УДК 512.64

В. М. Прокіп

СТРУКТУРА МАТРИЦЬ РАНГУ ОДИН НАД ОБЛАСТЮ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ ВІДНОСНО ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ

Досліджується структура матриць рангу один над областю головних ідеалів відносно перетворень еквівалентності та подібності. Встановлено нормальну форму матриці рангу один відносно перетворення подібності. Запропоновано умови, за яких пара матриць рангу один перетворенням подібності зводиться до трикутного вигляду.

Вступ. Нехай $M_{m,n}(R)$ – множина $m \times n$-матриць над областю головних ідеалів R з одиницею $e \neq 0$. Позначимо: $U(R)$ – мультиплікативна група області R; R_a – повна система лишків області головних ідеалів R за модулем ідеалу $(a) = Ra$, у якій нульовий клас представлений нулем області R, а одиничний клас – одиницею e; I_n – одинична матриця вимірності n; $\overline{0}_{m,n}$ – нульова $m \times n$-матриця. Надалі використовуємо ще позначення« $\top$ » – символ транспонування матриць, а $\operatorname{tr} A$ – слід матриці A.

Кажуть, що матриці A і B із $M_{n,n}(R)$ подібні, якщо існує матриця $T \in GL(n,R)$ така, що $A = TBT^{-1}$. Матриця T називається матрицею перетворення подібності, або трансформуючою матрицею. Дослідження подібності матриць над полями і кільцями були і є в центрі уваги багатьох математиків. Це обумовлено не тільки академічним інтересом до цієї задачі, але й багатьма задачами прикладного характеру. Будова матриць над полем відносно перетворень подібності описана повністю у [8]. Проте теорія про описи структури матриць над кільцями відносно перетворень подібності далека до свого завершення. Більшість досліджень, які стосуються задачі про подібність матриць над кільцями, розглядалися при тих чи інших обмеженнях на кільце [1, 2, 6, 8, 15, 16], на порядок матриці [1, 7, 13, 14, 19] або на її характеристичний многочлен [3, 17].

У роботах [5, 7, 14] встановлено алгоритм розпізнавання подібності цілочисельних матриць. Проте канонічних форм матриць щодо відношення подібності в цих роботах не встановлено.

У цій роботі досліджується структура матриць над областю головних ідеалів R рангу один відносно перетворень еквівалентності та подібності. Основним результатом роботи є встановлення нормальної форми матриці рангу один із $M_{n,n}(R)$ відносно перетворення подібності. Зазначимо, що дослідженню структури матриць рангу один над полем (дійсних і комплексних чисел) відносно перетворень еквівалентності та подібності присвячено значну кількість робіт. Зокрема, в роботі [16] описано структуру матриць рангу над полем дійсних і комплексних чисел відносно перетворень подібності. Матриці рангу один відіграють належну роль при дослідженні властивостей матриць відносно перетворень еквівалентності, які зберігають їхні інваріанти, а також при розв'язуванні матричних рівнянь, які мають прикладне застосування (див., наприклад, [9, 11, 12, 20, 21]). Зауважимо також, що отримані результати справджуються для матриць рангу один над областями елементарних дільників.

1. Допоміжні результати. Нагадаємо, що ненульовий вектор $\overline{u} \in M_{n,1}(R)$ називається *унімодулярним*, якщо найбільший спільний дільник його елементів є дільником одиниці області R. Будемо говорити, що вектори $\overline{u}$ і $\overline{v}$ із $M_{n,1}(R)$ є *асоційованими*, якщо $\overline{u} = p\overline{v}$, де $p \in U(R)$. У цій частині статті опишемо структуру матриць рангу один над областю головних ідеалів відносно перетворень еквівалентності.

