УДК 517.956

І. М. Ісарюк, І. Д. Пукальський

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З ІМПУЛЬСНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМИ

Розглянуто першу крайову задачу та односторонню крайову задачу з імпульсними умовами за часовою змінною для лінійного параболічного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку за просторовими змінними. За допомогою принципу максимуму та апріорних оцінок встановлено існування і єдиність розв'язків сформульованих задач у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

Вивчення систем з розривними траєкторіями пов'язано з розвитком техніки, в якій імпульсні умови керування відіграють значну роль. Імпульсні системи виникають в багатьох задачах природознавства, при дослідженні яких відповідні математичні моделі містять умови, які визначають вплив зовнішніх сил імпульсної природи. Задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією вивчались у працях А. М. Самойленка, О. М. Перестюка [7, 10] та інших авторів.

Питання існування розв'язків рівняння із частинними похідними гіперболічного типу з імпульсною дією вивчались у працях [1, 8, 12]. Класичним розв'язкам задачі Коші для параболічних систем з імпульсною дією присвячено другий розділ монографії [5].

Рівняння з виродженнями та особливостями за просторовими змінними описують різні процеси. Зокрема, рівнянням із сингулярним оператором Бесселя у тілах із симетрією моделюються дифузійні процеси та радіальні коливання. Дослідження питань існування і якісних властивостей розв'язків крайових задач для рівнянь із виродженнями проведені у працях [2–6, 9].

У пропонованій статті вивчається перша крайова задача та одностороння крайова задача для лінійного параболічного рівняння із степеневими особливостями довільного порядку у коефіцієнтах рівняння і крайових умов за просторовими змінними та імпульсною дією за часовою змінною у визначені моменти часу. Доведено існування та встановлено оцінки похідних розв'язку поставлених задач у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

1. Постановка задачі та основні обмеження. Нехай $(x_1,\ldots,x_n)$ – координати точки $x\in\mathbb{R}^n$; $\Omega_j=\{x,\ x\in\mathbb{R}^n,\ x_j=0\}$, $\Omega=\bigcup_{j=1}^{n}\Omega_j$; D – обмежена область з множини $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D така, що $\partial D\cap\Omega\neq\varnothing$; $Q=[t_0,t_{N+1})\times D$, $t_0,t_1,\ldots,t_N,t_{N+1}$ – фіксовані додатні числа, $t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{N+1}$, $Q_{(0)}=$ $=\{(t,x)\mid t\in[t_0,t_{N+1}),\ x\in\Omega\}$.

В області Q розглянемо задачі знаходження функцій $u(t,x)$, які при $t\neq t_\lambda$, $\lambda\in\{1,\ldots,N\}$, $x\in D\backslash\Omega$, задовольняють рівняння

$$(Lu)(t,x)=\left[\partial_t-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}A_i(t,x)\partial_{x_i}+A_0(t,x)\right]u(t,x)=$$

$$=f(t,x)\,, \tag{1}$$

умови за змінною t:

$$u(t_0+0,x)=\varphi_0(x)\,, \tag{2}$$

$$u(t_\lambda+0,x)-u(t_\lambda-0,x)=d_\lambda(x)u(t_\lambda-0,x)+\varphi_\lambda(t_\lambda,x) \tag{3}$$

і одну з крайових умов:

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[u(t,x)-\psi(t,x)\right]=0\,,$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D}u(t,x)\ge 0,\qquad \lim_{x\to z\in\partial D}\{u(\mathcal{B}u-g)\}(t,x)=0\,,\tag{4}$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D}(\mathcal{B}u-g)(t,x)\equiv\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{k=1}^{n}b_k(t,x)\partial_{x_k}u+b_0(t,x)u-g(t,x)\right]\ge 0\,.\tag{5}$$

Виродження коефіцієнтів рівняння (1) і крайових умов (5) у точці $P(t,x)\in D$ будемо характеризувати функцією $s(\beta_i,x_i)=\begin{cases}|x_i|^{\beta_i}, & |x_i|\le 1,\\ 1, & |x_i|\ge 1,\end{cases}$ де β_i − дійсні числа, $i\in\{1,\dots,n\}$, $\beta_i\in(-\infty,+\infty)$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$.

