

**НЕЛІНІЙНІ ДРУГІ ГАРМОНІКИ ЛОКАЛІЗОВАНИХ ХВИЛЬ ЗСУВУ
В АНІЗОТРОПНОМУ ШАРІ МІЖ АНІЗОТРОПНИМИ ПІВПРОСТОРАМИ ЗА
УМОВ НЕІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ**

Побудовано чисельно-аналітичний розв'язок задачі про генерацію нелінійних других гармонік при поширенні пружних симетричних локалізованих хвиль зсуву в кристалічному шарі класу $t3t$ кубічної системи, розташованому між однотипними кристалічними півпросторами аналогічного класу анізотропії, у випадку неідеального ковзного контакту складових хвилеводу. Визначено аналітичну форму функцій хвильових переміщень для нелінійних ангармонічних збурень, що є хвилями поздовжньо-зсувного типу, та здійснено числові дослідження амплітудно-частотних характеристик других гармонік для монохроматичних локалізованих хвиль у шарі з монокристалу германію між півпросторами з монокристалу кремнію.

Задачі про визначення закономірностей генерації і поширення нелінійних пружних хвиль відносяться сьогодні до числа провідних проблем механіки деформованого твердого тіла, актуальних як для подальшого розвитку фундаментальної науки, так і з огляду на потреби вельми широкого кола впроваджень [4–6, 7, 15, 18]. Тематичні напрямки та застосовувані підходи у дослідженнях за проблемами теорії нелінійних пружних хвиль є достатньо різноманітними. Одним з найбільш актуальних є питання аналізу ангармонічних нелінійних ефектів у процесах збудження і розповсюдження пружних хвиль малої інтенсивності в анізотропних пружних середовищах, вивчення генерації та взаємодії нелінійних вищих гармонік пружних хвиль і визначення ряду характеристик нелінійних ангармонічних збурень із застосуванням методики розкладу характеристик хвильових рухів за малим параметром у вигляді акустичного числа Маха [4, 5, 7]. Здійснені та опубліковані дослідження у зазначеному напрямку на цей час переважно стосуються питань визначення нелінійних ангармонічних збурень у полях об'ємних хвиль деформацій в ізотропних та окремих типах кристалічних середовищ, у полях зсувних і поздовжньо-зсувних нормальних пружних хвиль в монокристалічному шарі з матеріалів кубічної системи за умов задання на його гранях однорідних крайових умов у переміщеннях, у напруженнях або різнотипних крайових умов змішаного типу [4–6, 14–16, 20]. Водночас проблеми дослідження характеристик нелінійних ангармонічних збурень у полях локалізованих пружних хвиль вивчено для обмеженого кола випадків, переважно для поверхневих хвиль релієвського типу в ізотропному півпросторі [7, 8]. Що ж стосується досліджень ангармонічних збурень у складених анізотропних кристалічних тілах з урахуванням ефектів геометричної і фізичної нелінійностей, результати яких є вельми актуальними для застосувань у технологіях згортки та інтегрування хвильових сигналів у кристалічних акустoeлектронних пристроях, насамперед в ультраакустичних конвольверах, а також для застосувань у схемах ультраакустичної діагностики пружних середовищ [4], то зазначені питання, попри їхню важливість, вивчено лише для окремих випадків. До вивчених належать питання про нелінійні ангармонічні ефекти при поширенні узагальнених поверхневих хвиль Лява в кристалічному шарі на кристалічному півпросторі [2, 3, 10], а також дослідження ангармонічних ефектів для локалізованих зсувних хвиль у кристалічному шарі, який перебуває в умовах ідеального механічного контакту з оточуючими кристалічними півпросторами [9].

Метою пропонованої роботи є у побудова та дослідження розв'язку задачі про визначення характеристик нелінійних других гармонік для локалізованих монохроматичних зсувних пружних хвиль SH-типу, що поширю-

ються у шарі монокристалу класу $m\bar{3}m$ кубічної системи, розміщеного між однотипними за фізико-механічними властивостями монокристалічними пружними півпросторами аналогічного класу анізотропії, у випадку неідеального ковзного контакту складових розглядуваного хвилеводу.

1. Постановка задачі. Досліджуваний хвилевід віднесемо до системи прямокутних координат, в якій шар займає область $V_1 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h\}$, а півпростори – області $V_2 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -\infty < x_3 < -h\}$ та $V_3 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, h < x_3 < \infty\}$. Фізико-механічні властивості компоненти V_p , $p = 1, 2, 3$, хвилеводу з монокристалу класу $m\bar{3}m$ кубічної системи характеризуються матричними пружними сталими другого порядку $c_{ij}^{(p)}$, матричними пружними сталими третього порядку $c_{ijk}^{(p)}$ та густиною ρ_p . Кристалографічні напрямки для матеріалів шару та півпросторів є колінеарними. У подальшому координатні змінні вважаються віднесеними до характерного геометричного параметра $R_* = h$; функції хвильових пружних переміщень u_j , $j = 1, 2, 3$, віднесено до параметра u_* , що характеризує максимальний рівень амплітуд досліджуваних хвиль; компоненти тензорів пружних сталих другого порядку $c_{ijk\ell}^{(p)}$ і третього порядку $c_{ijklmn}^{(p)}$, компоненти їх матричних аналогів $c_{ij}^{(p)}$ і $c_{ijk}^{(p)}$ та компоненти тензорів напружень $\sigma_{jd}^{(p)}$ у складових хвилеводу віднесено до параметра нормування c_* . Сукупність нормованих сталих $c_{ij}^{(p)}$ для матеріалів розглядуваного типу визначається через три незалежні величини $c_{11}^{(p)}$, $c_{12}^{(p)}$, $c_{44}^{(p)}$, а сукупність нормованих сталих третього порядку $c_{ijk}^{(p)}$ – через шість незалежних величин $c_{111}^{(p)}$, $c_{112}^{(p)}$, $c_{114}^{(p)}$, $c_{155}^{(p)}$, $c_{123}^{(p)}$, $c_{456}^{(p)}$.

