо, що умови параболічності задачі задаються лише групами старших у параболічному сенсі членів системи рівнянь і крайових умов.

Для параболічних крайових задач у рамках їх загальної теорії доведено теореми про коректну розв'язність у різних функціональних просторах, установлено апріорні оцінки розв'язків і доведено їх еквівалентність умовам параболічності задачі, а для випадку параболічних за Петровським систем рівнянь побудовано та досліджено матрицю Ґріна.

Важливим етапом у створенні теорії параболічних крайових задач є детальне вивчення відповідних модельних задач, тобто задач у півпросторах за просторовими змінними, в яких системи рівнянь і крайові умови містять тільки старші в параболічному сенсі члени, а їх коефіцієнти сталі.

Якщо розглядати $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи рівнянь, означені С. Д. Ейдельманом у [9], то порядки таких систем є векторними і в групу старших членів входять похідні різних порядків за різними просторовими змінними, оскільки просторові змінні не є рівноправними. Через це, мабуть, не можна створити теорію крайових задач для таких систем, аналогічну вказаній вище теорії для систем І. Г. Петровського та В. О. Солонникова, в яких усі просторові змінні рівноправні. Але для систем С. Д. Ейдельмана можна створити теорію крайових задач у півпросторах, у яких одна з просторових змінних змінюється в інтервалі $(0, \infty)$, а всі інші – в інтервалі $(-\infty, \infty)$.

У праці [8] для систем С. Д. Ейдельмана розглянуто модельні крайові задачі в півпросторі, в якому в інтервалі $(0,\infty)$ змінюється остання просторова змінна. Для таких задач сформульовано умову доповняльності та наведено результати, що стосуються їх ядер Пуассона.

Ця стаття є продовженням статті [8]. Для задач з [8] побудовано матриці Ґріна та досліджено їх властивості.

1. Позначення і постановка крайової задачі. Нехай n, N, $b_1,\ldots, b_n$ – задані натуральні числа; $\overrightarrow{2b} := (2b_1,\ldots,2b_n)$; s – найменше спільне кратне чисел $b_1,\ldots,b_n$; $m_j := s/b_j$; $j \in \{1,\ldots,n\}$, $\|k\| := \sum_{j=1}^{n} m_j k_j$ і $\|k'\| := \sum_{j=1}^{n-1} m_j k_j$, якщо $k := (k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ і $k' := (k_1,\ldots,k_{n-1}) \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ – відповідно n- і $(n-1)$-вимірний мультиіндекси; $\|x\|_{\overrightarrow{2b}} := \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{2b_j/b_n}\right)^{1/2}$ і $\|x'\|_{\overrightarrow{2b}} := \left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j^{2b_j/b_n}\right)^{1/2}$, якщо $x := (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ і $x' := (x_1,\ldots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$; $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$, $\Pi^+ :=$ $:= \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t > 0,\ x \in \mathbb{R}_+^n\}$, $\Pi' := \{(t,x') \in \mathbb{R}^n \mid t > 0, x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, $\Pi :=$ $:= \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n\}$, $\partial_t := \dfrac{\partial}{\partial t}$, $\partial_{x_j} := \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, $\partial_x^k :=$ $:= \partial_{x_1}^{k_1} \ldots \partial_{x_n}^{k_n}$, якщо $k \in \mathbb{Z}_+^n$ і $x \in \mathbb{R}^n$; i – уявна одиниця, $\mathbb{C}$ – множина всіх комплексних чисел.

В області Π^+ розглядатимемо таку крайову задачу:

$$A^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n}) u(t,x) := \left(I_N \partial_t - \sum_{\|k\|=2s} a_k \partial_x^k\right) u(t,x) = f(t,x),$$

$$(t,x) \in \Pi^+, \tag{1}$$

$$u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}_+^n, \tag{2}$$

$$B_j^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n}) u(t,x)\big|_{x_n=0} := \sum_{2sk_0 + \|k\| = r_j} b_{jk_0k} \partial_t^{k_0} \partial_x^k u(t,x)\big|_{x_n=0} = g_j(t,x'),$$

$$(t,x') \in \Pi', \quad j \in \{1,\ldots,m\}, \tag{3}$$

де u, f і φ – матриці-стовпчики висоти N; a_k і b_{jk_0k} – сталі матриці відповідно розміру $N \times N$ і $1 \times N$; I_N – одинична матриця порядку N; $g_1,\ldots,g_m$ – скалярні функції; $r_1,\ldots,r_m$ – невід'ємні цілі числа.

Будемо припускати, що система рівнянь (1) є $\overrightarrow{2b}$-параболічною за Ейдельманом, тобто існує така стала $\delta > 0$, що p-корені рівняння

$$\det A^0(p, i\sigma', i\tau) = 0 \tag{4}$$

для будь-яких $\sigma' \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $\tau \in \mathbb{R}^1$ задовольняють умову

$$\operatorname{Re} p_j(\sigma',\tau) \le -\delta\left(\|\sigma'\|_{\overrightarrow{2b}}^{2b_n} + \tau^{2b_n}\right), \qquad j \in \{1,\ldots,N\}. \tag{5}$$

Зауваження 1. *Якщо виконується умова* (5), *то* $\det a_k \ne 0$ *для* $k =$ $= (0,\ldots,0,2b_n)$. *Звідси випливає, що похідну* $\partial_{x_n}^{2b_n} u$ *від розв'язку* u *системи* $A^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n}) u = 0$ *можна зобразити у вигляді лінійної комбінації похідних* $\partial_t u$ *і* $\partial_x^k u$ *з* $\|k\| = 2s$ *і* $k_n < 2b_n$.

Вважатимемо, що згідно з [8] кількість крайових умов (3) $m = b_n N$ і виконується така *умова доповняльності*: для будь-яких $(p,\sigma') \in E$ рядки матриці $B^0(p,i\sigma',i\tau)\hat{A}^0(p,i\sigma',i\tau)$, як многочлени від τ, лінійно незалежні за модулем многочлена $\prod_{j=1}^{m}(\tau - \tau_j^+(p,\sigma'))$. Множина E означена таким чином:

$$E := \left\{(p,\sigma') \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n-1} \,\middle|\, \operatorname{Re} p \ge -\delta_1 \|\sigma'\|_{\overrightarrow{2b}}^{2b_n},\ \sigma' \in \mathbb{R}^{n-1},\ |p| + \|\sigma'\|_{\overrightarrow{2b}}^{2b_n} > 0\right\}, \tag{6}$$

δ_1 – фіксована стала з проміжку $(0,\delta)$, де δ – стала з умови (5); B^0 –

матриця, рядками якої є B_j^0, $j \in \{1,\dots,m\}$; $\hat{A}^0$ − взаємна матриця для A^0, тобто $\hat{A}^0 := (A^0)^{-1} \det A^0$; τ_j^+, $j \in \{1,\dots,m\}$, − τ-корені рівняння (4), які мають додатну уявну частину.

