УДК 539.3

Ю. В. Немировский[1], А. И. Бабин[2]

СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ. II. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

Получена система нелинейных неклассических дифференциальных уравнений связанной термоупругости для слоистых композитных анизотропных оболочек вращения в системе координат, связанной с линиями кривизн отсчетной поверхности. Построенные неклассическая модель деформирования слоистой оболочки и нелинейная модель распределения теплового потока по толщине оболочки позволяют учесть поперечные сдвиговые деформации, обеспечить условия механического и теплового сопряжения слоев и условия термомеханического нагружения на лицевых поверхностях оболочки. Выведены линеаризованные дифференциальные уравнения осесимметричной связанной задачи термоупругости конической армированной слоистой оболочки. Решена квазистатическая задача термоупругости двухслойной цилиндрической оболочки, перекрестно армированной в направлении винтовых линий. С использованием структурного подхода к установлению критериев прочности композитных материалов определены нагрузки начального разрушения связующего и армирующих элементов металлокомпозитной двухслойной цилиндрической оболочки.

Введение. Прикладным задачам термоупругости тонкостенных анизотропных слоистых пластин и оболочек в последнее время уделяется повышенное внимание. В первую очередь, это связано с использованием новых композитных материалов при проектировании несущих элементов ответственных инженерных конструкций и сооружений, применяемых в современной авиационной и ракетной технике, судостроении, энергетическом и химическом машиностроении и т. д.

Практика проектирования таких конструкций и сооружений, выдвигая многочисленные сложные проблемы их термопрочности, термовыпучивания, динамики, активно стимулирует дальнейшую разработку теории термоупругости.

Библиографию статей, связанных с различными аспектами теории и применения тонкостенных конструкций можно посмотреть в работах [15, 16]. Последние достижения в этом направлении изложены в [5, 6, 8, 9, 11, 13, 14, 17–19].

Ввиду актуальности этой проблемы необходимы дальнейшие исследования в данной области механики деформируемого твердого тела.

Построение замкнутой системы дифференциальных уравнений и соответствующих им краевых и начальных условий взаимосвязанной неклассической задачи термоупругого деформирования слоистых полиармированных композитных оболочек и пластин было выполнено в первой части этого исследования [10].

Эта система включает следующие зависимости:

– физические соотношения

$$\bar{\sigma}^{\alpha\beta}_{(k)} = \sum_{\ell=1}^{\ell_k} \left[\omega_z^{(k\ell)} (\Omega_z^{(k)})^{-1} A^{\alpha\beta\lambda\mu}_{(k\ell)} \right] \bar{\varepsilon}^{(k)}_{\lambda\mu} - \sum_{\ell=1}^{\ell_k} \left[\omega_z^{(k\ell)} (\Omega_z^{(k)})^{-1} \beta^{\alpha\beta}_{t(k\ell)} \right] \bar{T}_{(k)} ,$$

$$\tau^{(k)}_{3\alpha} = p^{\alpha\beta}_{(k)} \gamma^{(k)}_{\beta 3} , \qquad \gamma^{(k)}_{\alpha 3} = q^{(k)}_{\alpha\beta} \tau^{\beta 3}_{(k)} ; \tag{1}$$

– закон распределения поперечных компонент тензора деформаций по толщине оболочки

$$\overset{\circ}{\gamma}{}^{(k)}_{\alpha 3} = \overset{\circ}{q}{}^{(k)}_{\alpha\beta} \left[\tau_0^{3\beta} + z h^{-1} \left(\overset{\circ}{\tau}{}^{3\beta}_h - \tau_0^{3\beta} \right) + F'(z) \pi^\beta \right], \qquad \overset{\circ}{\varepsilon}{}^{(k)}_{33} = 0 ; \tag{2}$$

– выражение для компонент $\varepsilon^{(k)}_{\alpha\beta}$ тензора тангенциальной деформации

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} = (\delta_\alpha^\tau - zb_\alpha^\tau)\nabla_\beta \lambda_\tau^{\circ(k)} + (\delta_\beta^\tau - zb_\beta^\tau)\nabla_\alpha \lambda_\tau^{\circ(k)} + (\delta_\alpha^\tau - zb_\alpha^\tau)\nabla_\beta u_\tau +$$
$$+ (\delta_\beta^\tau - z\,b_\beta^\tau)\nabla_\alpha u_\tau + z(\delta_\alpha^\tau - zb_\alpha^\tau)\nabla_\beta \eta_\tau + z(\delta_\beta^\tau - z\,b_\beta^\tau)\nabla_\alpha \eta_\tau +$$
$$+ (\delta_\alpha^\tau - z\,b_\alpha^\tau)\mu_{\tau\sigma}^{\circ(k)}\nabla_\beta \pi^\sigma + (\delta_\beta^\tau - z\,b_\beta^\tau)\mu_{\tau\sigma}^{\circ(k)}\nabla_\alpha \pi^\sigma +$$
$$+ (\delta_\alpha^\tau - zb_\alpha^\tau)\left(\nabla_\beta \mu_{\tau\sigma}^{\circ(k)}\right)\pi^\sigma + (\delta_\beta^\tau - zb_\beta^\tau)\left(\nabla_\alpha \mu_{\tau\sigma}^{\circ(k)}\right)\pi^\sigma -$$
$$- 2(b_{\alpha\beta} - zb_\alpha^\tau b_{\tau\beta})w + (\delta_\alpha^\tau - zb_\alpha^\tau)(\delta_\beta^\sigma - zb_\beta^\sigma)\eta_\tau\eta_\sigma; \qquad (3)$$

– закон распределения компонент вектора перемещений по толщине пакета слоев

$$v_3^{\circ(k)} = w(x^1, x^2), \quad v_\alpha^{\circ(k)} = u_\alpha(x^1, x^2) + z\eta_\alpha(x^1, x^2) + \psi_\alpha^{\circ(k)}(x^1, x^2, z),$$
$$u_\alpha = v_\alpha\big|_{z=0}, \qquad \eta_\alpha = -\nabla_\alpha w - b_\alpha^\beta u_\beta; \qquad (4)$$

– закон распределения температуры по толщине оболочки

$$T^{(k)} = \Theta^{(k)} + f(z)\Pi, \qquad z_k \le z \le z_{k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m; \qquad (5)$$

– аналитическое выражение для функций $\Theta^{(k)}$

$$\Theta^{(k)} = \Phi_{(k)} - \bar{S}_{k-2} + \left(K_\lambda^{(k)}\varphi - \frac{1}{\Lambda_{(33)}^{(k)}}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{W_T'^{(j)}(z_{j+1})}{\vartheta'(z_{j+1})}\right)[\vartheta(z) - \vartheta(z_k)] -$$
$$- W_T^{(k)}(z), \qquad z_k \le z \le z_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \qquad (6)$$

где

$$\Phi_{(k)} = \frac{Q_3}{Q_2} + \varphi\left(S_{k-1} - \frac{Q_1}{Q_2}\vartheta'(z_1)\right), \qquad K_\lambda^{(k)} = \frac{\Lambda_{(33)}^{(1)}}{\Lambda_{(33)}^{(k)}}, \qquad Q_2 \ne 0,$$
$$\bar{S}_{k-2} = \sum_{j=1}^{k-2}\left\{\frac{1}{\Lambda_{(33)}^{(j+1)}}\left[\vartheta(z_{j+2}) - \vartheta(z_{j+1})\right]\sum_{i=1}^{j}\frac{W_T'^{(j)}(z_{i+1})}{\vartheta'(z_{i+1})}\right\} + \sum_{j=1}^{k-1}W_T^{(j)}(z_{j+1}),$$
$$\bar{\varphi} = P_2\bar{S}_{m-1} + P_1\left[\frac{\vartheta'(z_{m+1})}{\Lambda_{(33)}^{(m)}}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{W_T'^{(j)}(z_{j+1})}{\vartheta'(z_{j+1})} - W_T'^{(m)}(z_{m+1})\right],$$
$$S_{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1}K_\lambda^{(j)}\left[\vartheta(z_{j+1}) - \vartheta(z_j)\right], \quad \varphi = \frac{P_3 - P_2Q_3Q_2^{-1} + \bar{\varphi}}{P_1K_\lambda^{(m)}\vartheta'(z_{m+1}) + P_2\left[S_m - \vartheta'(z_1)Q_1Q_2^{-1}\right]},$$
$$\vartheta(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{E}}\ln\left|\dfrac{Kz - H - \sqrt{E}}{Kz - H + \sqrt{E}}\right|, & K \ne 0, \quad E > 0, \\ -\left(Kz - H\right)^{-1}, & K \ne 0, \quad E = 0, \\ \ln|1 - 2Hz|, & K = 0, \quad E > 0, \\ z, & K = 0, \quad E = 0, \end{cases}$$
$$W_T^{(k)}(z) = \frac{1}{\Lambda_{(33)}^{(k)}}\int_{z_k}^{z}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\int_{z_k}^{z}w_T^{(k)}\sqrt{\frac{g}{a}}\,d\zeta\right]d\zeta;$$