Згідно з вибраною концепцією, здійснюване дослідження малих нелінійних хвильових ефектів базується на використанні методу малого параметра, відповідно до якого нормовані комплексні функції хвильових переміщень $u_j^{(p)}$, $j = 1, 2, 3$, у складових V_p хвилеводу відшукуються у вигляді представлень $u_j^{(p)} = u_j^{(\ell,p)} + \delta u_j^{(n,p)}$, $j = 1, 2, 3$, $\delta = u_*/R_* \ll 1$. Для аналізу нелінійних ангармонійних ефектів при поширенні локалізованих у шарі SH-хвиль уздовж координатного напрямку Ox_1 для складових хвилеводу використовуємо модель фізично та геометрично нелінійного динамічного пружного деформування, яка базується на тензорній формі представлення пружного потенціалу U :

$$U = \frac{1}{2} c_{jqrk} \varepsilon_{jq} \varepsilon_{rk} + \frac{1}{6} c_{jqrk\ell m} \varepsilon_{jq} \varepsilon_{rk} \varepsilon_{\ell m}, \quad j, q, r, k, \ell, m = 1, 2, 3, \quad (1)$$

з квадратичними та кубічними членами за скінченними деформаціями

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} (u_{j,k} + u_{k,j} + u_{\ell,j} u_{\ell,k}), \quad j, k, \ell = 1, 2, 3,$$

де

$$u_{j,k} = \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \quad j, k = 1, 2, 3.$$

Безрозмірні нормовані компоненти тензора механічних напружень σ_{jd} у відповідних складових V_p хвилеводу для форми (1) пружного потенціалу U подамо у вигляді суми лінійних і нелінійних доданків:

$$\sigma_{jd}(\mathbf{u}) = \delta \cdot \sigma_{jd}^{(\ell)}(\mathbf{u}^{(\ell)}) + \delta^2 \cdot (\sigma_{jd}^{(n)}(\mathbf{u}^{(\ell)}) + \sigma_{jd}^{(\ell)}(\mathbf{u}^{(n)})), \quad j, d = 1, 2, 3,$$

де

$$\mathbf{u}^{(\ell)} = (u_1^{(\ell)}, u_2^{(\ell)}, u_3^{(\ell)}), \quad \mathbf{u}^{(n)} = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}),$$

$$\sigma_{jd}^{(\ell)} = c_{jdrk} u_{r,k},$$

$$\sigma_{jd}^{(n)} = \frac{1}{2} c_{jdrk} u_{\ell,r} u_{\ell,k} + c_{pdrk} u_{j,p} u_{r,k} + \frac{1}{2} c_{jdrk\ell m} u_{r,k} u_{\ell,m},$$

$$j, q, r, k, \ell, m = 1, 2, 3.$$

Рівняння руху за відсутності об'ємних сил на підставі виділення складових однакового порядку за степенями малого параметра δ для кожної складової V_p хвилеводу зводяться до співвідношень першого лінійного та другого нелінійного наближень:

$$\rho_p \frac{\partial^2 u_j^{(\ell,p)}}{\partial t^2} - \sigma_{jd,d}^{(\ell,p)}(\mathbf{u}^{(\ell,p)}) = 0, \quad (2)$$

$$\rho_p \frac{\partial^2 u_j^{(n,p)}}{\partial t^2} - \sigma_{jd,d}^{(\ell,p)}(\mathbf{u}^{(n,p)}) = \sigma_{jd,d}^{(n,p)}(\mathbf{u}^{(\ell,p)}), \quad j, d = 1, 2, 3. \quad (3)$$

У розглядуваному випадку неідеального ковзного контакту складових хвилеводу крайові умови на поверхнях $x_3 = \pm 1$ для лінійного та нелінійного наближень відповідно мають такий загальний вигляд:

$$(u_3^{(\ell,1)})_{x_3=1} = (u_3^{(\ell,3)})_{x_3=1}, \quad (u_3^{(\ell,1)})_{x_3=-1} = (u_3^{(\ell,2)})_{x_3=-1},$$

$$(\sigma_{33}^{(\ell,1)}(\mathbf{u}^{(\ell,1)}))_{x_3=1} = (\sigma_{33}^{(\ell,3)}(\mathbf{u}^{(\ell,3)}))_{x_3=1},$$

$$(\sigma_{33}^{(\ell,1)}(\mathbf{u}^{(\ell,1)}))_{x_3=-1} = (\sigma_{33}^{(\ell,2)}(\mathbf{u}^{(\ell,2)}))_{x_3=-1},$$

$$(\sigma_{3j}^{(\ell,1)}(\mathbf{u}^{(\ell,1)}))_{x_3=1} = 0,$$

$$(\sigma_{3j}^{(\ell,1)}(\mathbf{u}^{(\ell,1)}))_{x_3=-1} = 0,$$

$$(\sigma_{3j}^{(\ell,3)}(\mathbf{u}^{(\ell,3)}))_{x_3=1} = 0,$$

$$(\sigma_{3j}^{(\ell,2)}(\mathbf{u}^{(\ell,2)}))_{x_3=-1} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

$$(u_3^{(n,1)})_{x_3=1} = (u_3^{(n,3)})_{x_3=1},$$

$$(u_3^{(n,1)})_{x_3=-1} = (u_3^{(n,2)})_{x_3=-1},$$

$$(\sigma_{33}^{(\ell,1)}(\mathbf{u}^{(n,1)}) + \sigma_{33}^{(n,1)}(\mathbf{u}^{(\ell,1)}))_{x_3=1} = (\sigma_{33}^{(\ell,3)}(\mathbf{u}^{(n,3)}) + \sigma_{33}^{(n,3)}(\mathbf{u}^{(\ell,3)}))_{x_3=1},$$