Позначимо q, ℓ, γ, μ_j, δ, α − дійсні числа, $\alpha\in(0,1)$, $\gamma\ge 0$, $\mu_j\ge 0$, $j\in\{0,1,\dots,n\}$, $\delta\ge 0$, $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$, $[\ell]$ − ціла частина ℓ, $\ell=[\ell]+\{\ell\}$, ℓ, q − додатні фіксовані числа.

Нехай $\bar D=D\bigcup\partial D$, $\bar Q=[t_0,t_{N+1})\times\bar D$, $P_1^{(k)}(\tau_k^{(1)},x^{(1)})$, $H_i^{(k)}(\tau_k^{(1)},x^{(2)})$, $P^{(k)}(\tau_k,x)$, $M_i^{(k)}(\tau_k^{(2)},x^{(2)})$, $i\in\{1,\dots,n\}$ − довільні точки області $\bar Q^{(k)}=$ $=[t_k,t_{k+1})\times D$, $k\in\{0,\dots,N\}$, $x^{(1)}=(x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)}=(x_1^{(1)},\dots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)},$ $x_{i+1}^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, $S(\gamma,x)=\min_i\{s(\gamma,x_i)\}$.

Означимо функціональні простори, в яких будемо розглядати задачі (1)−(5).

$C^{\ell}(\gamma;\beta;q;Q)$ − множина функцій u, які мають неперервні частинні похідні в $\bar Q^{(k)}\backslash Q_{(0)}$ вигляду $\partial_t^i\partial_x^r u$, $2i+|r|\le[\ell]$ зі скінченним значенням норми

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_{\ell}=\sup_k\left\{\sum_{2i+|r|\le[\ell]}\left\|u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}\right\|_{2i+|r|}+\left\langle u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}\right\rangle_{\ell}\right\}\equiv$$

$$\equiv\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_{[\ell]}+\langle u;\gamma;\beta;q;Q\rangle_{\ell}\,,$$

де, наприклад,

$$\left\|u;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_0=\sup_{P^{(k)}\in\bar Q^{k}}\left|u(P^{(k)}(\tau_k,x))\right|\equiv\left\|u;Q^{(k)}\right\|_0,$$

$$\left\|u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}\right\|_{[\ell]}=\sum_{2i+|r|\le[\ell]}\sup_{P^{(k)}\in\bar Q^{(k)}}S\big(q+(2i+|r|)\gamma,x\big)\left|\partial_t^i\partial_x^r u(P^{(k)})\right|\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}s(-r_j\beta_j,x_j)\,,$$

$$\left\langle u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}\right\rangle_{\ell}=\sum_{2i+|r|=[\ell]}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\sup_{(P_1^{(k)},H_\nu^{(k)})\subset\bar Q^{(k)}}\left[S(q+\ell\gamma,\tilde x)\times\right.\right.$$

$$\times\left|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}\right|^{-\{\ell\}}\left|\partial_t^i\partial_x^r u(P_1^{(k)})-\partial_t^i\partial_x^r u(H_\nu^{(k)})\right|s(-\{\ell\}\beta_\nu,\tilde x)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}s(-r_j\beta_j,\tilde x_j)+\sum_{\nu=1}^{n}\sup_{(M_\nu^{(k)},H_\nu^{(k)})\subset Q^{(k)}}S(q+\ell\gamma,x^{(2)})\times$$

$$\left.\left.\times\prod_{j=1}^{n}s\big(-r_j\beta_j,x_j^{(2)}\big)\left|\tau_k^{(1)}-\tau_k^{(2)}\right|^{\{\ell/2\}}\left|\partial_t^i\partial_x^r u(M_\nu^{(k)})-\partial_t^i\partial_x^r u(H_\nu^{(k)})\right|\right]\right\}.$$

Тут $S(a,\tilde{x}) = \min\{S(a,x^{(1)}), S(a,x^{(2)})\}$, $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ − мультиіндекс на невід'ємних цілих числах, $|r| = r_1 + \ldots + r_n$, $\partial_x^r = \partial_{x_1}^{r_1} \ldots \partial_{x_n}^{r_n}$.