– уравнения движения

$$\ddot{X}^\beta - b_\alpha^\beta\ddot{Y}^\alpha - \nabla_\alpha\mathbf{T}^{\alpha\beta} + b_\lambda^\beta\nabla_\alpha\mathbf{M}^{\alpha\lambda} - b_\alpha^\beta H^{\alpha\lambda}\eta_\lambda = \tau_+^{3\beta} - \tau_0^{3\beta} - h\,b_\lambda^\beta\,\tau_+^{3\lambda},$$
$$\ddot{I} + \nabla_\beta\ddot{Y}^\beta - b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} - \nabla_\beta\nabla_\alpha M^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha\left(H^{\alpha\beta}\eta_\beta\right) =$$
$$= \sigma_+^{33} - \sigma_0^{33} + \left(\tau_0^{3\beta} - \tau_+^{3\beta}\right)\eta_\beta + h\nabla_\beta\tau_+^{3\beta},$$
$$\ddot{Z}^\beta - \nabla_\alpha S^{\alpha\beta} + Q^\beta = \tau_{3\alpha}^{+}\,\mu_{(m)}^{\circ\alpha\beta}(x^1, x^2, h); \qquad (7)$$

– уравнение относительно искомой функции $\Pi(x^1, x^2, \tau)$, учитывающей нелинейное распределение температуры на отсчетной поверхности:

$$\bar{C}\frac{\partial\Pi}{\partial\tau} - \nabla_\alpha \bar{\lambda}^{\alpha\beta}\nabla_\beta \Pi + \bar{\lambda}^{33}\Pi + \bar{E}\Pi - \nabla_\alpha \bar{\lambda}^{\alpha} + \bar{\bar{C}} + \bar{\bar{E}} = 0\,, \tag{8}$$

где

$$\bar{\bar{E}} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}} \Theta^{(k)}\beta_{t(ij)}^{(k)}\dot{\varepsilon}_{(ij)}^{(k)} f(z)\sqrt{\frac{g}{a}}\,dz, \quad \bar{E} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}} \beta_{t(ij)}^{(k)}\dot{\varepsilon}_{(ij)}^{(k)} f^2(z)\sqrt{\frac{g}{a}}\,dz\,,$$

$$\bar{\lambda}^{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}} \Lambda_{(k)}^{\alpha\beta} f^2(z)\sqrt{\frac{g}{a}}\,dz, \qquad \bar{\lambda}^{\alpha} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}} \Lambda_{(k)}^{\alpha\beta}\frac{\partial\Theta^{(k)}}{\partial x^\beta} f(z)\sqrt{\frac{g}{a}}\,dz\,,$$

$$\bar{\lambda}^{33} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}} \Lambda_{(k)}^{33}[f'(z)]^2\sqrt{\frac{g}{a}}\,dz\,,$$

$$Q_{(\nu)} = \int_0^h (1 + zk_s)\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}^{\Sigma} f(z)\,dz, \qquad Q_{(s)} = \int_0^h (1 + zk_s)\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{q}^{\Sigma} f(z)\,dz\,,$$

$$\bar{\lambda}_{(\nu\nu)} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}} (1 + zk_s)\Lambda_{(\nu\nu)}^{(k)} f^2(z)\,dz, \quad \bar{\lambda}_{(\nu s)} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}} (1 + zk_s)\Lambda_{(\nu s)}^{(k)} f^2(z)\,dz\,,$$

$$\bar{\bar{\lambda}}_{(\nu\nu)} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}} (1 + zk_s)\Lambda_{(\nu\nu)}^{(k)}\nabla_\nu\Theta^{(k)} f(z)\,dz\,,$$

$$\bar{\bar{\lambda}}_{(\nu s)} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}} (1 + zk_s)\Lambda_{(\nu s)}^{(k)}\nabla_s\Theta^{(k)} f(z)\,dz, \quad \bar{\lambda}_{(\nu s)} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}} \Lambda_{(\nu s)}^{(k)} f^2(z) z\,dz\,,$$

$$\bar{\lambda}_{(ss)} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}} \Lambda_{(ss)}^{(k)} f^2(z)\, z\,dz, \qquad \bar{\bar{\lambda}}_{(s\nu)} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}} \Lambda_{(s\nu)}^{(k)}\nabla_\nu\Theta^{(k)} f(z)\, z\,dz\,,$$

$$\bar{\bar{\lambda}}_{(ss)} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}} \Lambda_{(ss)}^{(k)}\nabla_s\Theta^{(k)} f(z)\, z\,dz\,,$$

здесь $Q_{(\nu)}$, $\bar{\lambda}_{(\nu\nu)}$, …, $\bar{\bar{\lambda}}_{(s\nu)}$, $\bar{\bar{\lambda}}_{(ss)}$ – физические составляющие соответствующих векторов и тензоров в системе координат ℓ_s, ℓ_ν, связанной с контуром Γ; $\mathbf{q}^{\Sigma} = \mathbf{q}^{\Sigma}(\ell, z, \tau)$ – заданный вектор плотности теплового потока через боковую поверхность Σ оболочечного элемента;

– граничные условия, требующие задания в каждой точке контура Γ значений семи величин, альтернативно выбираемых из следующих семи пар:

$$\left(\mathrm{T}_{\nu s} - k_s\mathbf{M}_{\nu s},\ u_s\right), \quad \left(\mathbf{T}_{\nu\nu} + \tau_s\mathbf{M}_{\nu s},\ u_\nu\right), \quad \left(\mathbf{M}_{\nu\nu},\ \eta_\nu\right),$$

$$\left(\nu_\alpha\nabla_\beta\mathbf{M}^{\beta\alpha} + \partial M_{\nu s}/\partial\ell_s - \mathbf{H}_{\nu s}\eta_s - \mathbf{H}_{\nu\nu}\eta_\nu - \ddot{\mathrm{Y}}_\nu,\ w\right),$$

$$\left(\mathbf{S}_{\nu s},\ \pi_s\right), \quad \left(\mathbf{S}_{\nu\nu},\ \pi_\nu\right), \quad \left(\nu_\alpha\left(\Phi^{\alpha\beta}\nabla_\beta\Pi + \Psi^\alpha\right),\ \Pi\right); \tag{9}$$

– начальные условия для системы дифференциальных уравнений (7), (8):

$$u_\alpha\big|_{t=0} = u_\alpha^0, \quad \left.\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{u}_\alpha^0, \quad w\big|_{t=0} = w^0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{w}^0,$$

$$\pi_\alpha\big|_{t=0} = \pi_\alpha^0, \quad \left.\frac{\partial \pi_\alpha}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{\pi}_\alpha^0, \quad \Pi\big|_{t=0} = \Pi^0. \tag{10}$$

Выражения для входящих в (1)−(10) величин здесь не приводятся в связи с ограничениями на объем статьи. Заинтересованный читатель может найти их в работе [10].

Установленные уравнения допускают ряд предельных переходов. Так, например, опустив в уравнениях (3), (7) и краевых условиях (9) нелинейные слагаемые, получим уравнения линейной неклассической теории, пригодные для изучения напряженно-деформированного состояния оболочек при малых прогибах. Другой предельный переход $q_{\alpha\beta}^{(k)} \to 0 \quad (p_{(k)}^{\alpha\beta} \to \infty)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, приводит к уравнениям классической теории оболочек, основанной на постулате о недеформируемости нормалей.

Целью этой работы является построение уравнений термоупругости многослойных оболочек вращения в системе координат, связанной с линиями кривизн отсчетной поверхности для частных канонических форм.

1. Уравнение термоупругости многослойных армированных оболочек вращения в системе координат, связанной с линиями кривизн поверхности. Рассмотрим оболочку постоянной толщины $h = \sum\limits_{k=1}^{m} h_k$, состоящую из m эквидистантных полиармированных слоёв (ПАС) также постоянной толщины h_j. На «нижней» $(z = z_1 = 0)$ граничной поверхности $\hat{\Omega}$ оболочки введём систему координат, нормально связанную с $\hat{\Omega}$. В этой системе координат поверхности раздела k-го и $(k+1)$-го ПАС описываются уравнениями

$$z = z_{k+1}, \qquad z_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} h_j, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Фундаментальные характеристические свойства системы дифференциальных уравнений теории оболочек, такие, например, как ее тип или порядок, инвариантны относительно невырожденных преобразований координат на отсчетной поверхности $\hat{\Omega}$. Однако аналитическое представление дифференциальных операторов этой теории существенно зависит от используемой координатной системы и надлежащим выбором последней им можно придать наиболее удобную, «каноническую» форму. Такую форму дифференциальные уравнения теории оболочек получают в ортогональной системе координат, связанной с линиями кривизн поверхности $\hat{\Omega}$. В этой системе координат, обычно и используемой в механике тонкостенных систем, ниже формулируются уравнения неклассической теории оболочек. Итак, пусть x^1, x^2 − ортогональная система координат, координатные линии которой являются линиями кривизн поверхности $\hat{\Omega}$. Пусть $A_\beta = \sqrt{a_{\beta\beta}}$ − параметры Ламе этой системы и R_1, R_2 − радиусы кривизны нормальных сечений в направлениях координатных линий. Считая, что нормаль к поверхности направлена в сторону ее выпуклости, для параметров Ламе H_1, H_2, H_3 пространственной ортогональной системы координат x^1, x^2, z, нормально связанной с поверхностью, имеем следующие выражения [2, с. 68]:

$$H_\beta = \sqrt{g_{\beta\beta}} = A_\beta (1 + z/R_\beta), \qquad H_3 = 1.$$

Вначале рассмотрим систему уравнений нелинейной динамики слоистой оболочки. Перейдем во всех тензорных уравнениях этой системы от компонент тензоров к их физическим составляющим, а от ковариантных производных − к частным, используя известные зависимости [2, с. 18]. В физических составляющих соотношения упругости (1) принимают вид

$$\bar{\sigma}^{(k)}_{(\alpha\beta)} = \sum_{\ell=1}^{\ell_k}\left[\omega_z^{(k\ell)}(\Omega_z^{(k)})^{-1}A^{(k\ell)}_{(\alpha\beta\lambda\mu)}\right]\cdot\bar{\varepsilon}^{(k)}_{(\lambda\mu)} - \sum_{\ell=1}^{\ell_k}\left[\omega_z^{(k\ell)}(\Omega_z^{(k)})^{-1}\beta^{(k\ell)}_{t(\alpha\beta)}\right]\cdot T_{(k)},$$

$$\tau^{(k)}_{(\alpha 3)} = p^{(k)}_{(\alpha\beta)}\,\gamma^{(k)}_{(\beta 3)}, \qquad \gamma^{(k)}_{(\alpha 3)} = q^{(k)}_{(\alpha\beta)}\,\tau^{(k)}_{(\beta 3)} \tag{11}$$

(здесь и ниже $k = 1, 2, \ldots, m$ − порядковый номер слоя, армированного $\ell = 1, 2, \ldots, \ell_k$ семейством волокон, индексы физических составляющих заключены в скобки).