$$(\sigma_{33}^{(\ell,1)}(\mathbf{u}^{(n,1)}) + \sigma_{33}^{(n,1)}(\mathbf{u}^{(\ell,1)}))_{x_3=-1} = (\sigma_{33}^{(\ell,2)}(\mathbf{u}^{(n,2)}) + \sigma_{33}^{(n,2)}(\mathbf{u}^{(\ell,2)}))_{x_3=-1},$$

$$(\sigma_{3j}^{(\ell,1)}(\mathbf{u}^{(n,1)}) + \sigma_{3j}^{(n,1)}(\mathbf{u}^{(\ell,1)}))_{x_3=1} = 0,$$

$$(\sigma_{3j}^{(\ell,1)}(\mathbf{u}^{(n,1)}) + \sigma_{3j}^{(n,1)}(\mathbf{u}^{(\ell,1)}))_{x_3=-1} = 0,$$

$$(\sigma_{3j}^{(\ell,2)}(\mathbf{u}^{(n,2)}) + \sigma_{3j}^{(n,2)}(\mathbf{u}^{(\ell,2)}))_{x_3=-1} = 0,$$

$$(\sigma_{3j}^{(\ell,3)}(\mathbf{u}^{(n,3)}) + \sigma_{3j}^{(n,3)}(\mathbf{u}^{(\ell,3)}))_{x_3=1} = 0. \quad (5)$$

Таким чином, розв'язок досліджуваної задачі визначається на підставі аналізу рекурентної послідовності крайових задач (2), (4) для першого лінійного наближення та (3), (5) – для другого нелінійного. Найближчими аналогами за різними аспектами розглядуваної проблеми є дослідження, наведені у роботах [11–13, 17, 19].

2. Методика побудови аналітико-числового розв'язку задачі. У задачі про поширення лінійних зсувних хвиль вздовж кристалографічного координатного напрямку у хвилеводі з шару монокристалу класу $m\bar{3}m$ кубічної системи між однотипними півпросторами з монокристалу аналогічного класу анізотропії за умов неідеального ковзного контакту складових розглядуваного хвилеводу комплексні вектор-функції хвильових переміщень $\mathbf{u}^{(\ell,p)}$ у складових V_p характеризуються єдиною ненульовою компонентою $u_2^{(\ell,p)}$, а крайові умови задачі лінійного наближення трансформуються в умови вільних від напружень граничних поверхонь контактуючих тіл. Таким чином, з урахуванням відомого факту про неіснування суто зсувних поверхневих хвиль у пружному півпросторі можна записати такі представлення для комплексних функцій хвильових переміщень $u_2^{(\ell,p)}$ з нормованим безрозмірним амплітудним параметром $u_{2q}^{(0)}$ у симетричних за товщиною шару лінійних локалізованих SH-хвилях із моди з номером j для компоненти V_p розглядуваного хвилеводу:

$$\begin{aligned} u_{2q}^{(\ell,1)} &= u_{2q}^{(0)} \cos(\alpha^{(q)} x_3) e^{-i(\omega t - k_q x_1)}, \\ u_{2q}^{(\ell,2)} &= 0, \quad u_{2q}^{(\ell,3)} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\alpha^{(q)} = q\pi/2$, $q = 0, \dots, \infty$, а дисперсійне співвідношення, що пов'язує їх циклічну частоту ω та хвильове число k_q , має вигляд

$$\left(\frac{(\Omega_1^2 - k_q^2)}{c_{44}^{(1)}} \right)^{1/2} = \frac{q\pi}{2}, \quad \Omega_1^2 = \rho_1 \frac{\omega^2 R_*^2}{c_*}.$$

Побудований далі розв'язок досліджуваної задачі стосується випадків визначення ангармонічних збурень для хвиль з наведених спектрів, що належать модам з дисперсією $q \geq 1$.

Структура представлень (6) далі використовується при визначенні співвідношень задачі пошуку відповідних нелінійних ангармонічних збурень для локалізованих SH-хвиль. У розгорнутій деталізованій формі відповідні співвідношення неоднорідної граничної задачі (3), (5) відносно компонент комплексних векторів напруженості других гармонік для складових V_p в розглядуваному хвилеводі мають вигляд:

$$\begin{aligned} \rho_p \ddot{u}_1^{(n,p)} - c_{11}^{(p)} u_{1,11}^{(n,p)} - c_{44}^{(p)} u_{1,33}^{(n,p)} - \Delta_8^{(p)} u_{3,31}^{(n,p)} &= \Delta_3^{(p)} u_{2,1}^{(\ell,p)} u_{2,11}^{(\ell,p)} + \\ &+ \Delta_6^{(p)} u_{2,1}^{(\ell,p)} u_{2,33}^{(\ell,p)} + (\Delta_6^{(p)} + \Delta_7^{(p)}) u_{2,3}^{(\ell,p)} u_{2,31}^{(\ell,p)}, \\ \rho_p \ddot{u}_2^{(n,p)} - c_{44}^{(p)} (u_{2,11}^{(n,p)} + u_{2,33}^{(n,p)}) &= 0, \\ \rho_p \ddot{u}_3^{(n,p)} - c_{11}^{(p)} u_{3,33}^{(n,p)} - c_{44}^{(p)} u_{3,11}^{(n,p)} - \Delta_8^{(p)} u_{1,13}^{(n,p)} &= \Delta_3^{(p)} u_{2,3}^{(\ell,p)} u_{2,33}^{(\ell,p)} + \\ &+ \Delta_6^{(p)} u_{2,3}^{(\ell,p)} u_{2,11}^{(\ell,p)} + (\Delta_6^{(p)} + \Delta_7^{(p)}) u_{2,1}^{(\ell,p)} u_{2,13}^{(\ell,p)}, \\ c_{44}^{(1)} (u_{1,3}^{(n,1)} + u_{3,1}^{(n,1)})_{x_3=-1} &= -(\Delta_6^{(1)} u_{2,1}^{(\ell,1)} u_{2,3}^{(\ell,1)})_{x_3=-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (c_{12}^{(1)} u_{1,1}^{(n,1)} + c_{11}^{(1)} u_{3,3}^{(n,1)})_{x_3=-1} - (c_{12}^{(2)} u_{1,1}^{(n,2)} + c_{11}^{(2)} u_{3,3}^{(n,2)})_{x_3=-1} = \\
& = \frac{1}{2} (\Delta_7^{(2)} \cdot (u_{2,1}^{(\ell,2)})^2 + \Delta_3^{(2)} (u_{2,3}^{(\ell,2)})^2)_{x_3=-1} - \\
& - \frac{1}{2} (\Delta_7^{(1)} (u_{2,1}^{(\ell,1)})^2 + \Delta_3^{(1)} (u_{2,3}^{(\ell,1)})^2)_{x_3=-1}, \\
& (u_j^{(n,1)})_{x_3=-1} - (u_j^{(n,2)})_{x_3=-1} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \tag{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_{44}^{(1)} (u_{1,3}^{(n,1)} + u_{3,1}^{(n,1)})_{x_3=1} = -(\Delta_6^{(1)} u_{2,1}^{(\ell,1)} u_{2,3}^{(\ell,1)})_{x_3=1}, \\
& (c_{12}^{(1)} u_{1,1}^{(n,1)} + c_{11}^{(1)} u_{3,3}^{(n,1)})_{x_3=1} - (c_{12}^{(3)} u_{1,1}^{(n,3)} + c_{11}^{(3)} u_{3,3}^{(n,3)})_{x_3=1} = \\
& = \frac{1}{2} (\Delta_7^{(3)} (u_{2,1}^{(\ell,3)})^2 + \Delta_3^{(3)} (u_{2,3}^{(\ell,3)})^2)_{x_3=1} - \\
& - \frac{1}{2} (\Delta_7^{(1)} (u_{2,1}^{(\ell,1)})^2 + \Delta_3^{(1)} (u_{2,3}^{(\ell,1)})^2)_{x_3=1}, \\
& (u_j^{(n,1)})_{x_3=1} - (u_j^{(n,3)})_{x_3=1} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \tag{8}
\end{aligned}$$

У співвідношеннях (7), (8) введено такі позначення:

$$\begin{aligned}
\Delta_1^{(p)} &= 3c_{11}^{(p)} + c_{111}^{(p)}, & \Delta_2^{(p)} &= c_{12}^{(p)} + 2c_{44}^{(p)} + c_{155}^{(p)}, & \Delta_3^{(p)} &= c_{11}^{(p)} + c_{155}^{(p)}, \\
\Delta_4^{(p)} &= c_{44}^{(p)} + c_{155}^{(p)}, & \Delta_5^{(p)} &= c_{12}^{(p)} + c_{112}^{(p)}, & \Delta_6^{(p)} &= c_{44}^{(p)} + c_{456}^{(p)}, \\
\Delta_7^{(p)} &= c_{12}^{(p)} + c_{144}^{(p)}, & \Delta_8^{(p)} &= c_{12}^{(p)} + c_{44}^{(p)}.
\end{aligned}$$

З аналізу структури крайової задачі (7), (8) апіорі впливає, що другими гармоніками досліджуваних лінійних локалізованих SH-хвиль є хвилі P-SV типу. Компоненти $u_j^{(n,p)}$, $j = 1, 3$, комплексного вектора напруженості других гармонік визначаються зі співвідношень крайової задачі (7), (8) в аналітичній формі методами комп'ютерної алгебри. При цьому другі гармоніки досліджуваних хвиль для матеріалу пружного шару ($p = 1$) подаються у вигляді суми часткового та загального розв'язків диференціальних рівнянь відповідної неоднорідної крайової задачі, а для півпросторів ангармонічне збурення описується лише загальним розв'язком задачі для системи однорідних диференціальних рівнянь.

У підсумку, представлення для пружних хвильових переміщень $u_j^{(n,p)}$, $j = 1, 3$, у нелінійних других гармоніках досліджуваних хвиль за структурою мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
u_1^{(n,1)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\lambda}_{11} \cos(\zeta_1^{(1)} x_3) + \tilde{\lambda}_{12} \cos(\zeta_2^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{11} \sin(\zeta_1^{(1)} x_3) + \\
& + \tilde{\mu}_{12} \sin(\zeta_2^{(1)} x_3) + v_1 + \chi_1 \cos(2\alpha^{(1)} x_3) + \\
& + \xi_1 \sin(2\alpha^{(1)} x_3)) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \\
u_3^{(n,1)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\lambda}_{31} \sin(\zeta_1^{(1)} x_3) + \tilde{\lambda}_{32} \sin(\zeta_2^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{31} \cos(\zeta_1^{(1)} x_3) + \\
& + \tilde{\mu}_{32} \cos(\zeta_2^{(1)} x_3) + v_3 + \chi_3 \sin(2\alpha^{(1)} x_3) + \\
& + \xi_3 \cos(2\alpha^{(1)} x_3)) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \\
u_1^{(n,2)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{11}^{(2)} \exp(\zeta_1^{(2)} x_3) + \tilde{\beta}_{12}^{(2)} \exp(\zeta_2^{(2)} x_3)) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \\
u_3^{(n,2)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{31}^{(2)} \exp(\zeta_1^{(2)} x_3) + \tilde{\beta}_{32}^{(2)} \exp(\zeta_2^{(2)} x_3)) \exp(-2i(\omega t - kx_1)).
\end{aligned}$$

Коефіцієнти $\tilde{\lambda}_{ij}$, $\tilde{\mu}_{ij}$, $\tilde{\beta}_{ij}^{(p)}$ у поданні загального розв'язку та коефіцієнти ν_i , χ_i , ξ_i у поданні часткового розв'язку отримано в аналітичній формі методами комп'ютерної алгебри і мають вкрай складний вигляд.