Позначимо через Γ_1 множину точок межі $\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D$, у яких виконується умова

$$\lim_{x \to z \in \partial D} u(t_\lambda, x) = 0, \qquad \lambda \in \{0, 1, \ldots, N\}.$$

Тоді з крайової умови (5) випливає, що в точках (t_λ, x) межі $\Gamma_2 = \Gamma \backslash \Gamma_1$ буде виконуватись умова

$$\lim_{x \to z \in \partial D} (\mathcal{B}u - g)(t_\lambda, x) = 0.$$

Нехай для параметрів задачі (1)–(5) виконуються такі умови:

1°. Для довільного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ справджується нерівність

$$\pi_1 |\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} s(\beta_i, x_i) s(\beta_j, x_j) A_{ij}(t,x)\, \xi_i \xi_j \le \pi_2 |\xi|^2,$$

π_1, π_2 − фіксовані додатні сталі і $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, $s(\beta_i, x_i) s(\beta_j, x_j) A_{ij} \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; Q)$, $s(\mu_i, x) A_i \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; Q)$, $S(\mu_0, x) A_0 \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; Q)$, $\inf_{\bar{Q}} A_0 \equiv a > 0$, $f \in C^\alpha(\gamma; \beta; \mu_0; Q)$, $\varphi_0 \in C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$, $\varphi_\lambda \in C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_\lambda))$, $d_\lambda \in C^{2+\alpha}(D)$, поверхня $\partial D \in C^{2+\alpha}$.

2°. $\psi \in C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q^{(\lambda)})$, $\lambda \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $\psi(t_\lambda + 0, x) - \psi(t_\lambda - 0, x) = d_\lambda(x) \psi(t_\lambda - 0, x) + \varphi_\lambda(t_\lambda, x)$, $\gamma = \max\left\{\max_i (1 + \beta_i), \max_i (\mu_i - \beta_i), \frac{\mu_0}{2}\right\}$.

3°. Вектори $\mathbf{b}^{(s)} = \{s(\beta_1, x_1) b_1, \ldots, s(\beta_n, x_n) b_n\}$ і $\mathbf{b} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ утворюють з напрямком зовнішньої нормалі $\mathbf{n}$ до Γ у точці $P(t,x) \in \Gamma$ кут, менший ніж $\frac{\pi}{2}$; $s(\beta_i, x_i) b_i \in C^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $S(\delta, x) b_0 \in C^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $b_0(t,x)\big|_\Gamma > 0$, $g \in C^{1+\alpha}(\gamma; \beta; \delta; Q)$, $\gamma = \max\left\{\max_i (1 + \beta_i), \max_i (\mu_i - \beta_i), \frac{\mu_0}{2}, \delta\right\}$.

4°. У точках $(t_\lambda, z) \in \Gamma_2$ виконуються умови $(\mathcal{B}\varphi_0 - g)(t_0, z) = 0$, $g(t_\lambda + 0, z) - g(t_\lambda - 0, z) = d_\lambda(z) g(t_\lambda - 0, z) + \mathcal{B}\varphi_\lambda(t_\lambda, z)$, $\sum_{k=1}^{n} b_k(t,z) \frac{\partial d_\lambda}{\partial z_k} = 0$; у точках $(t_\lambda, z) \in \Gamma_1$ виконуються умови $\varphi_0(z) = 0$, $\varphi_\lambda(t_\lambda, z) = 0$.

Справджуються такі теореми.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1)–(4) *виконуються умови* ***1°***, ***2°***. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(4) *із простору* $C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$ *і виконується нерівність*

$$\begin{aligned}\|u; \gamma; \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \le c \Bigg\{ &\sum_{k=1}^{N} \prod_{\lambda=k}^{N} \left(1 + \|d_\lambda; Q \cap (t = t_\lambda)\|_0\right) \times \\ &\times \left(\|\varphi_{k-1}; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_{k-1})\|_{2+\alpha} + \left\|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(k-1)}\right\|_\alpha + \right. \\ &\left. + \left\|\psi; \gamma; \beta; 0; Q^{(k-1)}\right\|_{2+\alpha}\right) + \|\varphi_N; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_N)\|_{2+\alpha} + \\ &+ \left\|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(N)}\right\|_\alpha + \left\|\psi; \gamma; \beta; \delta; Q^{(N)}\right\|_{2+\alpha} \Bigg\}.\end{aligned}$$