Закон распределения физических составляющих вектора перемещений по толщине многослойного пакета получаем из соотношений (3):

$$v^{(k)}_{(\alpha)} = \lambda^{(k)}_{(\alpha)} + \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)u_\alpha - \frac{z}{A_\alpha}\frac{\partial w}{\partial x^\alpha} + \mu^{(k)}_{(\alpha\beta)}\pi_{(\beta)}, \qquad w^{(k)}_{(3)} = w. \tag{12}$$

Соотношения деформации − перемещения (2), (3) в физических составляющих записываются так ($\alpha, \beta = 1, 2,\ \alpha \neq \beta$):

$$\gamma^{(k)}_{(\alpha 3)} = q^{(k)}_{(\alpha\omega)}\left[\tau^0_{(\omega 3)} + zh^{-1}\left(\tau^h_{(\omega 3)} - \tau^0_{(\omega 3)}\right) + F'(z)\pi_{(\omega)}\right], \qquad \varepsilon^{(k)}_{(33)} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{(k)}_{(\alpha\alpha)} = \frac{1}{H_\alpha}\Bigg\{ & \frac{\partial\lambda^{(k)}_{(\alpha)}}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{A_\beta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\lambda^{(k)}_{(\beta)} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)u_{(\alpha)}\right] + \\
& + \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)\frac{1}{A_\beta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}u_\beta - z\left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{1}{A_\alpha}\frac{\partial w}{\partial x^\alpha}\right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{A_\beta^2}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial w}{\partial x^\beta}\right] + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\mu^{(k)}_{(\alpha\omega)}\pi_{(\omega)}\right) + \frac{1}{A_\beta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\mu^{(k)}_{(\beta\omega)}\pi_{(\omega)} + \\
& + \frac{A_\alpha}{R_\alpha}w\Bigg\} + \frac{1}{2}\left(\frac{u_{(\alpha)}}{R_\alpha} - \frac{1}{A_\alpha}\frac{\partial w}{\partial x^\alpha}\right)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{(12)} = \frac{1}{H_1}\Bigg\{ & \frac{\partial\lambda^{(k)}_{(2)}}{\partial x^1} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial x^2}\lambda^{(k)}_{(1)} + \frac{\partial}{\partial x^1}\left[\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)u_{(2)}\right] - \\
& - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial x^2}\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)u_{(1)} - z\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial x^2}\right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x^1}\right] + \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\mu^{(k)}_{(2\omega)}\pi_{(\omega)}\right) - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial x^2}\mu^{(k)}_{(1\omega)}\pi_{(\omega)}\Bigg\} + \\
& + \frac{1}{H_2}\Bigg\{\frac{\partial\lambda^{(k)}_{(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial x^1}\lambda^{(k)}_{(2)} + \frac{\partial}{\partial x^2}\left[\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)u_{(1)}\right] - \\
& - \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial x^1}\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)u_{(2)} - z\left[\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial x^1}\right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x^1}\frac{\partial w}{\partial x^2}\right] + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\mu^{(k)}_{(1\omega)}\pi_{(\omega)}\right) - \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial x^1}\mu^{(k)}_{(2\omega)}\pi_{(\omega)}\Bigg\} + \\
& + \left(\frac{u_{(1)}}{R_1} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial x^1}\right)\left(\frac{u_{(2)}}{R_2} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial x^2}\right).
\end{aligned} \tag{13}$$

В (13) функция $F(z)$ выбирается априори и в ее выборе имеется определенный произвол. В монографии [1] на примере однослойных пластин и при использовании неклассических уравнений теории пластин показано, что разумный выбор таких функций, определяющих закон распределения поперечных сдвиговых деформаций и напряжений, не вносит в расчет недопустимых погрешностей. Аргументы в пользу этого заключения приведены также и в монографии [2, п. 6.3].

Выражения для физических составляющих обобщенных усилий и моментов через физические составляющие напряжений запишем так [2, с. 70]:

$$T_{(\alpha\beta)} = \sum_{k=1}^{m} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{(\alpha\beta)}^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R_\omega}\right) dz, \qquad M_{(\alpha\beta)} = \sum_{k=1}^{m} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{(\alpha\beta)}^{(k)} z \left(1 + \frac{z}{R_\omega}\right) dz,$$

$$S_{(\alpha\beta)} = \sum_{k=1}^{m} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{(\alpha\lambda)}^{(k)} \mu_{(\lambda\beta)}^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R_\omega}\right) dz, \quad T_{(\alpha 3)} = \sum_{k=1}^{m} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \tau_{(\alpha 3)}^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R_\omega}\right) dz\,,$$

$$Q_{(\alpha)} = \sum_{k=1}^{m} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left\{ \sigma_{(\alpha\alpha)}^{(k)} \left[\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \mu_{(\alpha\alpha)}^{(k)}}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{A_\alpha A_\omega} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\omega} \left(\mu_{(\alpha\omega)}^{(k)} + \mu_{(\omega\alpha)}^{(k)} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \sigma_{(\alpha\omega)}^{(k)} \left[\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \mu_{(\omega\alpha)}^{(k)}}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{A_\alpha A_\omega} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\omega} \left(\mu_{(\omega\omega)}^{(k)} - \mu_{(\alpha\alpha)}^{(k)} \right) \right] \right\} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{z}{R_\omega}\right) dz + \sum_{k=1}^{m} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left\{ \sigma_{(\omega\alpha)}^{(k)} \left[\frac{1}{A_\omega} \frac{\partial \mu_{(\alpha\alpha)}^{(k)}}{\partial x^\omega} - \right.\right.$$

$$- \frac{1}{A_\alpha A_\omega} \frac{\partial A_\omega}{\partial x^\alpha} \left(\mu_{(\alpha\omega)}^{(k)} + \mu_{(\omega\alpha)}^{(k)} \right) \right] + \sigma_{(\omega\omega)}^{(k)} \left[\frac{1}{A_\omega} \frac{\partial \mu_{(\omega\alpha)}^{(k)}}{\partial x^\omega} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{A_\alpha A_\omega} \frac{\partial A_\omega}{\partial x^\alpha} \left(\mu_{(\alpha\alpha)}^{(k)} - \mu_{(\omega\omega)}^{(k)} \right) \right] \right\} \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) dz +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \tau_{(3\lambda)}^{(k)} q_{(\lambda\alpha)}^{(k)} F'(z) \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz\,,$$

$$H_{(\beta\alpha)} = T_{(\alpha\beta)} + M_{(\alpha\beta)} / R_\alpha\,, \qquad \alpha, \beta, \omega = 1, 2\,, \quad \alpha \neq \omega. \tag{14}$$

Здесь

$$\mu_{(\alpha\beta)}^{(k)} = \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) \left(\int_{h_{k-1}}^{z} \frac{q_{(\alpha\beta)}^{(k)}}{1 + t/R_\alpha} F'(t)\, dt + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{h_{j-1}}^{h_j} \frac{q_{(\alpha\beta)}^{(j)}}{1 + t/R_\alpha} F'(t)\, dt \right),$$

$$\lambda_{(\alpha)}^{(k)} = \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) \left\{ \int_{h_{k-1}}^{z} \frac{q_{(\alpha\beta)}^{(k)}}{1 + t/R_\alpha} \left[\tau_{(3\beta)}^{0} + t h^{-1} \left(\tau_{(3\beta)}^{h} - \tau_{(3\beta)}^{0} \right) \right] dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{h_{j-1}}^{h_j} \frac{q_{(\alpha\beta)}^{(j)}}{1 + t/R_\alpha} \left[\tau_{(3\beta)}^{0} + t h^{-1} \left(\tau_{(3\beta)}^{h} - \tau_{(3\beta)}^{0} \right) \right] dt \right\}. \tag{15}$$