Крім наведених вище, використовуватимемо ще такі позначення:

$$M := \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{2s}, \qquad M' := \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j}{2s}, \qquad q_j := \frac{2b_j}{2b_j - 1}, \quad j \in \{1,\dots,m\},$$

$$E'_c(t,x') := \exp\left\{-c\sum_{j=1}^{n-1} t^{1-q_j} |x_j|^{q_j}\right\}, \qquad E_c^{(n)}(t,x_n) := \exp\{-ct^{1-q_n} |x_n|^{q_n}\},$$

$$E_c(t,x) := E'_c(t,x') E_c^{(n)}(t,x_n), \quad t > 0, \quad x := (x', x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$x' := (x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad x_n \in \mathbb{R}^1, \ c > 0;$$

$\mathbb{C}_{rs}$ − множина всіх матриць A розміру $r \times s$, елементи яких $a_{j\ell} \in \mathbb{C}$, $|A| := \left(\sum_{j=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{s} |a_{j\ell}|^2\right)^{1/2}$, якщо $A \in \mathbb{C}_{rs}$.

У статті різні сталі, величини яких нас не цікавлять, позначаємо однаковими літерами.

2. Деякі допоміжні твердження. Наведемо потрібні далі відомості, що стосуються оцінювальних функцій E_c, E'_c і $E_c^{(n)}$, фундаментальних і деяких інших розв'язків системи (1).

Лема 1. *Справджуються нерівності*

$$E'_{c_1}(t, x' - \xi') E_{c_1}^{(n)}(t, x_n) E_{c_2}^{(n)}(t, \xi_n) \le E_c(t, x - \xi) E_c^{(n)}(\xi_n), \tag{7}$$

$$E'_{c_1}(t, x' - \xi') E_{c_2}^{(n)}(t, x_n) E_{c_1}^{(n)}(t, \xi_n) \le E_c(t, x - \xi) E_c^{(n)}(x_n), \tag{8}$$

в яких $t > 0$, $\{x', \xi'\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n > 0$, $\xi_n > 0$, $0 < c_1 < c_2$, $c := \min\{2^{1-q_n} c_1, c_2 - c_1\}$, *а також нерівність*

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} E'_{c_1}(t-\tau, x' - y') E'_{c_1}(\tau, y' - \xi')((t-\tau)\tau)^{-M'} dy' \le Ct^{-M'} E'_c(t, x' - \xi'),$$

$$0 < \tau < t, \quad \{x', \xi'\} \subset \mathbb{R}^{n-1}, \tag{9}$$

де $C > 0$, $0 < c < c_1$.

Д о в е д е н н я. Нерівності (7) і (8) випливають з означення оцінювальних функцій, оцінки

$$c_1 x_n^{q_n} + c_2 \xi_n^{q_n} = c_1(x_n - \xi_n + \xi_n)^{q_n} + c_2 \xi_n^{q_n} \ge 2^{1-q_n} c_1 |x_n - \xi_n|^{q_n} +$$

$$+ (c_2 - c_1)\xi_n^{q_n} \ge c(|x_n - \xi_n|^{q_n} + \xi_n^{q_n}),$$

та аналогічної оцінки

$$c_1 \xi_n^{q_n} + c_2 x_n^{q_n} \ge c(|x_n - \xi_n|^{q_n} + x_n^{q_n}),$$

отриманих за допомогою нерівності $|a + b|^p \ge 2^{1-p} |a|^p - |b|^p$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, $p > 1$, з [11, с. 29]. Нерівність (9) є наслідком нерівності (2.1.80) з [11, с. 79]. ♦

Нехай для системи (1) функція $\Gamma : (\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_{NN}$ є фундаментальною матрицею розв'язків, а функція $Z : \Pi \to \mathbb{C}_{NN}$ − фундаментальною матрицею розв'язків задачі Коші, тобто ці функції є відповідно розв'язками в просторі узагальнених функцій таких задач:

$$A^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n})\Gamma(t,x) = I_N \delta(t,x), \quad (t,x) \in (\mathbb{R}^1 \backslash \{0\}) \times \mathbb{R}^n, \tag{10}$$

$$\Gamma(t,x) = 0, \qquad t < 0, \quad x \in \mathbb{R}^n; \tag{11}$$

$$A^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n}) Z(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in \Pi, \tag{12}$$

$$Z(t,x)\big|_{t=0} = I_N \delta(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{13}$$

де $\delta(t,x)$ і $\delta(x)$ − це дельта-функції Дірака з носіями відповідно в точках $(t = 0, x = 0)$ і $x = 0$.

Потрібні властивості функцій Γ і Z містяться в наступній лемі, вони випливають із результатів праць [5, 9, 11].

Лема 2. *Правильні такі рівності*:

$$\Gamma(t,x) = \theta(t) Z(t,x), \quad (t,x) \in (\mathbb{R}^1 \backslash \{0\}) \times \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

$$\partial_t^{k_0} \partial_x^k Z(t,x) = t^{-M-k_0-\|k\|/(2s)} \Omega_{k_0 k}\left(\frac{x_1}{t^{1/(2b_1)}}, \ldots, \frac{x_n}{t^{1/(2b_n)}} \right), \quad (t,x) \in \Pi,$$

$$k_0 \in \mathbb{Z}_+^1, \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{15}$$

де $\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \ge 0, \end{cases}$ *а* $\Omega_{k_0 k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_{NN}$ − *нескінченно диференційовні функції, для яких справджуються оцінки*

$$\left| \partial_z^\ell \Omega_{k_0 k}(z) \right| \le C_\ell E_c(1,z), \qquad z \in \mathbb{R}^n, \quad \ell \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{16}$$

з додатними сталими C_ℓ *і* c.