Теорема 2. *Якщо для задачі* (1)–(3), (5) *виконуються умови* ***1°–3°***, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(3), (5) *із простору* $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ *і справджується нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c\left\{\sum_{k=1}^{N}\prod_{\lambda=k}^{N}(1+\|d_\lambda;Q\cap(t=t_\lambda)\|_0)\times\right.$$

$$\times\left(\|\varphi_{k-1};\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha}+\left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k-1)}\right\|_\alpha+\right.$$

$$\left.+\left\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k-1)}\right\|_{1+\alpha}\right)+\|\varphi_N;\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_N)\|_{2+\alpha}+$$

$$\left.+\left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(N)}\right\|_\alpha+\left\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(N)}\right\|_{1+\alpha}\right\}.$$

Для дослідження задач (1)–(5) встановимо спочатку існування та єдиність розв'язків множин крайових задач із гладкими коефіцієнтами. З множин одержаних розв'язків виділимо збіжні підпослідовності, граничні значення яких будуть розв'язками задач (1)–(5).

2. Оцінка розв'язків крайових задач із гладкими коефіцієнтами. Нехай $Q_m = Q\cap\{(t,x)\in Q \mid s(1,x_i)\ge m^{-1}\}$, $m\ge 1$, – послідовність областей, яка при $m\to\infty$ збігається до Q.

Розглянемо в області Q задачі про знаходження функцій $u_m(t,x)$, які при $t\ne t_\lambda$ задовольняють рівняння

$$(L_1u_m)(t,x)=\left[\partial_t-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(t,x)\partial_{x_i}+a_0(t,x)\right]u_m(t,x)=$$

$$=f_m(t,x), \tag{6}$$

умови за змінною t:

$$u_m(t_0+0,x)=\varphi_m^{(0)}(x), \tag{7}$$

$$u_m(t_\lambda+0,x)-u_m(t_\lambda-0,x)=d_\lambda(x)u_m(t_\lambda-0,x)+\varphi_m^{(\lambda)}(t_\lambda,x) \tag{8}$$

і одну з крайових умов:

$$u_m(t,x)\big|_\Gamma=\psi_m(t,x), \tag{9}$$

$$u_m(t,x)\big|_\Gamma\ge 0,\qquad [u_m(\mathcal{B}_1u_m-g_m)(t,x)]\big|_\Gamma=0,$$

$$(\mathcal{B}_1u_m-g_m)(t,x)\big|_\Gamma\equiv\left[\sum_{k=1}^{n}h_k(t,x)\partial_{x_k}u_m+h_0(t,x)u_m-g_m(t,x)\right]\Bigg|_\Gamma\ge 0\,. \tag{10}$$

Коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, h_k, h_0 та функції f_m, $\varphi_m^{(0)}$, $\varphi_m^{(\lambda)}$, ψ_m, g_m в області Q_m збігаються з коефіцієнтами A_{ij}, A_i, A_0, b_k, b_0 і функціями f, φ_0, φ_λ, ψ, g відповідно, а в областях $Q\backslash Q_m$ вони є неперервними продовженнями коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0, b_k, b_0 та функцій f, φ_0, φ_λ, ψ, g із областей Q_m в область $Q\backslash Q_m$ зі збереженням норм і гладкості [11, с. 82].

Справджується така

Теорема 3. *Нехай* $u_m(t,x)$ *– класичний розв'язок задачі* (1)–(4) *в області* Q *і виконуються умови* ***1°***, ***2°***. *Тоді для* $u_m(t,x)$ *маємо таку оцінку*:

$$|u_m(t,x)| \le \sum_{k=1}^{N}\left\{\prod_{\lambda=k}^{N}\left(1+\|d_\lambda; Q\cap(t=t_\lambda)\|_0\right)\left(\left\|\varphi_m^{(k-1)}; Q\cap(t=t_{k-1})\right\|_0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left\|f_m a_0^{-1}; Q^{(k-1)}\right\|_0 + \left\|\psi_m h_0^{-1}; Q^{(k-1)}\right\|_0\right)\right\} +$$

$$+ \left\|\varphi_m^{(N)}; Q\cap(t=t_N)\right\|_0 + \left\|f_m a_0^{-1}; Q^{(N)}\right\|_0 + \left\|\psi_m; Q^{(N)}\right\|_0 \equiv$$

$$\equiv A\left(f_m, \varphi_m^{(0)}, \varphi_m^{(N)}, \psi_m\right). \qquad (11)$$