Лема 1. *Нехай* $A \in M_{m,n}(R)$ *− матриця рангу один і* $\alpha \in R$ *− найбільший спільний дільник елементів матриці* A. *Тоді для матриці* A *та елемента* α *існує єдина пара з точністю до асоційованості унімодулярних векторів* $\bar{u} \in M_{m,1}(R)$ *і* $\bar{v} \in M_{n,1}(R)$ *таких, що*

$$A = \alpha\, \bar{u}\, \bar{v}^{\top}.$$

Якщо ж для матриці A *існує ще одна пара унімодулярних векторів* $\bar{u}_1 \in M_{m,1}(R)$ *і* $\bar{v}_1 \in M_{n,1}(R)$ *таких, що* $A = \alpha\, \bar{u}_1\, \bar{v}_1^{\top}$, *то* $\bar{u} = p\bar{u}_1$ *і* $\bar{v} = p^{-1}\bar{v}_1$, *де* $p \in U(R)$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $\operatorname{rank} A = 1$ і $\alpha \in R$ − найбільший спільний дільник елементів матриці A, то для матриці A над областю головних ідеалів R існує зображення у вигляді добутку

$$A = US_AV, \tag{1}$$

де $U \in GL(m,R)$, $V \in GL(n,R)$ і $S_A = \operatorname{diag}(\alpha, 0, \ldots, 0) \in M_{m,n}(R)$ − форма Сміта матриці A (див. [10]). Матриці U і V запишемо у вигляді

$$U = \begin{Vmatrix} u_{11} & u_{21} & \ldots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{m1} & u_{m2} & \ldots & u_{mm} \end{Vmatrix}, \qquad V = \begin{Vmatrix} v_{11} & v_{21} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Тепер із рівності (1) отримуємо $A = \alpha \begin{Vmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{m1} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \end{Vmatrix}$. Поклавши $\bar{u} = \begin{Vmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{m1} \end{Vmatrix} \in M_{m,1}(R)$ і $\bar{v}^{\top} = \begin{Vmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \end{Vmatrix} \in M_{1,n}(R)$, отримуємо, що для матриці A існує зображення

$$A = \alpha\, \bar{u}\, \bar{v}^{\top}. \tag{2}$$

Оскільки U і V − оборотні матриці, то вектори $\bar{u}$ і $\bar{v}^{\top}$ є унімодулярними.

Припустимо, що для матриці A та елемента α, крім зображення у вигляді добутку (2), існує ще одне зображення $A = \alpha\, \bar{u}_1\, \bar{v}_1^{\top}$, де $\bar{u}_1 \in M_{m,1}(R)$ і $\bar{v}_1 \in M_{n,1}(R)$ − унімодулярні вектори. Отже,

$$\alpha\, \bar{u}\, \bar{v}^{\top} = \alpha\, \bar{u}_1\, \bar{v}_1^{\top}. \tag{3}$$

Для унімодулярного вектора $\bar{v}^{\top}$ існує матриця $V_0 \in GL(n,R)$ така, що

$$\bar{v}^{\top} V_0 = \begin{Vmatrix} e & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Помноживши обидві частини рівності (3) справа на матрицю V_0, отримуємо

$$\alpha\, \bar{u} \begin{Vmatrix} e & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} = \alpha\, \bar{u}_1 \begin{Vmatrix} w_1 & w_2 & \ldots & w_n \end{Vmatrix}, \tag{4}$$

де $\bar{v}_1^{\top} V_0 = \begin{Vmatrix} w_1 & w_2 & \ldots & w_n \end{Vmatrix}$. Із рівності (4) випливає, що

$$w_2 = w_3 = \ldots = w_n = 0.$$

Оскільки вектори $\bar{u}$ і $\bar{u}_1$ є унімодулярними і $\alpha \neq 0$, то з рівності (4) дістаємо, що $w_1 \in U(R)$. Отже, вектори $\bar{u}$ та $\bar{u}_1$ є асоційованими, тобто $\bar{u} = w_1\bar{u}_1$.

Тепер рівність (3) запишемо так:

$$\alpha w_1 \bar{u}_1 \bar{v}^\top = \alpha \bar{u}_1 \bar{v}_1^\top .$$

Звідси отримуємо $\alpha \bar{u}_1 (w_1 \bar{v}^\top - \bar{v}_1^\top) = 0$. Оскільки $\alpha \bar{u}_1 \neq \bar{0}_{m,1}$, то з останньої рівності випливає, що $w_1 \bar{v}^\top = \bar{v}_1^\top$, тобто $v = w_1^{-1} v_1$. Отже, для матриці A рангу один та елемента α пара векторів $\bar{u} \in M_{m,1}(R)$ і $\bar{v} \in M_{n,1}(R)$ визначена однозначно з точністю до асоційованості. Лему доведено. ♦