Наслідками (15) і (16) є оцінки

$$\left| \partial_t^{k_0} \partial_x^k Z(t,x) \right| \le C_{k_0 k} t^{-M-k_0-\|k\|/(2s)} E_c(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi. \tag{17}$$

Лема 3. *Нехай кожний стовпчик матриці розміру* $N \times N$

$$Y(t,x) := t^{-M'-1} \Omega\left(\frac{x_1}{t^{1/(2b_1)}}, \ldots, \frac{x_n}{t^{1/(2b_n)}} \right), \qquad (t,x) \in \Pi^+,$$

є розв'язком відповідної до (1) *однорідної системи, а для нескінченно диференційовної функції* $\Omega : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{C}_{NN}$ *справджуються оцінки* (16). *Тоді виконується рівність*

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Omega(z', 0)\, dz' = 0. \tag{18}$$

Ця лема є аналогом леми 1 з [3, с. 32−33] і доводиться подібно до неї.

Розглянемо скалярне $\overrightarrow{2b'} := (2b_1, \ldots, 2b_{n-1})$-параболічне рівняння

$$L^r(\partial_t, \partial_{x'}) v(t,x') := \left(\partial_t + (1+\delta_1) \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{b_j} \partial_{x_j}^{2b_j} \right)^r v(t,x') = 0,$$

$$(t,x') \in \Pi' \tag{19}$$

у якому r − натуральне число, а δ_1 − стала з (6), і його фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) $Z_0^{(r)}$. Легко переконатися, що

$$Z_0^{(r)}(t,x') = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} Z_0^{(1)}(t,x'), \qquad (t,x') \in \Pi', \tag{20}$$

і що згідно з (17) та властивостями ФРЗК справджуються оцінки

$$\left|\partial_t^{k_0} \partial_{x'}^{k'} Z_0^{(1)}(t,x')\right| \le C_{k_0 k} t^{-M'-k_0-\|k'\|/(2s)} E'_c(t,x'),$$

$$(t,x') \in \Pi', \quad k_0 \in \mathbb{Z}_+^1, \quad k' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}, \tag{21}$$

і рівності

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_t^{\ell_0} \partial_{x'}^{\ell'} Z_0^{(1)}(t,x'-\xi')\, d\xi' = 0, \qquad (t,x') \in \Pi', \tag{22}$$

якщо принаймні один з індексів ℓ_0 і ℓ' є ненульовим.

Лема 4. *Правильним є таке дивергентне зображення функції* Z :

$$Z(t,x) = L^r(\partial_t, \partial_{x'}) Z^{(r)}(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi, \tag{23}$$

у якому r *– будь-яке натуральне число, а для* $Z^{(r)}$ *справджуються оцінки*

$$\left|\partial_t^{k_0} \partial_x^k Z^{(r)}(t,x)\right| \le C_{k_0 k} t^{-M+r-k_0-\|k\|/(2s)} E_c(t,x),$$

$$(t,x) \in \Pi, \quad k_0 \in \mathbb{Z}_+^1, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{24}$$

Д о в е д е н н я. З означення ФРЗК $Z_0^{(r)}$ та формул (20) і (23) випливає рівність

$$Z^{(r)}(t,x) = \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} Z_0^{(1)}(t-\tau, x'-\xi') Z(\tau,(\xi',x_n))\, d\xi', \quad (t,x) \in \Pi. \tag{25}$$

Тому доведення зводиться до встановлення оцінок (24).

Оскільки Z є розв'язком системи (12), то й $Z^{(r)}$ – також розв'язок цієї системи. Звідси на підставі зауваження 1 випливає, що похідні $\partial_{x_n}^{\ell} Z^{(r)}$, $\ell \ge 2b_n$, можна зобразити у вигляді лінійної комбінації похідних вигляду $\partial_t^{k_0} \partial_x^k Z^{(r)}$ з $k_0 \in \mathbb{Z}_+^1$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $k_n < 2b_n$. Через це достатньо оцінити тільки останні похідні.

Почнемо з оцінювання похідних $\partial_x^k Z^{(r)}$ з $k = (k', k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $k_n \le 2b_n - 1$. Якщо $\|k'\| < 2rs$ і $k_n < 2b_n - 1$, то на підставі (25) маємо

$$\partial_x^k Z^{(r)}(t,x) = \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{x'}^{k'} Z_0^{(1)}(t-\tau, x'-\xi') \partial_{x_n}^{k_n} Z(\tau,(\xi',x_n))\, d\xi', \tag{26}$$

і за допомогою (9), (17) і (21) отримуємо

$$\left|\partial_x^k Z^{(r)}(t,x)\right| \le C_k \int\limits_0^t (t-\tau)^{r-1} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} (t-\tau)^{-M'-\|k'\|/(2s)} E'_{c_1}(t-\tau, x'-\xi') \times$$

$$\times \tau^{-M-k_n/(2b_n)} E'_{c_1}(\tau,\xi') E_{c_1}^{(n)}(\tau, x_n)\, d\xi' \le$$

$$\le C_k t^{-M'} E'_c(t,x') E_c^{(n)}(t,x_n) \times$$

$$\times \int_0^t (t-\tau)^{r-1-\|k'\|/(2s)} \tau^{-(k_n+1)/(2b_n)} d\tau =$$

$$= C_k t^{-M'+r-\|k'\|/(2s)-(k_n+1)/(2b_n)} E_c(t,x) \times$$

$$\times B(r-\|k'\|/(2s), 1-(k_n+1)/(2b_n)) =$$

$$= Ct^{-M+r-\|k\|/(2s)} E_c(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi,$$

де $c \in (0, c_1)$, B – бета-функція Ейлера.