3. Результати числових досліджень. Аналіз окремих властивостей кінематичних характеристик нелінійних других гармонік досліджуваних локалізованих хвиль реалізовано для випадку хвилеводу з шару V_1 монокристалу германію, розміщеного між півпросторами V_2 і V_3 з монокристалу кремнію. Фізико-механічні властивості складових характеризуються такими незалежними фізико-механічними сталими [1]

– монокристал германію:

$$\begin{aligned} c_{11}^{(1)} &= 12.92c_*, & c_{12}^{(1)} &= 4.79c_*, & c_{44}^{(1)} &= 6.70c_*, \\ c_{111}^{(1)} &= -71.00c_*, & c_{112}^{(1)} &= -38.90c_*, & c_{123}^{(1)} &= -1.80c_*, \\ c_{144}^{(1)} &= -2.30c_*, & c_{456}^{(1)} &= -5.30c_*, & c_{155}^{(1)} &= -29.20c_*, \\ \rho_1 &= 5.32\rho_*, \end{aligned}$$

– монокристал кремнію:

$$\begin{aligned} c_{11}^{(2)} &= 16.70c_*, & c_{12}^{(2)} &= 7.90c_*, & c_{44}^{(2)} &= 6.50c_*, \\ c_{111}^{(2)} &= -82.50c_*, & c_{112}^{(2)} &= -45.10c_*, & c_{123}^{(2)} &= -6.40c_*, \\ c_{144}^{(2)} &= 1.20c_*, & c_{456}^{(2)} &= -6.40c_*, & c_{155}^{(2)} &= -31.00c_*, \\ \rho_2 &= 2.33\rho_*. \end{aligned}$$

Параметри нормування вибрано такими: $c_* = 10^{10}$ Па, $\rho_* = 10^3$ кг/м³.

Для з'ясування низки властивостей досліджуваних нелінійних хвильових ефектів здійснено розрахунки розподілів нормованих амплітуд пружних зсувних хвильових коливань $|u_2^{(\ell)}|/u_2^{(0)}$ в лінійних локалізованих у шарі SH-хвилях і розподілів відповідних характеристик $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ для їх других гармонік уздовж товщинної координати x_3 хвилеводу у зоні, яка містить область шару $x_3/h \in [-1, 1]$, та області $x_3/h \in [-5, -1) \cup (1, 5]$ у півпросторах.

Нормовані функції інтенсивності зсувних коливань $|u_2^{(\ell)}|/u_2^{(0)}$ та інтенсивності нелінійних ангармонічних збурень $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ відповідно зображено на рис. 1 і на рис. 2 – рис. 5 для хвиль нормованих частот $\Omega(k_q) \in \{2.5, 5.0, 7.0, 10.0\}$, які належать до гілки $q = 1$ дисперсійного спектру.

Варто підкреслити, що амплітуди нелінійних других гармонік пропорційні до квадрата нормуючого множника $u_2^{(0)}$, який для локалізованих SH-хвиль з реальними параметрами інтенсивності при $\delta \ll 1$ є малою величиною. Отже, наявний рівень нелінійних ангармонічних ефектів можна оцінити при заданні конкретного значення малої амплітуди лінійної локалізованої SH-хвилі.

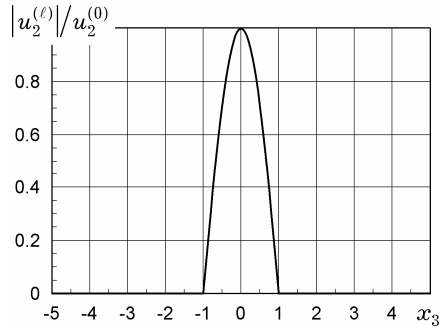


Рис 1. Розподіл $|u_2^{(\ell)}|/u_2^{(0)}$ за товщиною шару в локалізованих зсувних хвилях моди $q = 1$.

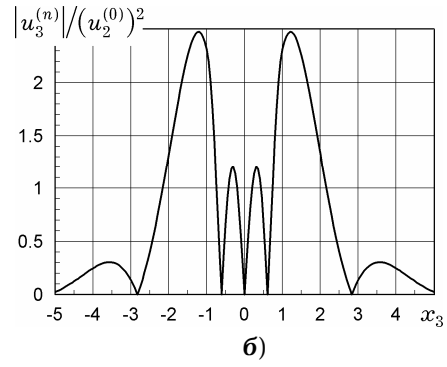
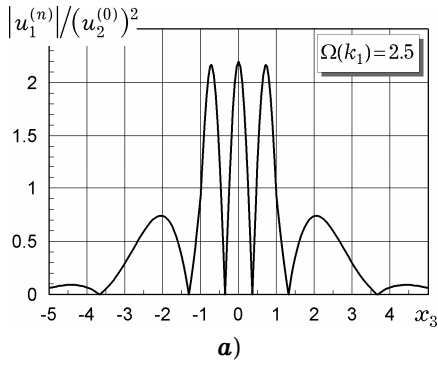


Рис. 2. Розподіл нормованих значень $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ при $\Omega(k_1) = 2.5$.

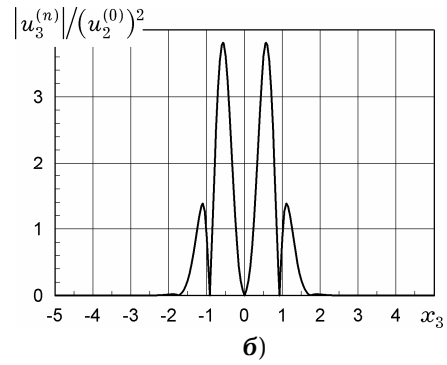
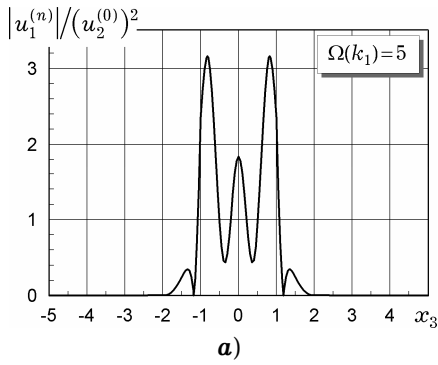


Рис. 3. Розподіл нормованих значень $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ при $\Omega(k_1) = 5$.