Наслідок 1. *Нехай матриця $A \in M_{n,n}(R)$ рангу один записана у вигляді добутку $A = \alpha \bar{u} \cdot \bar{v}^\top$, де $\bar{u}, \bar{v} \in M_{n,1}(R)$ – унімодулярні вектори і $\alpha \in R$ – найбільший спільний дільник елементів матриці A. Тоді*

i) *$\alpha \bar{v}^\top \bar{u} = \operatorname{tr} A$ – слід матриці A є її власним значенням, а вектори $\bar{v}^\top$ та $\bar{u}$ є відповідно лівим і правим власними векторами матриці A, які відповідають власному значенню $a = \operatorname{tr} A$;*

ii) *$m(\lambda) = \lambda(\lambda - a)$ – мінімальний многочлен матриці A, де $a = \operatorname{tr} A$.*

Д о в е д е н н я. Доведемо, що слід матриці $\operatorname{tr} A = \alpha \bar{v}^\top \bar{u}$ є власним значенням матриці A. Вектори $\bar{u}$ і $\bar{v}$ запишемо у вигляді $\bar{u}^\top = \|u_1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_n\|$ і $\bar{v}^\top = \|v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_n\|$. Із рівності $A = \alpha \bar{u} \bar{v}^\top$ для діагональних елементів a_{ii} матриці A отримуємо, що $a_{ii} = \alpha u_i v_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Отже, $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$. Тепер із рівності $A = \alpha \bar{u} \bar{v}^\top$ маємо

$$\bar{v}^\top A = \alpha \bar{v}^\top \bar{u} \bar{v}^\top = (\operatorname{tr} A) \bar{v}^\top = a \bar{v}^\top ,$$

тобто вектор $\bar{v}^\top$ є лівим власним вектором матриці A, якому відповідає власне значення $\operatorname{tr} A = \alpha \bar{v}^\top \bar{u}$. Аналогічно доводиться, що вектор $\bar{u}$ є правим власним вектором матриці A, тобто $A\bar{u} = \bar{u} \alpha \bar{v}^\top \bar{u} = \bar{u} (\operatorname{tr} A)$, якому теж відповідає власне значення $\operatorname{tr} A = \alpha \bar{v}^\top \bar{u} = a$.

Розглянемо добуток

$$A^2 = \alpha \bar{u} \bar{v}^\top (\alpha \bar{u} \bar{v}^\top) = \alpha \bar{v}^\top \bar{u} (\alpha \bar{u} \bar{v}^\top) = (\operatorname{tr} A) A = aA .$$

Звідси випливає, що $m(\lambda) = \lambda(\lambda - a)$ – мінімальний многочлен матриці A. Наслідок доведено. ♦

2. Основні результати. Встановимо нормальну форму матриці $A \in M_{n,n}(R)$ рангу один відносно перетворень подібності.

Теорема 1. *Матриця $A \in M_{n,n}(R)$ рангу один подібна одній із матриць:*

i) *нільпотентній матриці $N_A = \operatorname{diag}\left(\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{Vmatrix}, 0, \ldots, 0 \right)$, якщо $\operatorname{tr} A = 0$. Елемент $b \in R$ визначений однозначно з точністю до асоційованості;*

ii) *діагональній матриці (формі Сміта) $S_A = \operatorname{diag}(a, 0, \ldots, 0)$, де*

$$a = \operatorname{tr} A \neq 0 \qquad і \qquad A = 0_{n,n} (\operatorname{mod} a);$$

iii) *блочно-діагональній матриці* $D_A = \operatorname{diag}\left(\begin{Vmatrix} a & 0 \\ r & 0 \end{Vmatrix}, 0, \ldots, 0\right)$, *де* $a = \operatorname{tr} A \neq$

$\neq 0$ *і* $A \neq \overline{0}_{n,n} (\operatorname{mod} a)$ *і елемент* $r \in R_a$.