Щоб отримати оцінки для випадку, коли $\|k'\| \geq 2rs$ або $k_n = 2b_n - 1$, інтеграл (25) запишемо у вигляді

$$Z^{(r)}(t,x) = \int_0^{t_1} \frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} Z_0^{(1)}(t-\tau, x'-\xi') Z(\tau, (\xi', x_n)) d\xi' +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} \frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} Z_0^{(1)}(t-\tau, x'-\xi') Z(\tau, (\xi', x_n)) d\xi' =$$

$$=: J_1 + J_2, \qquad t_1 := t/2. \tag{27}$$

В інтегралі J_1 диференціювання $\partial_{x'}^{k'}$ і $\partial_{x_n}^{k_n}$ з $k_n < 2b_n - 1$ можна застосовувати під знаками інтегралів. Тоді отримаємо

$$\partial_x^k J_1 = \int_0^{t_1} \frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{x'}^{k'} Z_0^{(1)}(t-\tau, x'-\xi') \partial_{x_n}^{k_n} Z(\tau, (\xi', x_n)) d\xi'. \tag{28}$$

Інтегруванням частинами похідні $\partial_x^k J_2$, $\|k'\| \geq 2rs$, $k_n \leq 2b_n - 1$, подаємо у вигляді

$$\partial_x^k J_2 = \int_{t_1}^{t} \frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{x'}^{\ell'} Z_0^{(1)}(t-\tau, x'-\xi') \partial_{\xi'}^{k'-\ell'} \partial_{x_n}^{k_n} Z(\tau, (\xi', x_n)) d\xi', \tag{29}$$

де $\|\ell'\| < 2rs$.

Інтеграли (28) і (29) оцінюємо за допомогою (9), (17) і (21) так само, як інтеграл (26), та отримуємо

$$\left|\partial_x^k J_1\right| \leq C_k t^{-M'} E_c(t,x) J_1'(t) \leq C_k t^{-M+r-\|k\|/(2s)} E_c(t,x),$$

$$\left|\partial_x^k J_2\right| \leq C_k t^{-M'} E_c(t,x) J_2'(t) \leq C_k t^{-M+r-\|k\|/(2s)} E_c(t,x),$$

оскільки

$$J_1'(t) := \int_0^{t_1} (t-\tau)^{r-1-\|k'\|/(2s)} \tau^{-(k_n+1)/(2b_n)} d\tau \leq$$

$$\leq (t-t_1)^{r-1-\|k'\|/(2s)} \int_0^{t_1} \tau^{-(k_n+1)/(2b_n)} d\tau =$$

$$= \frac{1}{1-(k_n+1)/(2b_n)} (t/2)^{r-\|k\|/(2s)-1/(2b_n)},$$

$$J_2'(t) := \int_{t_1}^{t} (t-\tau)^{r-1-\|\ell'\|/(2s)} \tau^{-\|k'-\ell'\|/(2s)-(k_n+1)/(2b_n)}\, d\tau \le$$

$$\le t_1^{-(\|k'\|-\|\ell'\|)/(2s)-(k_n+1)/(2b_n)} \int_{t_1}^{t} (t-\tau)^{r-1-\|\ell'\|/(2s)}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{r-\|\ell'\|/(2s)} (t/2)^{r-\|k\|/(2s)-1/(2b_n)}.$$

Треба ще оцінити похідні $\partial_{x'}^{k'} \partial_{x_n}^{2b_n-1} J_1$. Щоб це зробити, скористаємось зображенням

$$\partial_{x'}^{k'} \partial_{x_n}^{2b_n-1} J_1 = \int_0^{t_1} \frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\partial_{x'}^{k'} Z_0^{(1)}(t-\tau, x'-\xi') -$$

$$- \partial_{x'}^{k'} Z_0^{(1)}(t-\tau, x') \Big) \partial_{x_n}^{2b_n-1} Z(\tau, (\xi', x_n))\, d\xi' +$$

$$+ \int_0^{t_1} \frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!} \partial_{x'}^{k'} Z_0^{(1)}(t-\tau, x')\, d\tau \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\partial_{x_n}^{2b_n-1} Z(\tau, (\xi', x_n)) - \partial_{y_n}^{2b_n-1} Z(\tau, (\xi', y_n))\Big|_{y_n=0} \Big) d\xi' =$$

$$=: J_1^{(1)} + J_1^{(2)}.$$

Для встановлення цього зображення використовується рівність

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{y_n}^{2b_n-1} Z(\tau, (\xi', y_n))\Big|_{y_n=0} d\xi' = 0,$$

яка є наслідком лем 2 і 3.

З оцінок (21) випливає нерівність

$$\left| \partial_{x'}^{k'} Z_0^{(1)}(t-\tau, x'-\xi') - \partial_{x'}^{k'} Z_0^{(1)}(t-\tau, x') \right| \le$$

$$\le C_{k'} \sum_{j=1}^{n-1} |\xi_j| (t-\tau)^{-M'-\|k'\|/(2s)-1/(2b_j)} \times$$

$$\times \left(E'_{c_1}(t-\tau, x'-\xi') + E'_{c_1}(t-\tau, x') \right).$$

Використовуючи цю нерівність, оцінки (9) і (17) та враховуючи, що

$$|\xi_j| E'_{c_1}(\tau, \xi') \le C\tau^{1/(2b_j)} E'_c(\tau, \xi'), \quad j \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad 0 < c < c_1,$$

аналогічно до попереднього отримуємо

$$\left| J_1^{(1)} \right| \le C_{k'} \sum_{j=1}^{n-1} t^{-M'+r-1-\|k'\|/(2s)-1/(2b_j)} E_c(t,x) \int_0^{t_1} \tau^{-1+1/(2b_j)}\, d\tau =$$

$$= C_{k'} t^{-M'+r-1-\|k'\|/(2s)} E_c(t,x).$$

За допомогою оцінки (17) маємо

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\partial_{x_n}^{2b_n-1} Z(\tau, (\xi', x_n)) - \partial_{y_n}^{2b_n-1} Z(\tau, (\xi', y_n))\Big|_{y_n=0} \Big) d\xi' \right| \le$$

$$\le C\tau^{-M-1}|x_n|E_{c_1}^{(n)}(\tau,x_n)\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} E'_{c_1}(\tau,\xi')\,d\xi' =$$

$$= C\tau^{-1-1/(2b_n)}|x_n|E_{c_1}^{(n)}(\tau,x_n),$$

і на підставі оцінок (21) одержуємо

$$\left|J_1^{(2)}\right| \le C_k t^{-M'+r-1-\|k'\|/(2s)} E'_{c_1}(t,x')\int\limits_0^{t_1}|x_n|\tau^{-1-1/(2b_n)}E_{c_1}^{(n)}(\tau,x_n)\,d\tau \le$$

$$\le C_{k'} t^{-M'+r-1-\|k'\|/(2s)} E_c(t,x), \qquad 0 < c < c_1,$$

оскільки заміною $|x_n|\tau^{-1/(2b_n)} = \beta$ останній інтеграл зводиться до інтеграла

$$2b_n \int\limits_{|x_n|t_1^{-1/(2b_n)}}^{\infty} \exp\{-c\beta^{q_n}\}\,d\beta \le 2b_n\int\limits_0^{\infty}\exp\{-c\beta^{q_n}\}\,d\beta = C.$$

Отже, оцінки (24) отримано для випадку, коли $k_0 = 0$ і $k_n \le 2b_n - 1$. Для завершення доведення леми 4 ще треба встановити оцінки (24) для $k_0 \ge 0$. Щоб уникнути громіздких записів, обмежимось оцінюванням похідних $\partial_t^{k_0} Z^{(r)}$, $k_0 \ge 1$.