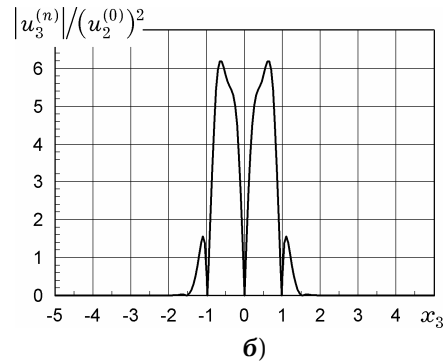
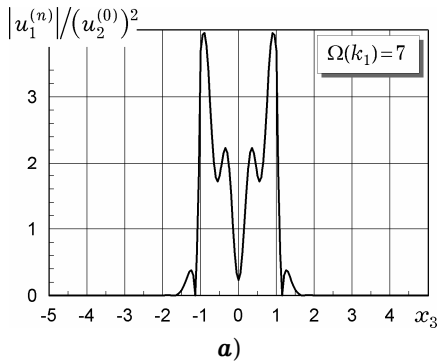


Рис. 4. Розподіл нормованих значень $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ при $\Omega(k_1) = 7$.

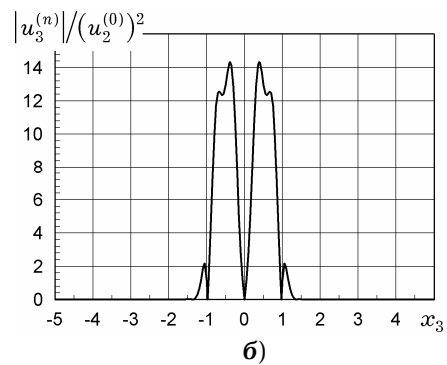
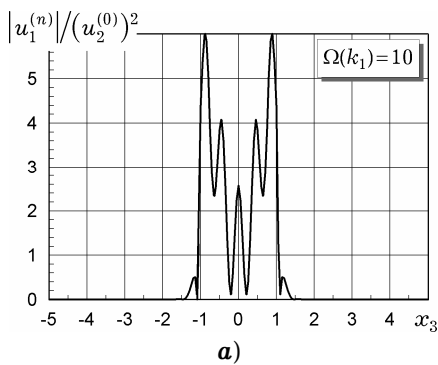


Рис. 5. Розподіл нормованих значень $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ при $\Omega(k_1) = 10$.

З аналізу наведених розподілів випливає декілька висновків. По-перше, зіставлення характеристик $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ засвідчує, що відносні показники інтенсивності других гармонік незначно збільшуються з ростом частотного параметра Ω розглядуваної хвилі, і при цьому показник максимуму відносної інтенсивності компоненти $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ (SV-складової нелінійного ангармонічного збурення) в усьому досліджуваному частотному діапазоні є більшим, ніж показник максимуму $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$. Зазначені максимуми інтенсивності для розглядуваного хвилеводу при варіюванні частотного параметра спостерігаються у різних точках уздовж товщини шару V_1 , а розподіли інтенсивностей хвильових рухів за поперечною координатою у півпросторах є повністю характерними для поверхневих (локалізованих біля контактної поверхні) пружних хвиль. Ступінь локалізації других гармонік у півпросторах, як свідчать наведені розподіли, також стає більш вираженим зі зростанням частоти хвиль.

Стосовно форм розподілів хвильових переміщень у других гармоніках уздовж координати x_3 можна зазначити, що вони характеризують ефекти локалізації хвильових переміщень у шарі поблизу граничної контактної поверхні та вказують на суттєві осциляції показників інтенсивності ангармонічних збурень у серединній частині шару при варіюванні частоти. Зазначені осциляції є менш вираженими для компоненти $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$.

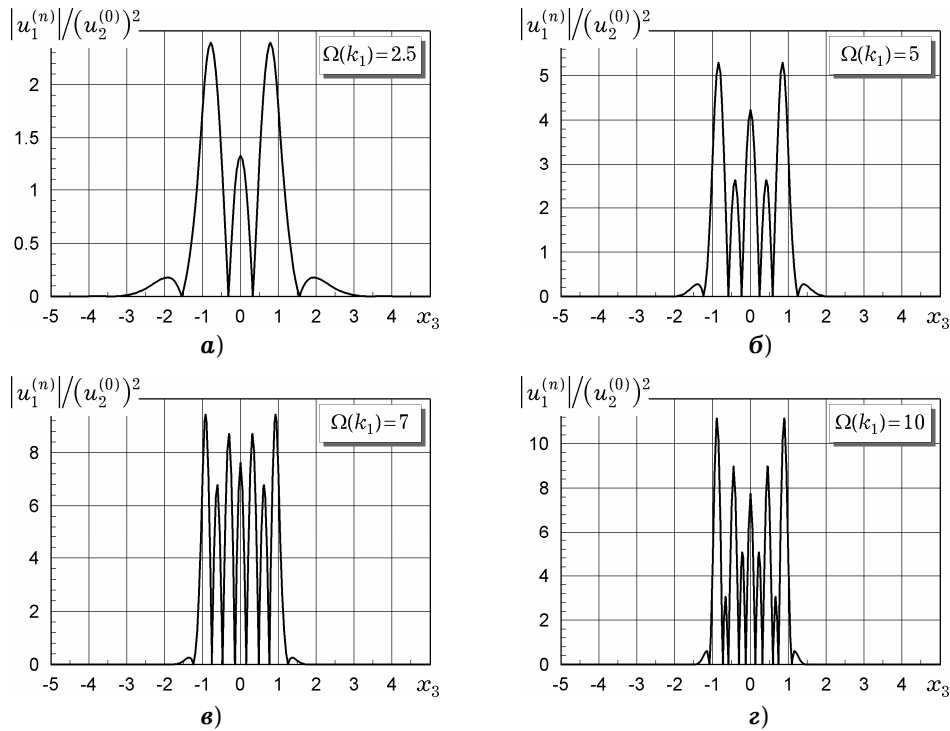


Рис. 6. Розподіл нормованих значень $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ для різних значень $\Omega(k_1)$ (без проковзування).