Д о в е д е н н я. Згідно з лемою 1 матриця A допускає зображення у вигляді $A = \alpha \overline{u}\, \overline{v}^{\top}$, де $\overline{u}, \overline{v} \in M_{n,1}(R)$ − унімодулярні вектори і $\alpha \in R$ − найбільший спільний дільник елементів матриці A. Для вектора $\overline{v}^{\top}$ існує матриця $V_0 \in GL(n, R)$ така, що $\overline{v}^{\top} V_0 = \| e \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \|$. Отже, матриця A перетвореннями подібності зводиться до вигляду

$$V_0^{-1} A V_0 = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, що $\alpha_{11} = \operatorname{tr} A$ − слід матриці A, який для A визначений однозначно. Надалі покладемо $\alpha_{11} = \operatorname{tr} A = a$.

Нехай найбільший спільний дільник елементів $\{\alpha_{21}, \alpha_{31}, \ldots, \alpha_{n1}\}$ дорівнює $b \in R$. Отже, для вектора $\| \alpha_{21} \quad \alpha_{31} \quad \ldots \quad \alpha_{n1} \|^{\top} \in M_{n-1,1}(R)$ існує матрицю $V_1 \in GL(n-1, R)$ така, що $V_1 \begin{Vmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}$. Очевидно, що для матриці $V_2 = \begin{Vmatrix} e & \overline{0}_{1,n-1} \\ \overline{0}_{n-1,1} & V_1 \end{Vmatrix} \in GL(n, R)$ виконується рівність

$$V_2 A_1 V_2^{-1} = A_2 = \begin{Vmatrix} a & 0 & \ldots & 0 \\ b & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (5)$$

Якщо $\operatorname{tr} A = 0$, то з рівності (5) отримуємо, що A_2 є нільпотентною матрицею. Отже, матриця A подібна нільпотентній матриці

$$N_A = TAT^{-1} = \operatorname{diag}\left(\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{Vmatrix}, \ \overline{0}_{n-2,n-2}\right), \quad T \in GL(n, R).$$

Припустимо, що для нільпотентної матриці $A \in M_{n,n}(R)$ рангу один існує матриця $T_1 \in GL(n, R)$, відмінна від матриці T, така, що

$$T_1 A T^{-1} = \operatorname{diag}\left(\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ r_1 & 0 \end{Vmatrix}, \ \overline{0}_{n-2,n-2}\right),$$

де $r_1 \in R$ і $r_1 \neq r$. Очевидно, що елементи r і r_1 є найбільшими спільними дільниками елементів матриці A, тобто r і r_1 є асоційованими.

Нехай $a = \operatorname{tr} A \neq 0$. Елемент b запишемо у вигляді $b = aq + r$, де $q \in R$ і $r \in R_a$. Якщо $r = 0$, то матриця A є простої структури з одним ненульовим власним значення $a = \operatorname{tr} A$, тобто A подібна дігональній матриці $S_A = \operatorname{diag}(a, 0, \ldots, 0)$, яка є формою Сміта матриці A. Враховуючи [3], отримуємо, що $A = \overline{0}_{n,n} (\operatorname{mod} a)$.

Якщо $r \neq 0$, то для оборотної матриці $T_0 = \begin{Vmatrix} e & 0 \\ -q & e \end{Vmatrix}$ виконується рівність $T_0 \begin{Vmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{Vmatrix} T_0^{-1} = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ r & 0 \end{Vmatrix}$. Отже, для оборотної матриці $V_3 = \begin{Vmatrix} T_0 & \bar{0}_{n-2,n-2} \\ \bar{0}_{n-2,n-2} & I_{n-2} \end{Vmatrix}$ отримуємо

$$V_3 A_2 V_3^{-1} = \begin{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a & 0 \\ r & 0 \end{Vmatrix} & \bar{0}_{2,n-2} \\ \bar{0}_{n-2,2} & \bar{0}_{n-2,n-2} \end{Vmatrix},$$

де $r \in R_a$, $a = \operatorname{tr} A$ − слід матриці A. Теорему доведено. ♦

З огляду на теорему 1 клас матриць рангу один із $M_{n,n}(R)$ розчленовується на *три підкласи відносно перетворення подібності.*

До *першого підкласу* віднесемо матриці рангу один, для яких $\operatorname{tr} A = 0$. Структура таких матриць відносно перетворення подібності описується наступним твердженням.

Наслідок 2. *Нільпотентні матриці* $A, B \in M_{n,n}(R)$ *рангу один подібні тоді й тільки тоді, коли найбільші спільні дільники елементів матриць* A *і* B *відповідно є асоційованими.*

До *другого класу* віднесемо матриці, які подібні діагональній матриці.