Якщо $k_0 < r$, то у виразі для $\partial_t^{k_0} Z^{(r)}$ матимемо лінійну комбінацію таких інтегралів:

$$K_j := \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{r-k_0-1+j}}{(r-k_0-1+j)!}\,d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_t^j Z_0^{(1)}(t-\tau,x'-\xi')Z(\tau,(\xi',x_n))\,d\xi',$$

$$(t,x)\in\Pi, \qquad j\in\{0,1,\ldots,k_0\}. \tag{30}$$

Використовуючи (9), (17) і (21), отримуємо

$$\left|K_j\right| \le C_{k_0} t^{-M'} E_c(t,x)\int\limits_0^t (t-\tau)^{r-k_0-1}\tau^{-1/(2b_n)}\,d\tau = C_{k_0} t^{-M+r-k_0} E_c(t,x),$$

звідки випливає оцінка (24) для $k_0 < r$ і для $k = 0$.

Якщо $k_0 = r$, то, продиференціювавши $k_0 - 1$ разів $Z^{(r)}$, отримаємо інтеграли типу (30), у яких $k_0 = r-1$, тобто інтеграли

$$K_j := \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^j}{j!}\,d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_t^j Z_0^{(1)}(t-\tau,x'-\xi')Z(\tau,(\xi',x_n))\,d\xi',$$

$$(t,x)\in\Pi, \qquad j\in\{0,1,\ldots,r-1\}.$$

Далі розглянемо сукупність інтегралів

$$K_{j,h} := \int\limits_0^{t-h} \frac{(t-\tau)^j}{j!}\,d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_t^j Z_0^{(1)}(t-\tau,x'-\xi')Z(\tau,(\xi',x_n))\,d\xi',$$

$$(t,x)\in\Pi, \quad 0<h<t_1, \quad j\in\{0,1,\ldots,r-1\}. \tag{31}$$

Оскільки підінтегральна функція в (31) не має особливостей при $\tau = t$, то для похідної $\partial_t K_{j,h}$ отримуємо формулу

$$\partial_t K_{j,h} = \frac{h^j}{j!} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_h^j Z_0^{(1)}(h, x' - \xi') Z(t-h, (\xi', x_n))\, d\xi' +$$

$$+ \int_0^{t-h} \frac{(t-\tau)^{j-1}}{(j-1)!} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_t^j Z_0^{(1)}(t-\tau, x'-\xi') Z(\tau, (\xi', x_n))\, d\xi' +$$

$$+ \int_0^{t-h} \frac{(t-\tau)^{j}}{j!} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_t^{j+1} Z_0^{(1)}(t-\tau, x'-\xi') Z(\tau, (\xi', x_n))\, d\xi' =$$

$$=: L'_{j,h} + L''_{j,h} + L'''_{j,h}. \qquad (32)$$

Очевидно, що $K_{j,h} \underset{h\to 0}{\to} K_j$. Тому, якщо доведемо, що $\partial_t K_{j,h} \underset{h\to 0}{\to} K_j^{(1)}$ рівномірно, то буде встановлена рівність $\partial_t K_j = K_j^{(1)}$, і з оцінок для $\partial_t K_{j,h}$ при $h \to 0$ буде доведена оцінка для $\partial_t K_j$, наслідком якої буде оцінка (24) для випадку, коли $k_0 = r$ і $k = 0$.

За допомогою (9), (17) і (21) маємо

$$\left| L'_{j,h} \right| \le Ct^{-M'} (t-h)^{-1/(2b_n)} E'_c(t, x') E_c^{(n)}(t-h, x_n). \qquad (33)$$

Оскільки $L''_{0,h} = 0$, $L''_{j,h} = L'''_{j-1,h}$ для $j \in \{1, \ldots, r-1\}$, а

$$L'''_{r-1,h} = \int_0^{t-h} \frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_t^r Z_0^{(1)}(t-\tau, x'-\xi') Z(\tau, (\xi', x_n))\, d\xi',$$

то достатньо розглянути інтеграли

$$L_{j,h} := \int_0^{t-h} \frac{(t-\tau)^{j}}{j!} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_t^{j+1} Z_0^{(1)}(t-\tau, x'-\xi') Z(\tau, (\xi', x_n))\, d\xi',$$

$$j \in \{1, \ldots, r-1\},$$

які запишемо у вигляді

$$L_{j,h} = L_{j,h}^{(1)} + L_{j,h}^{(2)} + L_{j,h}^{(3)}, \qquad (34)$$

де

$$L_{j,h}^{(1)} := \int_0^{t_1} \frac{(t-\tau)^{j}}{j!} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_t^{j+1} Z_0^{(1)}(t-\tau, x'-\xi') Z(\tau, (\xi', x_n))\, d\xi',$$

$$L_{j,h}^{(2)} := \int_{t_1}^{t-h} \frac{(t-\tau)^{j}}{j!} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_t^{j+1} Z_0^{(1)}(t-\tau, x'-\xi') (Z(\tau, (\xi', x_n)) - Z(\tau, x))\, d\xi',$$

$$L_{j,h}^{(3)} := \int_{t_1}^{t-h} \frac{(t-\tau)^{j}}{j!} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_t^{j+1} Z_0^{(1)}(t-\tau, x'-\xi')\, d\xi' \right) Z(t, x)\, d\tau.$$