Якісним ефектом для досліджуваного варіанта задачі порівняно з випадком ідеального механічного контакту між шаром та півпросторами є ситуація повної локалізації лінійної зсувної хвилі у шарі і повна відсутність хвильових рухів у півпросторах. Проте врахування геометричної та фізичної нелінійності для хвилеводу із ковзним контактом його складових засвідчує і для даного випадку існування хвильових рухів подвійної частоти у півпросторах з локалізацією біля контактних поверхонь.

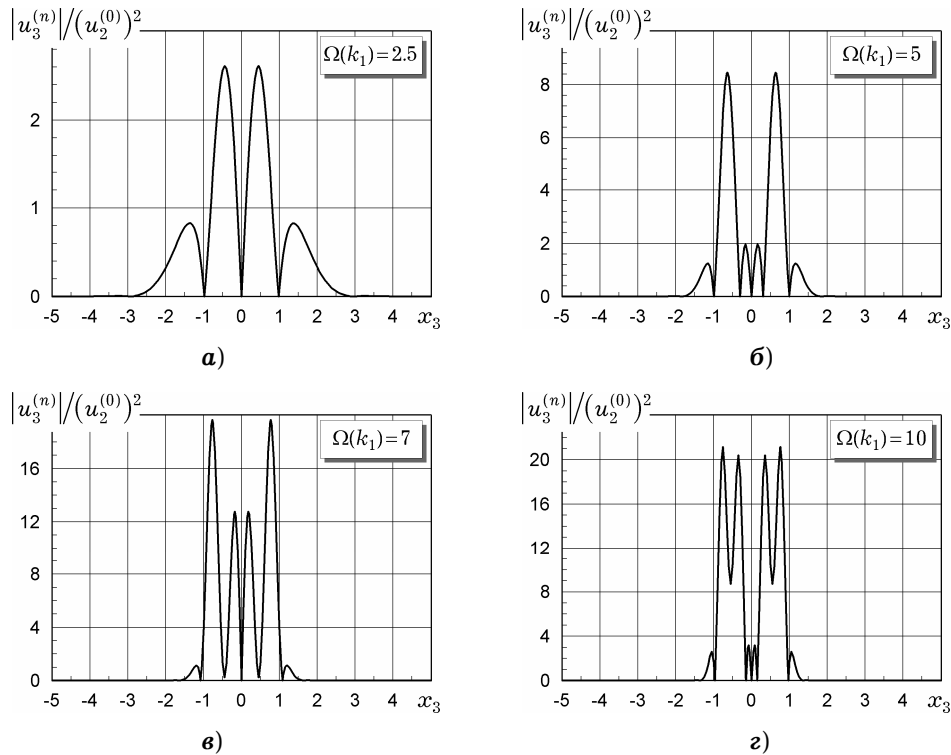


Рис. 7. Розподіл нормованих значень $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ для різних значень $\Omega(k_1)$ (без проковзування).

Кількісні ефекти впливу розглядуваного типу крайових умов на контактних поверхнях порівняно з дослідженим у роботі [9] випадком ідеального механічного контакту складових хвилеводу можна частково проаналізувати на основі співставлення розподілів на рис. 2 – рис. 5 з відповідно розрахованими розподілами для хвилеводу при відсутності проковзування складових (див. рис. 6, рис. 7). Порівняння розподілів свідчить, що при відносно малому значенні частотного параметра $\Omega(k_1) = 2.5$ інтенсивності ангармонічних збурень їх форми та співвідношення компонент $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ і $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ для хвилеводу з ідеальним механічним контактом складових мало відрізняються від досліджуваного випадку, за винятком більшої кількості осциляцій у формі $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$. Але при зростанні значень частотного параметра $\Omega(k_1)$ максимальна інтенсивність других гармонік у хвилеводі з ідеальним механічним контактом складових збільшується приблизно удвічі зі збереженням приблизного співвідношення максимумів $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ та $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$.

Характерними є також більш виражений ступінь локалізації хвильових рухів у шарі при однакових частотах у випадку хвилеводу з ідеальним механічним контактом складових та істотне збільшення у цьому випадку кількості осциляцій у формах розподілів $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ та $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$. Коливання функцій $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ зі збільшенням частоти $\Omega(k_1)$ істотно ущільнюються у зоні шару порівняно з задачею про неідеальний контакт.