Наслідок 3. *Нехай* $A, B \in M_{n,n}(R)$ − *матриці рангу один. Нехай, далі,* $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = a$. *Якщо* $A = \bar{0}_{n,n} (\operatorname{mod} a)$ *і* $B = \bar{0}_{n,n} (\operatorname{mod} a)$, *то матриці* A *і* B *подібні.*

Зауважимо, що структура квадратних матриць рангу один над полем відносно перетворень подібності описується наслідками 2 і 3.

До *третього підкласу* віднесемо матриці, нормальна форма яких відносно перетворення подібності визначена неоднозначно. Цю форму опишемо наступним твердженням.

Наслідок 4. *Нехай для матриці* $A \in M_{n,n}(R)$ *рангу один маємо* $\operatorname{tr} A = a \neq 0$, *і* $A \neq 0 (\operatorname{mod} a)$. *Нехай, далі, матриця* A *перетворенням подібності зводиться до блочно-діагонального вигляду*

$$D_A = \operatorname{diag}\left(\begin{Vmatrix} a & 0 \\ r & 0 \end{Vmatrix}, \ \bar{0}_{n-2,n-2} \right),$$

де $r \in R_a$. *Якщо ж матриця* A *перетворенням подібності зводиться до іншого блочно-діагонального вигляду* $\tilde{D}_A = \operatorname{diag}\left(\begin{Vmatrix} a & 0 \\ r_1 & 0 \end{Vmatrix}, \ \bar{0}_{n-2,n-2} \right)$, *де* $r_1 \in R_a$ *і* $r_1 \neq r$, *то існує елемент* $t \in U(R)$ *такий, що* $r_1 + rt = 0 (\operatorname{mod} a)$.

Д о в е д е н н я. Нехай для матриці $A \in M_{n,n}(R)$ рангу один виконується $\operatorname{tr} A = a \neq 0$ і $A \neq 0 (\operatorname{mod} a)$. Згідно з теоремою 1, припустимо, що A подібна матрицям D і $\tilde{D}_A$. Отже, матриці $\begin{Vmatrix} a & 0 \\ r & 0 \end{Vmatrix}$ і $\begin{Vmatrix} a & 0 \\ r_1 & 0 \end{Vmatrix}$ подібні. Легко перевірити, що для оборотної матриці $T_0 = \begin{Vmatrix} e & 0 \\ t_{21} & -t \end{Vmatrix}$, де $t \in U(R)$, виконується рівність

$$\begin{Vmatrix} e & 0 \\ t_{21} & -t \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a & 0 \\ r & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ r_1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} e & 0 \\ t_{21} & -t \end{Vmatrix}.$$

Виконавши множення в обох частинах останньої рівності, отримуємо, що $at_{21} - rt = r_1$, тобто $r + r_1 t = 0 \, (\mathrm{mod}\, a)$, де $t \in U(R)$. Наслідок доведено. ♦

Зауважимо, що за умов наслідку 4 матриця $A \in M_{n,n}(R)$ рангу один є лінійною комбінацією ідемпотентної та нільпотентної матриць рангу один.

Нехай $A \in M_{n,n}(R)$ − матриця з характеристичним многочленом $\det(I_n \lambda - A) = (\lambda - a)(\lambda - b)^{n-1}$, де $a, b \in R$. Якщо $\operatorname{rank}(I_n b - A) = 1$, то на підставі наслідків 2−4 легко встановити нормальні форми, до яких можна звести матрицю A за допомогою перетворень подібності.

3. Застосування. У цій частині статті наведемо застосування отриманих результатів до задачі про спільні власні вектори та триангуляризацію пари матриць рангу один. Кажуть, що пара матриць $A, B \in M_{n,n}(R)$ має спільний лівий власний вектор, якщо існує ненульовий вектор $\overline{u} \in M_{1,n}(R)$ такий, що $\overline{u}\, A = \overline{u}\, \alpha$ і $\overline{u}\, B = \overline{u}\, \beta$, де $\alpha, \beta \in R$. Аналогічно вводиться поняття спільного правого власного вектора матриць A і B. Очевидно, якщо матриці A і B мають спільний лівий власний вектор, то вони мають і спільний правий власний вектор. Надалі під терміном «спільний власний вектор» матриць A і B будемо розуміти, що A і B мають спільний лівий власний вектор.