Разрешающее уравнение (8) в физических составляющих примет следующий вид:

$$\bar{C} \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{A_2}{A_1} \bar{\lambda}_{(11)} \frac{\partial \Pi}{\partial x^1} + \bar{\lambda}_{(12)} \frac{\partial \Pi}{\partial x^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{A_1}{A_2} \bar{\lambda}_{(22)} \frac{\partial \Pi}{\partial x^2} + \bar{\lambda}_{(21)} \frac{\partial \Pi}{\partial x^1} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial \left(A_2 \bar{\lambda}_{(1)} \right)}{\partial x^1} + \frac{\partial \left(A_1 \bar{\lambda}_{(2)} \right)}{\partial x^2} \right] - \bar{\lambda}_{(33)} \Pi - \bar{E} \Pi - \bar{\bar{C}} - \bar{\bar{E}}\,, \tag{16}$$

где

$$\bar{C} = \sum_{k=1}^{m} \int_{z_k}^{z_{k+1}} C^{(k)} f^2(z) \sqrt{\frac{g}{a}}\, dz\,,$$

$$\bar{\bar{C}} = \sum_{k=1}^{m} \int_{z_k}^{z_{k+1}} C^{(k)} \frac{\partial \Theta^{(k)}}{\partial \tau} f(z) \sqrt{\frac{g}{a}}\, dz\,,$$

$$\overline{\lambda}_{(11)} = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{z_k}^{z_{k+1}} \Lambda_{(11)}^{(k)} f^2(z) \frac{(1+z/R_2)}{(1+z/R_1)} dz \qquad (1 \rightleftarrows 2),$$

$$\overline{\lambda}_{(12)} = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{z_k}^{z_{k+1}} \Lambda_{(12)}^{(k)} f^2(z)\, dz \qquad (1 \rightleftarrows 2),$$

$$\overline{\lambda}_{(1)} = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{z_k}^{z_{k+1}} \left(\Lambda_{(11)}^{(k)} \frac{\partial \Theta^{(k)}}{\partial x^1} + \Lambda_{(12)}^{(k)} \frac{\partial \Theta^{(k)}}{\partial x^2} \right) \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) f(z)\, dz \qquad (1 \rightleftarrows 2),$$

$$\overline{\lambda}_{(33)} = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{z_k}^{z_{k+1}} \Lambda_{(33)}^{(k)} [f'(z)]^2 \sqrt{\frac{g}{a}}\, dz,$$

$$\overline{\overline{E}} = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{z_k}^{z_{k+1}} \Theta^{(k)} \beta_{t(ij)}^{(k)} \dot{\varepsilon}_{(ij)}^{(k)} f(z) \sqrt{\frac{g}{a}}\, dz, \quad \overline{E} = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{z_k}^{z_{k+1}} \beta_{t(ij)}^{(k)} \dot{\varepsilon}_{(ij)}^{(k)} f^2(z) \sqrt{\frac{g}{a}}\, dz,$$

$$\Lambda_{(11)}^{(k)} = \Bigg\{ \left(\cos \psi_{(k)}\right)^2 \left[\varpi^{(k)} \varpi_z^{(k)} \left(\lambda_a^{(k)} - \lambda_c^{(k)} \right) + \lambda_c^{(k)} \right] +$$

$$+ \left(\sin \psi_{(k)}\right)^2 \left[\frac{\varpi_z^{(k)} \lambda_a^{(k)} \lambda_c^{(k)}}{\varpi^{(k)} \lambda_c^{(k)} + (1 - \varpi^{(k)}) \lambda_a^{(k)}} + \lambda_c^{(k)} \left(1 - \varpi_z^{(k)} \right) \right] \Bigg\},$$

$$\Lambda_{(22)}^{(k)} = \Bigg\{ \left(\sin \psi_{(k)}\right)^2 \left[\varpi^{(k)} \varpi_z^{(k)} \left(\lambda_a^{(k)} - \lambda_c^{(k)} \right) + \lambda_c^{(k)} \right] +$$

$$+ \left(\cos \psi_{(k)}\right)^2 \left[\frac{\varpi_z^{(k)} \lambda_a^{(k)} \lambda_c^{(k)}}{\varpi^{(k)} \lambda_c^{(k)} + (1 - \varpi^{(k)}) \lambda_a^{(k)}} + \lambda_c^{(k)} \left(1 - \varpi_z^{(k)} \right) \right] \Bigg\},$$

$$\Lambda_{(12)}^{(k)} = \Lambda_{(21)}^{(k)} = \sin \psi_{(k)} \cos \psi_{(k)} \Bigg\{ \left[\varpi^{(k)} \varpi_z^{(k)} \left(\lambda_a^{(k)} - \lambda_c^{(k)} \right) + \lambda_c^{(k)} \right] -$$

$$- \left[\frac{\varpi_z^{(k)} \lambda_c^{(k)} \lambda_a^{(k)}}{\varpi^{(k)} \lambda_c^{(k)} + (1 - \varpi^{(k)}) \lambda_a^{(k)}} + \lambda_c^{(k)} \left(1 - \varpi_z^{(k)} \right) \right] \Bigg\},$$

$$\Lambda_{(33)}^{(k)} = \left(\frac{\varpi_z^{(k)}}{\varpi^{(k)} \lambda_a^{(k)} + (1 - \varpi^{(k)}) \lambda_c^{(k)}} + \frac{1 - \varpi_z^{(k)}}{\lambda_c^{(k)}} \right)^{-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \qquad (17)$$

Здесь $\psi_{(k)}$ – углы армирования к оси x^1 k-го слоя, $k = 1, 2, \ldots, m$, непрерывными волокнами. Вид непрерывно дифференцируемой функции $f(z)$, присутствующей в (17), зависит от закона взаимодействия между окружающей средой и поверхностями оболочки $z = z_1 = 0$, $z = z_{m+1} = h$.

Функцию $f(z)$ строим в виде полинома

$$f(z) = \sum_{j=1}^{p} \overline{a}_j z^{p-j}, \qquad \overline{a}_j \in R, \qquad p = m + 2. \qquad (18)$$

Если на указанных поверхностях заданы граничные условия первого рода, то для функции (18) должны выполняться следующие ограничения:

$$f(0) = f(h) = 0, \qquad f'(z_k) = 0, \qquad k = 2, \ldots, m. \qquad (19)$$

Возможные комбинации граничных условий и соответствующие типы ограничений на функцию $f(z)$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

$z = z_1 = 0$ \ $z = z_{m+1} = h$	Граничные условия 1-го рода	Граничные условия 2-го рода	Граничные условия 3-го рода (нагревание поверхности)
Граничные условия 1-го рода	$f(z_1) = 0$, $f(z_{m+1}) = 0$, $f'(z_k) = 0$, $k = 2,\ldots,m$, $p = m + 2$	$f(z_{m+1}) = 0$, $f'(z_k) = 0$, $k = 1,\ldots,m$, $p = m + 2$	$f(z_{m+1}) = 0$, $\Lambda^{(1)}_{(33)} f'(z_1) - \mu_0 f(z_1) = 0$, $f'(z_k) = 0$, $k = 2,\ldots,m$, $p = m + 2$
Граничные условия 2-го рода	$f(z_1) = 0$, $f'(z_k) = 0$, $k = 2,\ldots,m+1$, $p = m + 2$	$f'(z_k) = 0$, $k = 2,\ldots,m+1$, $p = m + 2$	$f'(z_{m+1}) = 0$, $\Lambda^{(1)}_{(33)} f'(z_1) - \mu_0 f(z_1) = 0$, $f'(z_k) = 0$, $k = 2,\ldots,m$, $p = m + 2$
Граничные условия 3-го рода (охлаждение поверхности)	$f(z_1) = 0$, $\Lambda^{(m)}_{(33)} f'(z_{m+1}) + \mu_{m+1} f(z_{m+1}) = 0$, $f'(z_k) = 0$, $k = 2,\ldots,m$, $p = m + 2$	$f'(z_{(1)}) = 0$, $\Lambda^{(m)}_{(33)} f'(z_{m+1}) + \mu_{m+1} f(z_{m+1}) = 0$, $f'(z_k) = 0$, $k = 2,\ldots,m$, $p = m + 2$	$\Lambda^{(1)}_{(33)} f'(z_1) - \mu_0 f(z_1) = 0$, $\Lambda^{(m)}_{(33)} f'(z_{m+1}) + \mu_{m+1} f(z_{m+1}) = 0$, $f'(z_k) = 0$, $k = 2,\ldots,m$, $p = m + 2$