Згідно з (22) маємо

$$L_{j,h}^{(3)} = 0. \qquad (35)$$

Подібно до попередніх оцінок, за допомогою (9), (17) і (21) отримуємо оцінки

$$\left| L_{j,h}^{(1)} \right| \le Ct^{-M'} E_c(t, x) \int_0^{t_1} (t-\tau)^{-1} \tau^{-1/(2b_n)}\, d\tau \le$$

$$\le Ct^{-M'} (t - t_1)^{-1} t_1^{1-1/(2b_n)} E_c(t, x) = Ct^{-M} E_c(t, x). \qquad (36)$$

Щоб оцінити $L_{j,h}^{(2)}$, скористаємося нерівністю

$$\left|Z(\tau,(\xi',x_n)) - Z(\tau,x)\right| \le C\sum_{\ell=1}^{n-1}\left|x_\ell - \xi_\ell\right|\tau^{-M-1/(2b_\ell)} \times$$

$$\times\left(E'_{c_1}(\tau,x') + E'_{c_1}(\tau,\xi')\right)E_{c_1}^{(n)}(\tau,x_n)\,,$$

яка випливає з оцінок (17), а також тим, що

$$\left|x_\ell - \xi_\ell\right|E'_{c_1}(t-\tau,x'-\xi') \le C(t-\tau)^{1/(2b_\ell)}E'_c(t-\tau,x'-\xi')\,,$$

$$\ell \in \{1,\dots,n-1\},\qquad 0 < c < c_1\,.$$

За допомогою (9) і (21) маємо

$$\left|L_{j,h}^{(2)}\right| \le C\int_{t_1}^{t-h}\frac{(t-\tau)^j}{j!}d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}(t-\tau)^{-M'-j-1}E'_{c_1}(t-\tau,x'-\xi')\times$$

$$\times\sum_{\ell=1}^{n-1}\left|x_\ell-\xi_\ell\right|\tau^{-M-1/(2b_\ell)}(E'_{c_1}(\tau,x') + E'_{c_1}(\tau,\xi'))E_{c_1}^{(n)}(\tau,x_n) \le$$

$$\le Ct^{-M'}E_c(t,x)\sum_{\ell=1}^{n-1}\int_{t_1}^{t-h}(t-\tau)^{-1+1/(2b_\ell)}\tau^{-1/(2b_n)-1/(2b_\ell)}\,d\tau \le$$

$$\le Ct^{-M'}E_c(t,x)\sum_{\ell=1}^{n-1}t_1^{-1/(2b_n)-1/(2b_\ell)}\left((t-t_1)^{1/(2b_\ell)} - h^{1/(2b_\ell)}\right) \le$$

$$\le Ct^{-M}E_c(t,x)\sum_{\ell=1}^{n-1}t^{-1/(2b_\ell)}\left(t^{1/(2b_\ell)} - h^{1/(2b_\ell)}\right). \qquad (37)$$

Розглянемо інтеграл

$$L_j^{(2)} := \int_{t_1}^{t}\frac{(t-\tau)^j}{j!}d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\partial_t^{j+1}Z_0^{(1)}(t-\tau,x'-\xi')(Z(\tau,(\xi',x_n)) - Z(\tau,x))\,d\xi'\,,$$

і подібно до виведення оцінок (37) отримаємо

$$\left|L_j^{(2)} - L_{j,h}^{(2)}\right| = \left|\int_{t-h}^{t}\frac{(t-\tau)^j}{j!}d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\partial_t^{j+1}Z_0^{(1)}(t-\tau,x'-\xi')\times\right.$$

$$\left.\times\left(Z(\tau,(\xi',x_n)) - Z(\tau,x)\right)d\xi'\right| \le Ct^{-M'}E_c(t,x)\times$$

$$\times\sum_{\ell=1}^{n-1}\int_{t-h}^{t}(t-\tau)^{-1+1/(2b_\ell)}\tau^{-1/(2b_n)-1/(2b_\ell)}\,d\tau \le$$

$$\le Ct^{-M'}E_c(t,x)\sum_{\ell=1}^{n-1}(t-h)^{-1/(2b_n)-1/(2b_\ell)}h^{1/(2b_\ell)}. \qquad (38)$$

Нехай $\Pi_{\varepsilon,T} := \{(t,x)\mid t\in[\varepsilon,T],\ x\in\mathbb{R}^n\}$, де ε і T – довільно фіксовані числа такі, що $0<\varepsilon<T$. З нерівності (38) випливає, що

$$\sup_{(t,x)\in\Pi_{\varepsilon,T}}\left|L_j^{(2)} - L_{j,h}^{(2)}\right| \underset{h\to 0}{\to} 0\,,$$

тобто $L_{j,h}^{(2)} \underset{h\to 0}{\to} L_j^{(2)}$ рівномірно в $\Pi_{\varepsilon,T}$, і з оцінок (37) при $h \to 0$ отримуємо оцінку для $L_j^{(2)}$. З цієї оцінки та з (32)–(36) випливає оцінка (24) для $k_0 = r$ і для $k = 0$.

Щоб отримати оцінки $\partial_t^{k_0} Z^{(r)}$ для $k_0 > r$, треба $Z^{(r)}$ записати у вигляді (27), продиференціювати k_0 разів J_1 за t, послідовно диференціюючи за t інтеграл J_2, інтегруванням частинами перенести в ньому потрібну кількість похідних від $Z_0^{(1)}$ до Z. Отримані таким чином інтеграли оцінити подібно до оцінених вище. ♦

3. Матриця Ґріна. Користуватимемося такими означеннями.

Означення. *Матрицею Ґріна* задачі (1)–(3) називається така матриця $G := (G_0, G_1, \ldots, G_{m+1})$, що для довільних гладких і фінітних функцій f, $g_1, \ldots, g_m$ і φ розв'язок задачі зображується у вигляді

$$u(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} G_0(t-\tau, x, \xi) f(\tau,\xi)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j(t-\tau, x-\xi') g_j(\tau,\xi')\, d\xi' +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}_+^n} G_{m+1}(t,x,\xi)\varphi(\xi)\, d\xi, \qquad (t,x) \in \Pi^+ .$$

Матрицю $G_0(t,x,\xi)$, $t > 0$, $\{x,\xi\} \in \mathbb{R}_+^n$, називатимемо *однорідною матрицею Ґріна*, матриці $G_j(t,x)$, $t > 0$, $\{x,\xi\} \in \mathbb{R}_+^n$, $j \in \{1,\ldots,m\}$, – *ядрами Пуассона*, а матрицю $G_{m+1}(t,x,\xi)$, $t > 0$, $\{x,\xi\} \in \mathbb{R}_+^n$, – *матрицею впливу початкових джерел* задачі (1)–(3).