Встановимо умови, за яких для пари матриць $A, B \in M_{n,n}(R)$ рангу один існує спільний власний вектор. Зазначимо, що задача про існування для пари матриць спільного власного вектора досліджувалась багатьма авторами. Постановки задач, огляд відомих результатів і встановлення умов, за яких для пари матриць $A, B \in M_{n,n}(R)$ існує спільний власний вектор, наведено в роботах [4, 18]. Наступне твердження і наслідок із нього описують клас пар матриць із $M_{n,n}(R)$, для яких існує спільний власний вектор.

Лема 2. *Нехай* $A, B \in M_{n,n}(R)$. *Якщо* $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B < n$, *то для матриць* A *і* B *існує спільний власний вектор.*

Д о в е д е н н я. Нехай $\operatorname{rank} A = p$ і $\operatorname{rank} B = q$. Для матриць A і B існують матриці $U_1, U_2 \in GL(n, R)$ такі, що $AU_1 = \left\| A_1 \quad \overline{0}_{n,n-p} \right\|$ і $BU_2 = \left\| B_1 \quad \overline{0}_{n,n-q} \right\|$, де $A_1 \in M_{n,p}(R)$, $\operatorname{rank} A_1 = p$ і $B_1 \in M_{n,q}(R)$, $\operatorname{rank} B_1 = q$. На підставі цього отримуємо

$$\left\| A \quad B \right\| \left\| \begin{matrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{matrix} \right\| = \left\| A_1 \quad \overline{0}_{n,n-p} \quad B_1 \quad \overline{0}_{n,n-q} \right\|. \tag{6}$$

Оскільки $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B < n$, то з рівності (6) отримуємо, що $\operatorname{rank} \left\| A_1 \;\; B_1 \right\| < n$.

Отже, для матриці $\left\| A_1 \quad B_1 \right\|$ існує ненульовий вектор $\overline{u} \in M_{1,n}(R)$ такий, що $\overline{u} \left\| A_1 \quad B_1 \right\| = \overline{0}_{1,p+q}$. Очевидно, що вектор $\overline{u}$ є спільним власним вектором матриць A і B, тобто $\overline{u}\, A = \overline{0}_{1,n}$ і $\overline{u}\, B = \overline{0}_{1,n}$. Лему доведено. ♦

Наслідок 5. *Нехай* $A, B \in M_{n,n}(R)$ *− матриці рангу один. Якщо* $n \geq 3$, *то для матриць* A *і* B *існує спільний власний вектор.*

Встановимо умови, за яких для пари матриць $A, B \in M_{n,n}(R)$, кожна з яких має ранг один, існує спільний власний вектор.

Теорема 2. *Для пари матриць* $A, B \in M_{n,n}(R)$, *кожна з яких має ранг один, існує спільний власний вектор тоді й тільки тоді, коли комутатор*

$$[A, B] = AB - BA$$

є особливою матрицею.

Д о в е д е н н я *необхідності* проводиться подібно, як і доведення необхідності в теоремі 1 з роботи [4].

Достатність. Якщо $n \geq 3$, то достатність випливає з наслідку 5. Розглянемо випадок, коли $n = 2$. Згідно з теоремою 1, матриця $A \in M_{2,2}(R)$ подібна матриці $A_1 = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ r & 0 \end{Vmatrix} = TAT^{-1}$, де $T \in GL(2, R)$. Покладемо

$$TBT^{-1} = B_1 = \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, що для матриць A і B існує спільний власний вектор тоді й тільки тоді, коли для матриць A_1 і B_1 існує спільний власний вектор. Тоді

$$T[A,B]T^{-1} = [A_1, B_1] = \begin{Vmatrix} -r\beta_{12} & a\beta_{12} \\ r(\beta_{12} - \beta_{22}) - a\beta_{21} & r\beta_{12} \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Оскільки $\operatorname{rank}[A,B] < 2$, то $\operatorname{rank}[A_1, B_1] < 2$. Отже, $\det[A_1, B_1] = 0$. Останню рівність запишемо в розгорнутому вигляді:

$$-\beta_{12}\left(r^2\beta_{12} + ar(\beta_{12} - \beta_{22}) + a^2\beta_{21}\right) = 0. \tag{8}$$