Нелинейные дифференциальные уравнения движения (7) элемента слоистой оболочки в физических переменных принимают такой вид:

$$\frac{\partial A_2 T_{(11)}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1} T_{(22)} + \frac{\partial A_1 T_{(21)}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_1}{\partial x^2} T_{(12)} + \frac{1}{R_1}\left[\frac{\partial A_2 M_{(11)}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1} M_{(22)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial A_1 M_{(21)}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_1}{\partial x^2} M_{(12)}\right] - \frac{A_1 A_2}{R_1}\left[H_{(11)}\left(\frac{u_{(1)}}{R_1} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial x^1}\right) + \right.$$
$$\left. + H_{(12)}\left(\frac{u_{(2)}}{R_2} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial x^2}\right)\right] - A_1 A_2\left(\ddot{X}_{(1)} + \frac{\ddot{Y}_{(1)}}{R_1}\right) + q_1 = 0,$$

$$\frac{\partial A_1 T_{(22)}}{\partial x^2} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} T_{(11)} + \frac{\partial A_2 T_{(12)}}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^1} T_{(21)} + \frac{1}{R_2}\left[\frac{\partial A_1 M_{(22)}}{\partial x^2} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} M_{(11)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial A_2 M_{(12)}}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^1} M_{(21)}\right] - \frac{A_2 A_1}{R_2}\left[H_{(22)}\left(\frac{u_{(2)}}{R_2} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial x^2}\right) + \right.$$
$$\left. + H_{(21)}\left(\frac{u_{(1)}}{R_1} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial x^1}\right)\right] - A_2 A_1\left(\ddot{X}_{(2)} + \frac{\ddot{Y}_{(2)}}{R_2}\right) + q_2 = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{T_{(11)}}{R_1}+\frac{T_{(22)}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{1}{A_1}\left[\frac{\partial A_2 M_{(11)}}{\partial x^1}-\frac{\partial A_2}{\partial x^1}M_{(22)}+\frac{\partial A_1 M_{(21)}}{\partial x^2}+\right.\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial A_1}{\partial x^2}M_{(12)}\right]+\frac{\partial}{\partial x^2}\frac{1}{A_2}\left[\frac{\partial A_1 M_{(22)}}{\partial x^2}-\frac{\partial A_1}{\partial x^2}M_{(11)}+\frac{\partial A_2 M_{(12)}}{\partial x^1}+\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac{\partial A_2}{\partial x^1}M_{(21)}\right]\right\}+\frac{1}{A_1A_2}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}A_2\left[H_{(11)}\left(\frac{u_{(1)}}{R_1}-\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial x^1}\right)+\right.\right.\\
&\qquad\left.+H_{(12)}\left(\frac{u_{(2)}}{R_2}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial x^2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x^2}A_1\left[H_{(21)}\left(\frac{u_{(1)}}{R_1}-\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial x^1}\right)+\right.\\
&\qquad\left.\left.+H_{(22)}\left(\frac{u_{(2)}}{R_2}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial x^2}\right)\right]\right\}+\ddot{I}+\\
&\qquad+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial A_2\ddot{Y}_{(1)}}{\partial x^1}+\frac{\partial A_1\ddot{Y}_{(2)}}{\partial x^2}\right]+q_n=0\,,\\
&\frac{\partial A_2 S_{(11)}}{\partial x^1}-\frac{\partial A_2}{\partial x^1}S_{(22)}+\frac{\partial A_1 S_{(21)}}{\partial x^2}+\frac{\partial A_1}{\partial x^2}S_{(12)}-A_1A_2Q_{(1)}-A_1A_2\ddot{Z}_{(1)}+q_1'=0\,,\\
&\frac{\partial A_1 S_{(22)}}{\partial x^2}-\frac{\partial A_1}{\partial x^2}S_{(11)}+\frac{\partial A_2 S_{(12)}}{\partial x^1}+\frac{\partial A_2}{\partial x^1}S_{(21)}-A_2A_1Q_{(2)}-A_2A_1\ddot{Z}_{(2)}+q_2'=0\,.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Здесь использованы следующие обозначения $(\alpha = 1,2)$:

$$
\begin{aligned}
q_\alpha &= A_1A_2\left[\tau^{+}_{(3\alpha)}\left(1+\frac{h}{R_\alpha}\right)-\tau^{0}_{(3\alpha)}\right],\\
q_\alpha' &= A_1A_2\left(\tau^{+}_{(31)}\,\mu^{(m)}_{(1\alpha)}(h)+\tau^{+}_{(32)}\,\mu^{(m)}_{(2\alpha)}(h)\right),\\
q_n &= \sigma^{0}_{(33)}-\sigma^{+}_{(33)}-\frac{h}{A_1A_2}\left[\frac{\partial A_2\tau^{+}_{(31)}}{\partial x^1}+\frac{\partial A_1\tau^{+}_{(32)}}{\partial x^2}\right]+\left(\tau^{+}_{(31)}-\tau^{0}_{(31)}\right)\times\\
&\qquad\times\left(\frac{u_{(1)}}{R_1}-\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial x^1}\right)+\left(\tau^{+}_{(32)}-\tau^{0}_{(32)}\right)\left(\frac{u_{(2)}}{R_2}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial x^2}\right).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

В уравнениях (20) физические составляющие интегральных характеристик даламберовых сил инерции (точкой обозначено частное дифференцирование по времени t) имеют вид

$$
\begin{aligned}
\ddot{X}_{(\beta)} &= \sum_{k=1}^{m}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\rho_{(k)}\ddot{v}^{(k)}_{(\beta)}\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz\,,\\
\ddot{Y}_{(\beta)} &= \sum_{k=1}^{m}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\rho_{(k)}\,\ddot{v}^{(k)}_{(\beta)}\,z\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz\,,\\
\ddot{Z}_{(\beta)} &= \sum_{k=1}^{m}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\rho_{(k)}\,\ddot{v}^{(k)}_{(\alpha)}\,\mu^{(k)}_{(\alpha\beta)}\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz\,,\\
\ddot{I} &= \ddot{w}\sum_{k=1}^{m}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\rho_{(k)}\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz\,.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Итак, система нелинейных неклассических дифференциальных уравнений связанной термоупругости слоистых композитных анизотропных оболочек сформулирована в системе координат, связанной с линиями кривизн отсчетной поверхности. Эта система состоит из уравнений (11)–(22) и должна интегрироваться при краевых условиях (9) и соответствующих начальных условиях (10).

2. Уравнение термоупругости слоистых композитных конических оболочек. Рассмотрим круговую замкнутую усеченную коническую оболочку толщины h, собранную из m упругих композитных слоев волокнистой структуры.

Пусть 2α − угол раствора конуса, $s = x^1$ − расстояние, отсчитываемое вдоль образующей конуса от его вершины $(0 < a \le s \le b)$, $\varphi = x^2$ − угловая координата $(0 \le \varphi \le 2\pi)$. Параметры Ламе A_1, A_2 и радиусы кривизн R_1, R_2 координатных линий введенной ортогональной системы координат таковы [2, п. 8.1]:

$$A_1 = 1, \quad A_2 = s\sin\alpha, \quad R_1 = \infty, \quad R_2 = s\,\mathrm{tg}\,\alpha. \tag{23}$$

Ограничимся рассмотрением того практически важного частного случая, когда каждый слой армирован одним семейством волокон

$$\ell_k = 1, \qquad \Omega_z^{(k)} = \omega_z^{(k1)} = \varpi_z^{(k)}, \qquad \varpi^{(k1)} = \varpi^{(k)} \tag{24}$$

постоянного сечения под углами $\psi_{(k)} = \pm\psi$ к образующей конуса.

Примем также, что условия нагружения и закрепления оболочки не зависят от угловой координаты, а внешние поверхностные и контурные механические и термические нагрузки не имеют угловой составляющей. При перечисленных условиях напряженно-деформированное состояние оболочки является осесимметричным, а угловая составляющая вектора перемещений v_φ и все связанные с ней величины обращаются в нуль.

Дифференциальные уравнения осесимметричной задачи термоупругости конической слоистой оболочки получим из системы (11)−(22), учитывая принятые допущения, равенства (23), (24) и опуская в них нелинейные слагаемые. Эта система уравнений включает в себя следующие группы зависимостей:

− соотношения упругости ($k = 1, 2, \ldots, m$ − порядковый номер слоя)

$$\sigma_{(ss)}^{(k)} = A_{(1111)}^{(k)}\,\varepsilon_{(ss)}^{(k)} + 2A_{(1112)}^{(k)}\,\varepsilon_{(s\varphi)}^{(k)} + A_{(1122)}^{(k)}\,\varepsilon_{(\varphi\varphi)}^{(k)} - \beta_{t(ss)}^{(k)}\,T^{(k)},$$

$$\sigma_{(\varphi\varphi)}^{(k)} = A_{(2211)}^{(k)}\,\varepsilon_{(ss)}^{(k)} + 2A_{(2212)}^{(k)}\,\varepsilon_{(s\varphi)}^{(k)} + A_{(2222)}^{(k)}\,\varepsilon_{(\varphi\varphi)}^{(k)} - \beta_{t(\varphi\varphi)}^{(k)}\,T^{(k)},$$

$$\sigma_{(s\varphi)}^{(k)} = \sigma_{(\varphi s)}^{(k)} = A_{(1211)}^{(k)}\,\varepsilon_{(ss)}^{(k)} + 2A_{(1212)}^{(k)}\,\varepsilon_{(s\varphi)}^{(k)} + A_{(1222)}^{(k)}\,\varepsilon_{(\varphi\varphi)}^{(k)} - \beta_{t(s\varphi)}^{(k)}\,T^{(k)}, \tag{25}$$

$$\tau_{sz}^{(k)} = G_{13}^{(k)}\,\gamma_{sz}^{(k)}; \tag{26}$$

− закон распределения физических составляющих вектора перемещений по толщине пакета слоев

$$v_s^{(k)} = \lambda_s^{(k)} + u_s - z\frac{dw}{ds} + \mu_{ss}^{(k)}\pi_s, \qquad v_z^{(k)} = w, \tag{27}$$