Зауваження 2. *У просторі узагальнених функцій матриці* G_j, $j \in \in \{0,1,\ldots,m+1\}$, *доозначені нулем при* $t < 0$, *є розв'язками відповідно таких задач*:

$$A^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n}) G_0(t,x,\xi) = I_N \delta(t, x-\xi), \tag{39}$$

$$B_j^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n}) G_0(t,x,\xi)\Big|_{x_n=0} = 0, \qquad j \in \{1,\ldots,m\}, \tag{40}$$

$$G_0(t,x,\xi) = 0 \qquad \text{при} \qquad t < 0; \tag{41}$$

$$A^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n}) G_j(t,x) = 0, \tag{42}$$

$$B_\ell^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n}) G_j(t,x)\Big|_{x_n=0} = \delta_{\ell j}\delta(t,x'), \quad \ell \in \{1,\ldots,m\}, \tag{43}$$

$$G_j(t,x) = 0 \qquad \text{при} \qquad t < 0, \qquad j \in \{1,\ldots,m\}; \tag{44}$$

$$A^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n}) G_{m+1}(t,x,\xi) = 0, \tag{45}$$

$$B_j^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n}) G_{m+1}(t,x,\xi)\Big|_{x_n=0} = 0, \qquad j \in \{1,\ldots,m\}, \tag{46}$$

$$G_{m+1}(t,x,\xi)\big|_{t=0} = I_N\delta(x-\xi)\,, \tag{47}$$

де $\delta_{\ell j}$ *– символ Кронекера,* $\delta(t,x-\xi)$, $\delta(t,x')$ *і* $\delta(x-\xi)$ *– дельта-функції Дірака з носіями відповідно в точках* $(t=0, x=\xi)$, $(t=0, x'=0)$ *і* $x=\xi$.

Установимо, що для задачі (1)–(3) у припущенні виконання умови $\overrightarrow{2b}$-параболічності системи та умови доповняльності існує матриця Ґріна, і наведемо властивості її компонент.

У праці [8] доведено існування ядер Пуассона G_j, $j\in\{1,\dots,m\}$, задачі (1)–(3) і наведено таке твердження.

Теорема 1 [8**]**. *Для довільного числа* $r\in\mathbb{Z}_+^1$ *є правильними дивергентні зображення*

$$G_j(t,x) = L^r(\partial_t,\partial_{x'})G_j^{(r)}(t,x), \qquad (t,x)\in\Pi^+, \qquad j\in\{1,\dots,m\}\,, \tag{48}$$

в яких для функцій $G_j^{(r)}$ *справджуються оцінки*

$$\left|\partial_t^{k_0}\partial_x^k G_j^{(r)}(t,x)\right| \le C_{k_0k}t^{-M'+r-1-k_0+(r_j-\|k\|)/(2s)}E_c(t,x), \quad (t,x)\in\Pi^+,$$
$$k_0\in\mathbb{Z}_+^1, \quad k\in\mathbb{Z}_+^n, \quad j\in\{1,\dots,m\}. \tag{49}$$

Оцінки самих ядер G_j *випливають з* (49) *при* $r=0$.

Теорема 2. *Правильними є такі твердження*:

1°) *для задачі* (1)–(3) *існує однорідна матриця Ґріна* G_0, *яка визначається формулою*

$$G_0(t,x,\xi) = \Gamma(t,x-\xi) - V(t,x,\xi), \qquad t\in\mathbb{R}^1\backslash\{0\}, \qquad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}_+^n, \tag{50}$$

де Γ *– фундаментальна матриця розв'язків системи* (1);

2°) *справджуються оцінки*

$$\left|\partial_t^{k_0}\partial_x^k\partial_\xi^\ell G_0(t,x,\xi)\right| \le C_{k_0k\ell}t^{-M-k_0-(\|k\|+\|\ell\|)/(2s)}E_c(t,x-\xi)\,, \tag{51}$$

$$\left|\partial_t^{k_0}\partial_x^k\partial_\xi^\ell V(t,x,\xi)\right| \le C_{k_0k\ell}t^{-M-k_0-(\|k\|+\|\ell\|)/(2s)}E_c(t,x-\xi)\times$$
$$\times E_c^{(n)}(t,x_n)E_c^{(n)}(t,\xi_n)\,,$$
$$t>0, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}_+^n, \quad k_0\in\mathbb{Z}_+^1, \quad \{k,\ell\}\subset\mathbb{Z}_+^n; \tag{52}$$

3°) *правильним є зображення*

$$G_0(t,x,\xi) = L^r(\partial_t,\partial_{x'})G_0^{(r)}(t,x,\xi), \quad t>0, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{Z}_+^n, \tag{53}$$

де $r\in\mathbb{Z}_+^1$, *і для* $G_0^{(r)}$ *справджуються оцінки, які відрізняються від оцінок* (51) *лише тим, що в них* M *замінено на* $M-r$;

4°) *матриця впливу початкових джерел задачі* (1)–(3) *дається формулою*

$$G_{m+1}(t,x,\xi) = G_0(t,x,\xi), \qquad t>0, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}_+^n. \tag{54}$$

Д о в е д е н н я. ***1°***). Оскільки матриця Γ є розв'язком задачі (10), (11), і для Γ правильна формула (14), то для того щоб матриця (50) була розв'язком задачі (39)–(41), матриця V при будь-якому $\xi\in\mathbb{R}_+^n$ має бути розв'язком задачі

$$A^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n})V(t,x,\xi) = 0, \qquad (t,x) \in \Pi^+,$$

$$B_j^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n})V(t,x,\xi)\Big|_{x_n=0} = g_j(t, x' - \xi), \qquad (t,x') \in \Pi',$$

$$V(t,x,\xi) = 0 \qquad \text{при} \qquad t < 0,$$

де

$$g_j(t, x' - \xi) := \begin{cases} B_j^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n})Z(t, x - \xi)\Big|_{x_n=0}, & t > 0, \\ 0 & t \le 0. \end{cases} \tag{55}$$

Згідно з тим, що G_j, $j \in \{1, \dots, m\}$, є розв'язком задач (42)−(44), отримуємо формулу

$$V(t,x,\xi) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j(t-\tau, x - y')g_j(\tau, y' - \xi)\, dy',$$

$$t > 0, \qquad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}_+^n. \tag{56}$$

Ця формула разом з (50) визначає однорідну матриця Ґріна.