1. Блистанов А. А., Бондаренко В. С., Переломова Н. В. и др. Акустические кристаллы: Справочник / Под ред. М. П. Шаскольской. – Москва: Наука, 1982. – 632 с.
2. Жоголева Н. В. Вторые гармоники волн Лява в анизотропных слое на полупространстве при жестком закреплении или мембранном покрытии внешней грани // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2013. – № 2. – С. 44–50.
3. Жоголева Н. В., Сторожев В. И. Нелинейное ангармоническое взаимодействие поверхностных волн Лява в анизотропном слое на анизотропном полупространстве // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2012. – № 1. – С. 56–63.
4. Красильников В. А., Лямов В. Е. Нелинейное взаимодействие упругих волн в кристаллах и обработка сигнальной информации // Акуст. журн. – 1973. – 19, № 5. – С. 801–804.
5. Леманов В. В., Смоленский Г. А. Нелинейные эффекты при распространении высокочастотных упругих волн в кристаллах // Акуст. журн. – 1974. – 20, № 3. – С. 426–434.
6. Лямов В. Е. Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 224 с.
7. Руцицкий Я. Я. Особливості розвитку теорії пружних нелінійних хвиль // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – 46, № 3. – С. 90–105.
8. Руцицкий Я. Я., Хотенко Е. А. О волне Рэя в квадратично нелинейном упругом полупространстве (модель Мурнагана) // Прикл. механика. – 2011. – 47, № 3. – С. 50–58.
 The same: *Rushchitsky, J. J., Khotenko, E. A. Rayleigh wave in a quadratic nonlinear elastic half-space (Murnaghan model) // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, No. 3. – P. 268–275.*
9. Сторожев В. И., Щербак Н. В. Анализ нелинейных ангармонических возмущений для упругих SH-волн, локализованных в кристаллическом слое между анизотропными полупространствами // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2009. – 19. – С. 234–243.
10. Сторожев В. И., Щербак Н. В. Нелинейные вторые гармоники обобщенных волн Лява в анизотропном слое на анизотропном полупространстве // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2008. – № 2. – С. 75–80.
11. Chattopadhyay A., Gupta S., Kumari P., Sharma V. K. Torsional wave propagation in non-homogeneous layer between non-homogeneous half-spaces // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. – 2013. – 37, No. 10. – P. 1280–1291.
12. Ferreira E. R., Boulanger Ph., Destrade M. Large amplitude Love waves // Q. J. Mech. Appl. Math. – 2008. – 61, No. 3. – P. 353–371.
13. Kumon R. E., Hamilton M. F. Directional dependence of nonlinear surface acoustic waves in the (001) plane of cubic crystals // J. Acoust. Soc. Am. – 2002. – 111, No. 5. – P. 2060–2069.
14. Kurenayaya K. I., Storozhev V. I. Analyses of nonlinear ultraacoustic wave properties in germanium monocrystal // J. Comput. Appl. Mech. (JCAMECH). – 2005. – 6, No. 1. – P. 67–82.
15. Kurenayaya K. I., Storozhev V. I. Nonlinear acoustic effects while spreading of the normal waves in anisotropic elastic layer // In: Proc. 10th International Congress on Sound and Vibration (Stockholm, Sweden, 7–10 July 2003). – Stockholm: IAV, 2003. – Vol. 7. – P. 3605–3612.
16. Kurenayaya K. I., Storozhev V. I. Propagation of nonlinear ultraacoustic waves in lamina of cubical system // In: Euronoise 2003: 5th European Conference on Noise Control: AIA 2003: XXX Congress of the Acoustical Society of Italy (19–21 May 2003), Naples, Italy): Abstracts. – AIA, 2003. – 89, suppl. 1. – P. 123–124.
17. Niklasson A. J., Datta S. K., Dunn M. L. On ultrasonic guided waves in a thin anisotropic layer lying between two isotropic layers // J. Acoust. Soc. Am. – 2000. – 108, No. 5, Pt. 1. – P. 2005–2011.
18. Rushchitsky J., Cattani C., Sinchilo S. Cubic nonlinearity in elastic materials: Theoretical prediction and computer modelling of new wave effects // Math. Comp. Model. Dynam. Syst. – 2004. – 10, No. 3–4. – P. 331–352.
19. Sadler J., O'Neill B., Maev R. G. Ultrasonic wave propagation across a thin nonlinear anisotropic layer between two half-spaces // J. Acoust. Soc. Am. – 2005. – 118, No. 1. – P. 51–59.
20. Storozhev V. I., Kuslivaya A. A. Nonlinear anharmonic effects for normal waves in monocrystal anisotropic germanium layer with flexible not extensible coverings of sides // In: Proc. 9th Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications (December 17–20, 2007), Łódź, Poland. – 2007. – Vol. 1. – P. 433–440.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВТОРЫЕ ГАРМОНИКИ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ВОЛН СДВИГА В АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ МЕЖДУ АНИЗОТРОПНЫМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ ПРИ УСЛОВИИ НЕИДЕАЛЬНОГО КОНТАКТА

Построено численно-аналитическое решение задачи о генерации нелинейных вторых гармоник при распространении упругих симметричных локализованных волн сдвига в кристаллическом слое класса $m\bar{3}m$ кубической системы, расположенном между однотипными кристаллическими полупространствами аналогичного класса анизотропии, в случае неидеального проскальзывающего контакта составляющих волновода. Определена аналитическая форма функций волновых перемещений для нелинейных ангармонических возмущений, которые являются волнами продольно-сдвигового типа, и выполнены численные исследования амплитудно-частотных характеристик вторых гармоник для монохроматических локализованных волн в слое из монокристалла германия между полупространствами из монокристалла кремния.

NONLINEAR SECOND HARMONICS OF LOCALIZED SHEAR WAVES IN ANISOTROPIC LAYER BETWEEN ANISOTROPIC HALF-SPACES UNDER CONDITION OF IMPERFECT CONTACT

An numerical-analytical solution of the problem of generation of the nonlinear second harmonics at the propagation of elastic symmetric localized shear waves in a crystal layer of $m\bar{3}m$ class of cubic system which is placed between crystal half-spaces of the same anisotropy class is constructed under assumption of imperfect slipping contact of the waveguide components. The analytical form of functions of wave motion for nonlinear anharmonic perturbations that are longitudinal-shear type waves is determined. The numerical study of amplitude-frequency characteristics of the second harmonics for monochromatic localized waves in a monocrystal layer from germanium between half-spaces from monocrystal silicon is performed.

Донецьк. нац. ун-т ім. В. Стуса, Вінниця,
Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ

Одержано
01.04.16