где функции $\mu_{ss}^{(k)}(s,z)$, $\lambda_s^{(k)}(s,z)$ определены формулами (15):

$$\mu_{ss}^{(k)} = \frac{F(z) - F(h_{k-1})}{G_{13}^{(k)}} + \sum_{j=1}^{k-1}\frac{F(h_j) - F(h_{j-1})}{G_{13}^{(j)}},$$

$$\lambda_s^{(k)} = \int\limits_{h_{k-1}}^{z}\frac{\tau_{zs}^0 + th^{-1}(\tau_{zs}^h - \tau_{zs}^0)}{G_{13}^{(k)}}\,dt + \sum_{j=1}^{k-1}\int\limits_{h_{j-1}}^{h_j}\frac{\tau_{zs}^0 + th^{-1}(\tau_{zs}^h - \tau_{zs}^0)}{G_{13}^{(j)}}\,dt; \tag{28}$$

− соотношения деформации − перемещения

$$\varepsilon_{ss}^{(k)} = \frac{\partial\lambda_s^{(k)}}{\partial s} + \frac{du_s}{ds} - z\frac{d^2w}{ds^2} + \mu_{ss}^{(k)}\frac{d\pi_s}{ds} + \frac{\partial\mu_{ss}^{(k)}}{\partial s}\pi_s,$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} = \frac{\sin\alpha}{A_2(1 + z/R_2)}\left(\lambda_s^{(k)} + u_s - z\frac{dw}{ds} + \mu_{ss}^{(k)}\pi_s\right) + \frac{w\cos\alpha}{A_2(1 + z/R_2)},$$

$$\gamma_{sz}^{(k)} = \frac{1}{G_{13}^{(k)}}\left[\tau_{sz}^{0} + zh^{-1}\left(\tau_{sz}^{h} - \tau_{sz}^{0}\right) + F'(z)\pi_s\right]; \tag{29}$$

– зависимости между обобщенными усилиями и моментами в поверхности оболочки и напряжениями в ее слоях

$$\{T_{ss},\ M_{ss},\ S_{ss}\} = \sum_{k=1}^{m}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\sigma_{ss}^{(k)}\left(1+\frac{z}{R_2}\right)\{1,\ z,\ \mu_{ss}^{(k)}\}\,dz,$$

$$\{T_{\varphi\varphi},\ M_{\varphi\varphi},\ S_{\varphi\varphi}\} = \sum_{k=1}^{m}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}\{1,\ z,\ \mu_{\varphi\varphi}^{(k)}\}\,dz,$$

$$Q_s = \sum_{k=1}^{m}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\left[\sigma_{ss}^{(k)}\frac{\partial\mu_{ss}^{(k)}}{\partial s}\left(1+\frac{z}{R_2}\right) + \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}\frac{\sin\alpha}{A_2}\left(\mu_{ss}^{(k)} - \mu_{\varphi\varphi}^{(k)}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\tau_{zs}^{(k)}}{G_{13}^{(k)}}F'(z)\left(1+\frac{z}{R_2}\right)\right]dz; \tag{30}$$

– линеаризованные уравнения движения элемента оболочки в усилиях и моментах

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(A_2T_{ss}\right) - \sin\alpha\, T_{\varphi\varphi} - A_2\ddot{X}_s + q_s = 0,$$

$$\frac{A_2T_{\varphi\varphi}}{R_2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(A_2M_{ss}\right) + \sin\alpha\frac{\partial M_{\varphi\varphi}}{\partial s} + A_2\ddot{I} + A_2q_n = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(A_2S_{ss}\right) - \sin\alpha\, S_{\varphi\varphi} - A_2Q_s - A_2\ddot{Z}_s + q_s' = 0, \tag{31}$$

$$\ddot{X}_{(s)} = \sum_{k=1}^{m}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\rho_{(k)}\ddot{v}_{(s)}^{(k)}\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz, \qquad \ddot{I} = \ddot{w}\sum_{k=1}^{m}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\rho_{(k)}\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz,$$

$$\ddot{Z}_{(s)} = \sum_{k=1}^{m}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\rho_{(k)}\,\ddot{v}_{(s)}^{(k)}\,\mu_{(ss)}^{(k)}\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz; \tag{32}$$

– разрешающее уравнение (16) для независимой характеристики, учитывающей отклонение поля температуры от линейного закона, примет следующий вид:

$$\bar{C}\frac{\partial\Pi}{\partial\tau} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial s}\left(A_2\bar{\lambda}_{(11)}\frac{\partial\Pi}{\partial s}\right) + \frac{1}{A_2}\frac{\partial\left(A_2\bar{\lambda}_{(1)}\right)}{\partial s} - \bar{\lambda}_{(33)}\Pi - \bar{E}\Pi - \bar{\bar{C}} - \bar{\bar{E}}, \tag{33}$$

где

$$\bar{C} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}}C^{(k)}f^2(z)\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz,$$

$$\bar{\bar{C}} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}}C^{(k)}\frac{\partial\Theta^{(k)}}{\partial\tau}f(z)\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz,$$

$$\bar{\lambda}_{(11)} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\Lambda_{(11)}^{(k)}f^2(z)\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz,$$

$$\bar{\lambda}_{(1)} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\left(\Lambda_{(11)}^{(k)}\frac{\partial\Theta^{(k)}}{\partial s}\right)\left(1+\frac{z}{R_2}\right)f(z)\,dz,$$

$$\bar{\lambda}_{(33)} = \sum_{k=1}^{m} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \Lambda_{(33)}^{(k)} [f'(z)]^2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz ,$$

$$\bar{\bar{E}} = \sum_{k=1}^{m} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \Theta^{(k)} (\beta_{t(ss)}^{(k)} \dot{\varepsilon}_{(ss)}^{(k)} + \beta_{t(\varphi\varphi)}^{(k)} \dot{\varepsilon}_{(\varphi\varphi)}^{(k)}) f(z) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz ,$$

$$\bar{E} = \sum_{k=1}^{m} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\beta_{t(ss)}^{(k)} \dot{\varepsilon}_{(ss)}^{(k)} + \beta_{t(\varphi\varphi)}^{(k)} \dot{\varepsilon}_{(\varphi\varphi)}^{(k)}) f^2(z) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz . \tag{34}$$

Функцию $F(z)$, задающую закон распределения поперечных сдвиговых напряжений по толщине оболочки, примем в виде

$$F(z) = z^3 - 1.5hz^2 .$$

Функция $f(z)$ определяется согласно (18), (19).

Следует подчеркнуть, что переменность коэффициентов уравнений (31)–(34) обусловлена не только переменностью параметров Ламе, но также и переменностью эффективных жесткостей и податливостей материалов тех слоев оболочки, которые армированы волокнами постоянного сечения в меридиональном направлении. К переменности расчетных значений эффективных жесткостей и податливостей меридионально армированного слоя приводит переменность интенсивности армирования ω в его поверхности, которая является функцией от s:

$$\omega = \frac{a}{s} \omega_a , \tag{35}$$

где ω_a – значение рассматриваемой интенсивности в сечении $s = a$ оболочки $(0 < a \le s \le b)$. Формулу (35) легко вывести из рассмотрения развертки боковой поверхности усеченного конуса и определения интенсивности армирования слоя в его плоскости.

Система уравнений (23), (25)–(32) имеет восьмой порядок и должна интегрироваться при соответствующем числе краевых и начальных условий. Приведем два варианта краевых условий.

1°. Оболочка с жестко защемленными краями:

$$\text{при} \quad s = a, b : \qquad w = \frac{dw}{ds} = u_s = \pi_s = 0 .$$

2°. Консольная оболочка: край $s = a$ жестко защемлен, край $s = b$ свободен от усилий:

$$\text{при} \quad s = a : \qquad w = \frac{dw}{ds} = u_s = \pi_s = 0 ,$$

$$\text{при} \quad s = b : \qquad T_{ss} = M_{ss} = \frac{d}{ds}(A_2 M_{ss}) - M_{\varphi\varphi} \sin\alpha = S_{ss} = 0 .$$

Начальные условия:

$$X_0^s = X^s\big|_{t=0} , \qquad \dot{X}_0^s = \frac{\partial X^s}{\partial t}\bigg|_{t=0} ,$$

$$Z_0^s = Z_{t=0} , \qquad \dot{Z}_0^s = \frac{\partial Z^s}{\partial t}\bigg|_{t=0} , \qquad I_0 = I\big|_{t=0} , \qquad \dot{I}_0 = \frac{\partial I}{\partial t}\bigg|_{t=0} .$$

Приведем один из вариантов граничных условий для функции Π, удовлетворяющей уравнению (33).