Нехай $r = 0$. Із рівності (8) отримуємо, що $\beta_{12} = 0$ або $\beta_{21} = 0$. Якщо $\beta_{12} = 0$, то вектор $\bar{u}_1 = \|e \quad 0\| \in M_{1,2}(R)$ є спільним власним вектором матриць A_1 і B_1. Якщо $\beta_{12} \neq 0$, а $\beta_{21} = 0$, то на підставі рівності (7) отримуємо, що $\bar{u}_2 = \|0 \quad e\| \in M_{1,2}(R)$ є спільним власним вектором матриць A_1 і B_1.

Якщо ж $a = 0$, то із рівності (7) отримуємо, що $\beta_{12} = 0$ і вектор $\bar{u}_1$ є спільним власним вектором матриць A_1 і B_1.

Нехай $a \neq 0$ і $r \neq 0$. Не обмежуючи загальності, припустимо, що елементи a і r є взаємно простими, тобто їх найбільший спільний дільник $(a, r) = e$. Тепер із рівності (8) отримуємо, що $\beta_{12} = 0$, або

$$r(r\beta_{12} - a\beta_{22}) = -a(r\beta_{11} - a\beta_{21}). \tag{9}$$

Очевидно, що при $\beta_{12} = 0$ вектор $\bar{u}_1$ є спільним власним вектором матриць A_1 і B_1. Якщо $\beta_{12} \neq 0$, то з рівності (9) випливає, що

$$r\beta_{12} - a\beta_{22} = ay,$$

$$r\beta_{11} - a\beta_{21} = rx.$$

Враховуючи рівність (9) отримуємо, що $x = y$. Тепер із останньої системи рівностей випливає

$$\|r \quad -a\| \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{Vmatrix} = \|r \quad -a\|,$$

тобто вектор $\bar{u}_0 = \|r \quad -a\|$ є власним вектором матриці B_1 і $\bar{u}_0 A_1 = 0_{1,2}$. Отже, вектор $\bar{u}_0$ є спільним власним вектором матриць A_1 і B_1. Теорему доведено. ♦

Теорема 3. *Матриці* $A, B \in M_{n,n}(R)$ *рангу один триангуляризуються тоді й тільки тоді, коли комутатор* $[A,B] = AB - BA$ *є нільпотентною матрицею.*