2°). Оцінки (51) є наслідком формул (14) і (50) та оцінок (17) і (52). Тому достатньо вивести оцінки (52). З формули (56) випливає, що V залежить від різниці $x' - \xi'$. Через це доведення оцінок (52) зводиться до отримання оцінок похідних

$$\partial_t^{k_0} \partial_x^k \partial_{\xi_n}^\ell V(t,x,\xi) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_t^{k_0} \partial_x^k G_j(t-\tau, x-y')\partial_{\xi_n}^\ell g_j(\tau, y'-\xi)\, dy',$$

$$t > 0, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}_+^n, \qquad \{k_0, \ell\} \subset \mathbb{Z}_+^1, \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Якщо врахувати те, що за допомогою рівностей (12), (55) і зауваження 1 $\partial_{\xi_n}^\ell g_j(\tau, y' - \xi)$ зображується у вигляді лінійної комбінації похідних вигляду

$$\partial_\tau^{p_0} \partial_y^p Z(\tau, y - \xi)\Big|_{y_n=0}, \qquad 2sp_0 + \|p\| = r_j + \ell, \qquad p_n < 2b_n,$$

то доведення зводиться до оцінювання інтегралів

$$\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_t^{k_0} \partial_x^k G_j(t-\tau, x-y')\partial_\tau^{p_0} \partial_y^p Z(\tau, y-\xi)\Big|_{y_n=0} dy'$$

і здійснюється за допомогою методики оцінювання подібних інтегралів при доведенні леми 4. При цьому використовуються оцінки похідних від G_j з теореми 1 і лем 1−3.

3°). З формул (23), (48), (50) і (56) випливає зображення (53), в якому

$$G_0^{(r)}(t,x,\xi) = Z^{(r)}(t, x-\xi) - V^{(r)}(t,x,\xi),$$

$$V^{(r)}(t,x,\xi) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j^{(r)}(t-\tau, x-y')g_j(\tau, y'-\xi)\, dy'.$$

Для $Z^{(r)}$ справджуються оцінки (24), отримані в лемі 4, а потрібні оцінки для $V^{(r)}$ виводяться подібно до оцінок (24) і (52).

4°). Доведемо рівність (54). Оскільки матриця Z є розв'язком задачі (12), (13), то, беручи до уваги формули (14), (50) та означення G_{m+1} як розв'язку задачі (45)−(47), достатньо зауважити, що для довільної гладкої і фінітної функції φ справджується співвідношення

$$I(t,x) := \int_{\mathbb{R}_+^n} V(t,x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi \underset{t\to 0}{\to} 0, \qquad x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Це співвідношення є правильним, оскільки, враховуючи обмеженість φ та оцінку (52), для $x_n > 0$ отримуємо

$$|I(t,x)| \le C\tau^{-M} E_c^{(n)}(t,x_n) \int_{\mathbb{R}_+^n} E_c(t,x-\xi)\,d\xi = CE_c^{(n)}(t,x_n) \underset{t\to 0}{\to} 0.$$

Тут використано те, що за допомогою заміни

$$y_j = (\xi_j - x_j)t^{-1/(2b_j)}, \qquad j \in \{1,\ldots,n\},$$

маємо

$$t^{-M} \int_{\mathbb{R}_+^n} E_c(t,x-\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}_+^n} \exp\left\{-c\sum_{j=1}^n |y_j|^{q_j}\right\} dy = C_0. \qquad \blacklozenge$$

Висновки. Наведені вище результати стосовно побудови, дивергентного зображення і точних оцінок матриці Ґріна модельної задачі (1)–(3) будуть використовуватися для встановлення коректної розв'язності та інтегрального зображення розв'язків як задачі (1)–(3), так і загальних крайових задач для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем у півпросторах за просторовими змінними.

1. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 3(117). – С. 53–161.
   Те саме: *Agranovich M. S., Vishik M. I.* Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type // Russ. Math. Surv. – 1964. – **19**, No. 3. – P. 53–157. – https://doi.org/10.1070/RM1964v019n03ABEH001149.
2. *Загорский Т. Я.* Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1961. – 115 с.
3. *Ивасишен С. Д.* Линейные параболические граничные задачи. – Киев: Выща шк., 1987. – 72 с. – (Современные достижения математики и ее приложений).
4. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Выща шк., 1990. – 200 с.
5. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. – Вып. 1. – С. 3–175; Дополнение к статье. – С. 271–273.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
   Те саме: *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. – Transl. Math. Monogr., Vol. 23. – Providence, RI: AMS, 1968. – xi+648 p.
7. *Солонников В. А.* Краевые задачи математической физики. 3. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1965. – **83**. – 165 с.
   http://mi.mathnet.ru/book1212.
8. *Турчина Н. І., Івасишен С. Д.* Про модельну крайову задачу з векторною вагою // Буков. мат. журн. – 2017. – **5**, № 3-4. – С. 163–167.
9. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – **133**, № 1. – С. 40–43.
10. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – Москва: Наука, 1964. – 443 с.
11. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.
    https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9.

МАТРИЦА ГРИНА МОДЕЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ С ВЕКТОРНЫМ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ВЕСОМ

Рассмотрена общая модельная граничная задача для $\overrightarrow{2b}$-параболической по Эйдельману системы дифференциальных уравнений с частными производными. Для такой задачи построена матрица Грина, получены точные оценки всех её компонент вместе с их производными и установлено для компонент дивергентное представление.

GREEN`S MATRIX FOR MODEL BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH VECTOR PARABOLIC WEIGHT

The general model boundary value problem for parabolic in the sense of Eidelman system of partial differential equations with vector order $\overrightarrow{2b}$ is considered. The Green`s matrix for this problem is constructed. Exact estimates for all components of Green's matrix and their derivatives are obtained. Divergent representations for these components are found.

Нац. техн. ун-т України
«Київ. політех. ін-т ім. І. Сікорського», Київ

Одержано
17.02.18