Рассмотрим случай, когда на поверхностях $s = a, b$ осуществляется теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой (охлаждение поверхности):

$$-\left[\bar{\lambda}_{(ss)} \frac{\partial \Pi}{\partial s} + \bar{\bar{\lambda}}_{(ss)}\right]_{s=a,b} = \mu_s^{\Sigma} \left[\left(\gamma_2^2 \Pi + \bar{\Theta}\right) - \gamma_2^1 T^c\right]_{s=a,b} , \qquad \mu_s^{\Sigma} \ne \infty ,$$

$$\left(\gamma_2^2\,\Pi + \bar{\Theta}\right)_{s=a,b} = \gamma_2^1\, T^c_{s=a,b}, \qquad \mu_s^\Sigma = \infty ,$$

где μ_s^Σ − коэффициент теплообмена (теплоотдачи) на поверхности $s = a,\, b$,

$$\gamma_2^1 = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\left(1+\frac{z}{R_2}\right)f(z)\,dz, \qquad \gamma_2^2 = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\left(1+\frac{z}{R_2}\right)f^2(z)\,dz,$$

$$\bar{\Theta} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\left(1+\frac{z}{R_2}\right)\left[\Theta^{(k)}\right]_{s=a,b} f(z)\,dz .$$

Начальное условие:

$$\Pi_0^s = \Pi_{t=0} .$$

Функции $\Theta^{(k)}(z)$, полученные в [10], для конической оболочки и при отсутствии внутренних источников теплоты определяются в конечном виде:

$$\Theta^{(k)} = \Phi_{(k)} + K_\lambda^{(k)}\varphi[\vartheta(z) - \vartheta(z_k)], \quad z_k \le z \le z_{k+1}, \quad k = 1,2,\ldots,m , \tag{36}$$

$$\Phi_{(k)} = \frac{Q_3}{Q_2} + \varphi\left(S_{k-1} - \frac{Q_1}{Q_2}\,\vartheta'(z_1)\right), \qquad K_\lambda^{(k)} = \frac{\Lambda_{(33)}^{(1)}}{\Lambda_{(33)}^{(k)}}, \qquad Q_2 \ne 0 ,$$

$$S_{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} K_\lambda^{(j)}[\vartheta(z_{j+1}) - \vartheta(z_j)], \qquad \vartheta(z) = \ln\left(1+\frac{z}{R_2}\right),$$

$$\varphi = \frac{P_3 - P_2 Q_3 Q_2^{-1}}{P_1 K_\lambda^{(m)}\vartheta'(z_{m+1}) + P_2\left[S_m - \vartheta'(z_1)Q_1Q_2^{-1}\right]} . \tag{37}$$

Значения коэффициентов P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3 в (37) можно найти в статье [10].

3. Решение задачи термоупругого деформирования двухслойной армированной цилиндрической оболочки. Представим расчётную схему в виде двухслойной цилиндрической оболочки постоянной толщины, находящейся под действием термосиловых факторов. Слои цилиндра изготовлены из связующего с одинаковыми термомеханическими характеристиками и перекрестно армированы в направлении винтовых линий. На внутренней поверхности Ω введём ортогональную систему координат, координатные линии которой − линии кривизны поверхности Ω : $\{(x,z)\,|\,0 \le x \le \ell,\ z_k \le z \le z_{k+1},\ k = 1,2,\ z_1 = 0,\ z_2 = h_1,\ z_3 = h_1 + h_2 = h\}$. Здесь h_1, h_2 − толщины слоев оболочки, ℓ − ее длина.

Параметры Ламе $A_1 = 1$, $A_2 = R$ и главные кривизны отсчётной поверхности $R_1 = \infty$, $R_2 = R$ − внутренний радиус цилиндра. Торец оболочки при $x = 0$ жестко защемлен, а при $x = \ell$ − свободен от усилий. Считая оболочку достаточно тонкой, принимаем приближенное равенство $1 + z/R \approx 1$.

На кромках $x = 0$, $x = \ell$ и на цилиндрической поверхности $z = z_3$ осуществляется теплообмен по закону Ньютона:

$$-\Lambda_{(11)}^{(k)}\,T_{,x}^{(k)} = \mu_1\left(T^{(k)} - \theta_0\right), \quad \Lambda_{(11)}^{(k)}\,T_{,x}^{(k)} = \mu_2\left(T^{(k)} - \theta_0\right), \quad k = 1,2 , \tag{38}$$

$$-\Lambda_{(33)}^{(2)}\,T_{,z}^{(2)} = (\mu_1 + \mu_2)\left(T^{(2)} - \theta_0\right)/2 . \tag{39}$$

Здесь и далее нижний индекс после запятой обозначает частную производную по соответствующей переменной, μ_1, μ_2 − коэффициенты теплообмена с окружающей средой, имеющей температуру $-\theta_0$.

На поверхности $z = z_1 = 0$ задан кусочно-линейный закон изменения температуры:

$$T_1^*(\tau) = \begin{cases} \theta_{\max}\tau/\tau_0, & 0 \le \tau \le \tau_0, \\ \theta_{\max}, & \tau > \tau_0. \end{cases} \tag{40}$$

На границе раздела слоев, при $z = z_2 = h$, выполняются условия идеального теплового контакта.

В (38), (39) выражения для компонентов тензора теплопроводности модифицированной матрицы композита определяются в соответствии с (17), где $\psi_{(k)} = (-1)^k \arccos\left(c/\sqrt{c^2+1}\right) = \mathrm{const}$ – постоянные углы, которые винтовая линия составляет с образующей поверхности Ω [7. с. 92].

Нестационарное двухмерное температурное поле в k-м слое оболочки аппроксимировалось зависимостью (5):

$$T^{(k)}(x,z,\tau) = \Theta^{(k)}(z,\tau) + f(z)\Pi(x,\tau), \qquad k = 1,2, \tag{41}$$

где $f(z)$ – достаточно гладкая функция z, удовлетворяющая условиям

$$f(z_1) = f'(z_2) = 0, \qquad \lambda_{(33)}^{(2)} f'(z_3) + (\mu_1 + \mu_2) f(z_3)/2 = 0.$$

В равенстве (41) $\Theta^{(k)}$ – непрерывно дифференцируемые функции, допускающие представление в замкнутом виде (36), (37), выражения для которых, с учетом граничных условий (38)–(40), имеют следующий вид:

$$\Theta^{(k)} = \Phi_{(k)} + K_\lambda^{(k)}\varphi[\vartheta(z) - \vartheta(z_k)], \qquad z_k \le z \le z_{k+1}, \qquad k = 1,2, \tag{42}$$

где

$$\varphi = \frac{(\mu_1+\mu_2)\left(T^{(2)} - \theta_0\right) - (\mu_1+\mu_2)T_1^*(\tau)}{2\lambda_{(33)}^{(2)} K_\lambda^{(2)} \vartheta'(z_3) + (\mu_1+\mu_2)[S_2]}, \qquad \vartheta(z) = \ln\left(1 + \frac{z}{R}\right),$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{2} K_\lambda^{(j)}[\vartheta(z_{j+1}) - \vartheta(z_j)], \qquad K_\lambda^{(k)} = \frac{\Lambda_{(33)}^{(1)}}{\Lambda_{(33)}^{(k)}}.$$

Отмечено, что, строго говоря, поля напряжений, деформаций и температуры взаимосвязаны, однако, как показано в [3, ч. 2] для большинства практических задач влияние напряжений и деформаций на распределение температуры достаточно мало и им можно пренебречь. Это обстоятельство позволяет при исследовании температурных напряжений в качестве первого и независимого шага найти распределение температуры в твердом теле с заданными тепловыми условиями. Вторым шагом будет определение напряжений и деформаций при известном распределении температуры.

Нестационарное уравнение для функции $\Pi(x,\tau)$ получаем из (33), опуская члены, учитывающие эффект связанности (34):

$$\bar{C}\Pi(x,\tau)_{,\tau} = \left(\bar{\lambda}_{(11)}\Pi(x,\tau)_{,x}\right)_{,x} - \bar{\lambda}_{(33)}\Pi(x,\tau) - \bar{\bar{C}}. \tag{43}$$

Граничные и начальное условия:

$$\bar{\lambda}_{(11)}\,\Pi(x,\tau)_{,x}\big|_{x=0} = \mu_1\left[\gamma_2^1\theta_0 - \bar{\Theta} - \gamma_2^2\,\Pi(x,\tau)\big|_{x=0}\right],$$

$$\bar{\lambda}_{(11)}\,\Pi(x,\tau)_{,x}\big|_{x=\ell} = \mu_2\left[\gamma_2^1\theta_0 - \bar{\Theta} - \gamma_2^2\,\Pi(x,\tau)\big|_{x=\ell}\right], \tag{44}$$

$$\Pi(x,0) = 0. \tag{45}$$

Начально-краевая задача (43)–(45) решается итерационно-интерполяционным методом, предложенным в работе [4, с. 6].

Подставляя решение краевой задачи (43)–(45) и выражения (42) в (41), находим нестационарное температурное поле двухслойного армированного цилиндра.

После определения поля температуры на каждом шаге по времени решается статическая осесимметричная задача для двухслойной цилиндрической оболочки.

Поскольку решение задачи статики будет производиться для металлокомпозитных оболочек, то можно использовать уравнения классической теории оболочек. Эти уравнения получаются из установленных в **п. 2** дифференциальных уравнений путем предельного перехода $q_{\alpha\beta}^{(k)} \to 0$, $p_{(k)}^{\alpha\beta} \to \infty$, $k = 1, 2$, поэтому не нуждаются в дополнительном описании.

Разрешающая система уравнений статики многослойных армированных оболочек вращения и краевые условия приведена в [2, п. 6.2].

Приведем описание структурного критерия прочности армированной среды. Материалы матрицы и армирующих элементов подчиняются условию прочности Мизеса [2, с. 36]:

$$M(\sigma_{(\alpha\beta)c}) = k_c^2, \qquad M(\sigma_{(\alpha\beta)a}) = k_a^2. \tag{46}$$

После решения соответствующей квазистатической задачи термоупругости, находим средние напряжения $\bar{\sigma}_{(k)}^{\alpha\beta}$ и средние деформации $\bar{\varepsilon}_{(k)}^{\alpha\beta}$ k-го слоя. По методике, подробно описанной в [2, с. 36], восстанавливаем истинные напряжения $\sigma_{(\alpha\beta)c}^{(k)}$ в связующем и армирующих волокнах $\sigma_{(\alpha\beta)a}^{(k)}$. Подставляя последние в (46), находим значения:

$$M_{(c,a)}^{(k)*} = \sqrt{\sup_{V_k} M(\sigma_{(\alpha\beta)c,a}^{(k)})}, \qquad M_{(c,a)}^{*} = \max_{k} M_{(c,a)}^{(k)*}.$$

Здесь V_k – область, занятая k-м слоем.