Д о в е д е н н я теореми аналогічне до доведення теореми 2 з [18]. ♦

1. *Груневальд Ф., Иыуду Н. К.* Задача сопряжения для 2×2-матриц над кольцами многочленов // Современная математика и ее приложения (АН Грузии. Ин-т кибернетики). – 2005. – **30**, Ч. 3. – С. 31–45.
2. *Нечаев А. А.* О подобии матриц над коммутативным локальным артиновым кольцом // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – 1983. – Вып. 9. – С. 81–101.
   Те саме: *Nechaev A. A.* Similarity of matrices over a commutative artinian local ring // J. Sov. Math. – 1986. – **33**, No. 5. – P. 1221–1237.
3. *Прокіп В. М.* Діагоналізація матриць над областю головних ідеалів з мінімальним многочленом $m(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$, $\alpha \neq \beta$ // Укр. мат. вісн. – 2010. – **7**, № 2. – С. 212–219.
   Те саме: *Prokip V. M.* Diagonalization of matrices over the domain of principal ideals with minimal polynomial $m(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$, $\alpha \neq \beta$ // J. Math. Sci. – 2011. – **174**, No. 4. – P. 481–485.
4. *Прокіп В. М.* Триангуляризація пари матриць над областю головних ідеалів з мінімальними квадратичними многочленами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58,** № 1. – С. 42–46.
   Те саме: *Prokip V. M.* Triangularization of a pair of matrices over the domain of principal ideals with minimal quadratic polynomials // J. Math. Sci. – 2017. – **222**, No. 1. – P. 50–55.
5. *Саркисян Р. А.* Проблема сопряженности для наборов целочисленных матриц // Мат. заметки. – 1979. – **25**, № 6. – С. 811–824.
   Те саме: *Sarkisyan R. A.* Conjugacy problem for sets of integral matrices // Math. Notes. – 1979. – **25**, No. 6. – P. 419–426.
6. *Сидоров С. В.* О подобии матиц с целочисленным спектром над кольцом целых чисел // Изв. вузов. Математика. – 2011. – № 3. – С. 86–94.
   Те саме: *Sidorov S. V.* Similarity of matrices with integer spectrum over the ring of integers // Russian Math. (Iz. VUZ). – 2011. – **55**, No. 3. – P. 77–84.
7. *Фаддеев Д. К.* Об эквивалентности систем целочисленных матриц // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1966. – **30**, № 2. – С. 449–454.
8. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – Москва: Мир, 1989. – 655 с.
   Те саме: *Horn R. A., Johnson C. R.* Matrix analysis. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. – 561 p.
9. *Alaminos J., Brešar M., Extremera J., Villena A. R.* On bilinear maps determined by rank one idempotents // Linear Algebra Appl. – 2010. – **432**, No. 2-3. – P. 738–743.
10. *Brown W. C.* Matrices over commutative rings. – New York, etc.: Marcel Dekker, 1993. – viii+281 p.
    https://docs.google.com/file/d/0B83IpsamKSiLRlctLUJmLVJtVFk/preview.
11. *Bru R., Cantó R., Urbano A. M.* Eigenstructure of rank one updated matrices // Linear Algebra Appl. – 2015. – **485**. – P. 372–391.
12. *Deguang H., Limaye B. V.* On a spectral characterization of rank one matrices // Linear Algebra Appl. – 1991. – **143**. – P. 1–6.
13. *Florentino Carlos A. A.* Simultaneous similarity and triangularization of sets of 2×2 matrices // Linear Algebra Appl. – 2009. – **431**, No. 9. – P. 1652–1674.
14. *Grunewald F., Mennicke J.* Solution of the conjugacy problem in certain arithmetic groups // In: Word problems, II (Conf. on Decision Problems in Algebra, Oxford, 1976), Stud. Logic Foundations Math. – 1980. – Vol. 95. – P. 101–139.
15. *Guralnick R. M.* Similarity of matrices over commutative rings // Linear Algebra Appl. – 1991. – **157**. – P. 55–68.
16. *Osnaga S. M.* On rank one matrices and invariant subspases // Balk. J. Geom. Appl. – 2005. – **10**, No. 1. – P. 145–148.
17. *Prokip V.* On similarity of matrices over commutative rings // Linear Algebra Appl. – 2005. – **399**. – P. 225–233.
18. *Prokip V. M.* Simultaneous triangularization of a pair of matrices over a principal ideal domain with quadratic minimal polynomials // In: Advances in Linear Algebra Research. – New York: Nova Sci. Publisher, 2015. – P. 287–297.
19. *Taussky O.* Simultaneous similarities of pairs of 2×2 integral symmetric matrices // Rocky Mountain J. Math. – 1989. – **19**, No. 3. – P. 957–966.
    http://projecteuclid.org/all/euclid.rmjm.
20. *Tian H.* All solutions of the Yang–Baxter-like matrix equation for rank-one matrices // Appl. Math. Lett. – 2016. – **51**. – P. 55–59.

21. *Wang L., Fan Y., Ma X.* On bilinear maps determined by rank one matrices with some applications // Linear Algebra Appl. – 2011. – **434**, No. 5. – P. 1354–1361.

СТРУКТУРА МАТРИЦ РАНГА ОДИН НАД ОБЛАСТЬЮ ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ

Исследуется структура матриц ранга один над областью главных идеалов относительно преобразований эквивалентности и подобия. Установлена нормальная форма матрицы ранга один относительно преобразования подобия. Предложены условия, при которых пара матриц ранга один преобразованием подобия приводится к треугольному виду.

THE STRUCTURE OF MATRICES OF RANK ONE OVER THE DOMAIN OF PRINCIPAL IDEALS WITH RESPECT TO SIMILARITY TRANSFORMATION

The structure of matrices of rank one over the domain of principal ideals respect to transformations of equivalence and similarity is investigated. The canonical form of matrices of rank one with respect to the similarity transformation is established. The conditions under which the pairs of matrices of rank one by a similarity transformation is reduced to triangular form are proposed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
04.01.16