Если выполняется одно из равенств $M_{(c,a)}^{*} = \min_{k} k_{c,a}^{(k)*}$, то считаем, что в данной точке наступила потеря прочности композитного материала.

Рассмотрим цилиндрическую металлокомпозитную оболочку, нагруженную внутренним равномерно распределенным давлением интенсивности $P = 2$ МПа, радиуса $R = 0.5$ м, длиной $\ell = 10R$, изготовленную из алюминия ($\lambda_c^{(1)} = \lambda_c^{(2)} = 240$ Вт/(м · °C), $c_c^{(1)} = c_c^{(2)} = 757$ Дж/(кг · °C), $\rho_c^{(1)} = \rho_c^{(2)} = 2687$ кг/м^3, $E_c^{(1)} = E_c^{(2)} = 73$ ГПа, $\alpha_c^{(1)} = \alpha_c^{(2)} = 2.4 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}, предел прочности при растяжении $k_c^{(1)} = k_c^{(2)} = 62$ МПа [12, с. 173, с. 180]) и симметрично армированную двумя семействами стальных волокон ($\lambda_a^{(1)} = \lambda_a^{(2)} = 45$ Вт/(м · °C), $c_a^{(1)} = c_a^{(2)} = 586$ Дж/(кг · °C), $\rho_a^{(1)} = \rho_a^{(2)} = 7811$ кг/м^3, $E_a^{(1)} = E_a^{(2)} = 20$ ГПа, $\alpha_a^{(1)} = \alpha_a^{(2)} = 13 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}, $k_a^{(1)} = k_a^{(2)} = 413$ МПа [12, с. 174, с. 180]) в направлении винтовых линий.

Температурное воздействие характеризуется следующими параметрами: $\theta_{\max} = 500$ °C, $\theta_0 = 0$ °C, $\mu_1 = \mu_2 = 20$ Вт/(м · °C), $\tau_0 = 5$ с. Параметры армирования: $\varpi^{(k)} = \varpi_z^{(k)} = 0.5$.

В табл. 2 представлена зависимость $M_{(c)}^{*}$ от угла укладки арматуры в направлении винтовых линий при заданных термосиловых полях.

Таблица 2

$M_{(c)}^{*}$, ГПа	0.806	0.814	0.882	0.923	0.947
$\psi_{(1)}$, град	25.625	40.514	47.673	51.247	53.198
$\psi_{(2)}$, град	−25.625	−40.514	−47.673	−51.247	−53.198

В качестве направления дальнейших исследований предполагается провести численное решение связанной нелинейной задачи термоупругого деформирования слоистой армированной цилиндрической оболочки с целью сравнения характеристик напряженно-деформированного состояния и критических параметров разрушения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 15-01-00825.

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. – Москва: Наука, 1987. – 360 с.
2. *Андреев А. Н., Немировский Ю. В.* Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.
3. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – Москва: Мир, 1964. – 517 с.
   Те саме: *Boley B. A., Weiner J. H.* Theory of thermal stresses. – New York–London: J. Wiley & Sons, Inc., 1960. – 586 p.
4. *Гришин А. М., Кузин А. Я.* О гетерогенно-гомогенном воспламенении реагирующей пластины при обтекании потоком окислителя // В сб.: Горение и взрыв. – Москва: Наука, 1969. – С. 38–43.
5. *Джагангиров А. А.* Несущая способность трехслойной волокнистой композитной кольцевой пластинки, защемлённой по кромкам // Механика композитн. материалов. – 2016. – **52**, № 2. – С. 385–398.
   То же: *Jahangirov A. A.* Load-carrying capacity of a fiber-reinforced annular three-layer composite plate clamped on its external and internal contours // Mech. Compos. Mater. – 2016. – **52**, No. 2. – P. 271–280.
6. *Емельянов И. Г., Кузнецов А. В.* Применение виртуальных элементов при определении напряженного состояния оболочек вращения // Вычисл. механика сплошных сред. – 2014. – **7**, № 3. – С. 245–252.
7. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении: Ч. 1. Аппарат исследования. Общие основания теории и внутренняя геометрия поверхности / Под ред. Г. Б. Гуревича. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1947. – 512 с.
8. *Киреев И. В., Немировский Ю. В.* Консервативный численный метод решения линейных краевых задач статики упругих оболочек вращения // Вычислит. механика сплошных сред. – 2012. – **5**, № 1. – С. 85–99.
9. *Муц А.* Выбор переменных проектирования при оптимизации последовательности укладки конструкций из слоистых композитов // Механика композитн. материалов. – 2016. – **52**, № 2. – С. 305–324.
   То же: *Muc A.* Choice of design variables in the stacking sequence optimization for laminated structures // Mech. Compos. Mater. – 2016. – **52**, No. 2. – P. 211–224.
10. *Немировский Ю. В., Бабин А. И.* Связанная задача термоупругости слоистых композитных оболочек вращения. I. Теоретические аспекты проблемы // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 1. – С. 86–98.
11. *Немировский Ю. В., Мищенко А. В.* Динамический расчёт систем профилированных композитных стержней // Вычисл. механика сплошных сред. – 2015. – **8**, № 2. – С. 188–199.
12. *Теоретические* основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент: Справочник / Под общ. ред. В. А. Григорьева, В. М. Зорина. – Москва: Энергоатомиздат, 1988. – 560 с. – (Теплоэнергетика и теплотехника; Кн. 2.)
13. *Muc A., Muc-Werzgon' M.* An evolution strategy in structural optimization problems for plates and shells // Compos. Struct. – 2012. – **94**, No. 4. – P. 1461–1470.
14. *Muc A., Ulatowska A.* Design of plates with curved fibre format // Compos. Struct. – 2010. – **92**, No. 7. – P. 1728–1733.
15. *Noor A. K.* Bibliography of monographs and surveys on shells // Appl. Mech. Rev. – 1990. – **43**, No. 9. – P. 223–234.
16. *Pietraszkiewicz W.* Addendum to: Bibliography of monographs and surveys on shells // Appl. Mech. Rev. – 1992. – **45**, No. 6. – P. 249–250.
17. *Shell-like* structures. Non-classical theories and applications / Ed. by H. Altenbach, V. A. Eremeyev. – New York etc.: Springer, 2011. – Ser. Advanced Structured Materials, Vol. 15. – xi+750 p.
18. *Shen H.-S.* Functionally graded materials: Nonlinear analysis of plates and shells. – Boca Raton: CRC Press, 2009. – 280 p.
19. *Zozulya V. V.* A high order theory for linear thermoelastic shells: Comparison with classical theories // J. Eng. – 2013. – **2013**. – Article ID 590480. – 19 p.

ЗВ'ЯЗАНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ. II. ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ

Отримано систему нелінійних некласичних диференціальних рівнянь зв'язаної термопружності шаруватих композитних анізотропних оболонок обертання у системі координат, зв'язаній з лініями кривизн відлікової поверхні. Побудовані некласична модель деформування шаруватої оболонки і нелінійна модель розподілу теплового потоку по товщині оболонки дозволяють врахувати поперечні зсувні деформації, забезпечити умови механічного та теплового контакту шарів і умови термомеханічного навантаження на лицьових поверхнях оболонки. Виведено лінеаризовані диференціальні рівняння осесиметричної зв'язаної задачі термопружності конічної армованої шаруватої оболонки. Розв'язано квазістатичну задачу термопружності двошарової циліндричної оболонки, перехресно армованої у напрямку гвинтових ліній. З використанням структурного підходу до встановлення критеріїв міцності композитних матеріалів визначено навантаження початкового руйнування сполучного та армуючих елементів металокомпозитної двошарової циліндричної оболонки.

COUPLED THERMOELASTICITY PROBLEM FOR MULTILAYERED COMPOSITE SHELLS OF REVOLUTION. II. APPLIED PROBLEMS

The system of nonlinear nonclassic differential equations of coupled thermoelasticity problem for layered anisotropic composite shells of revolution is obtained in the coordinate system connected with lines of curvature of reference surface. The constructed non-classical model of deformation of the layered shell and nonlinear model of heat flux distribution along its thickness allow to take into account the transverse shear deformations, and ensure the conditions of mechanical and thermal contact of the layers and thermomechanical loading on the boundary surfaces of the shell. The linearized differential equations of axisymmetric coupled thermoelasticity problem for cone reinforced layered shell are established. The quasistatic thermoelasticity problem for two-layered cylindrical shell crosswise reinforced in the direction of helical lines is solved. On the basis of structural approach to establishing the durability criterion of composite materials the loading of initial damage of connecting and reinforcing elements in two-layered cylindrical metal-composite shell is determined.

[1] Ин-т теорет. и прикл. механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия,
[2] Кузбасс. гос. техн. ун-т, Кемерово, Россия

Получено
27.03.16