Д о в е д е н н я. Нерівність (11) доводимо за схемою доведення теореми 2.1 із [4, с. 22], тобто аналізуємо всі можливі значення додатного максимуму і від'ємного мінімуму розв'язку $u_m(t,x)$. Нехай $\max\limits_{\bar{Q}^{(k)}} u_m(t,x) = u_m(R_1) > 0$. Якщо точка $R_1 \in [t_k, t_{k+1}) \times \partial D$, то, використовуючи умову (9), маємо

$$u_m(R_1) \le \sup_{\bar{Q}^{(k)}} \psi_m. \qquad (12)$$

Якщо $R_1(t,x) \in Q^{(k)}$, то в точці R_1 виконуються співвідношення

$$\partial_t u_m(R_1) \ge 0, \qquad \partial_{x_i} u_m(R_1) = 0, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(R_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m(R_1) \le 0 \qquad (13)$$

і задовольняється рівняння (6). З урахуванням (13) і рівняння (6) у точці R_1 виконується нерівність

$$u_m(R_1) \le \sup_{\bar{Q}^{(k)}} (f_m \cdot a_0^{-1}). \qquad (14)$$

У випадку, коли $R_1 \in \bar{D}$, з початкової умови (7) одержуємо

$$u_m \le \sup_{\bar{D}} \varphi_m^{(0)}.$$

Враховуючи нерівності (10), (12), (14), при $k=0$ одержимо

$$u_m(R_1) \le \left\|f_m a_0^{-1}; Q^{(0)}\right\|_0 + \left\|\varphi_m^{(0)}; D\right\|_0 + \left\|\psi_m; Q^{(0)}\right\|_0. \qquad (15)$$

Якщо $R_1 \in Q\cap(t=t_\lambda)$, то, враховуючи умову (8), одержимо співвідношення

$$u_m(R_1) \le \left(1+\|d_\lambda; Q\cap(t=t_\lambda)\|_0\right) \sup_{\bar{Q}^{(\lambda-1)}} u_m + \left\|\varphi_m^{(\lambda)}; Q\cap(t=t_\lambda)\right\|_0. \qquad (16)$$

Об'єднуючи нерівності (12), (14)–(16), маємо оцінку

$$u_m(t,x) \le A\left(f_m, \varphi_m^{(0)}, \ldots, \varphi_m^{(N)}, \psi_m\right).$$

Оцінку для найменшого від'ємного значення функції $u_m(t,x)$ доводимо аналогічно. ♦

Теорема 4. *Нехай* $u_m(t,x)$ – *класичний розв'язок задачі* (6)–(8), (10) *і виконуються умови* ***1°–3°***. *Тоді для* $u_m(t,x)$ *справджується оцінка*

$$|u_m(t,x)| \le \sum_{k=1}^{N}\left\{\prod_{\lambda=k}^{N}\left(1+\|d_\lambda; Q\cap(t=t_\lambda)\|_0\right)\left(\left\|\varphi_m^{(k-1)}; Q\cap(t=t_{k-1})\right\|_0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left\|f_m a_0^{-1}; Q^{(k-1)}\right\|_0 + \left\|g_m h_0^{-1}; Q^{(k-1)}\right\|_0\right)\right\} +$$

$$+\left\|\varphi_m^{(N)};Q\bigcap(t=t_N)\right\|_0+\left\|f_m a_0^{-1};Q^{(N)}\right\|_0+\left\|g_m h_0^{-1};Q^{(N)}\right\|_0\equiv$$

$$\equiv A_1\left(f_m,\varphi_m^{(0)},\ldots,\varphi_m^{(N)},g_m\right). \tag{17}$$

Для д о в е д е н н я нерівності (17) аналізуємо всі можливі значення додатного максимуму і від'ємного мінімуму розв'язку за схемою доведення теорем 2.2 з [4, с. 25].

Усі можливі ситуації співпадають з розглянутими в теоремі 3. Відмінність в одержаних оцінках маємо лише у випадку, коли $\max\limits_{\bar Q^{(k)}} u_m(t,x)=$ $=u_m(R_1)$, $R_1\in\Gamma_2$. Оскільки $\dfrac{du_m(R_1)}{d\mathbf{b}}\ge 0$ (вектор $\mathbf{b}$ задовольняє умови ***3°***), то з рівності $(\mathcal{B}_1u_m-g_m)(R_1)=0$ маємо

$$u_m(R_1)\le\sup_{\bar Q^{(k)}}(g_m\cdot h_0^{-1}). \tag{18}$$

Нехай $\min\limits_{\bar Q^{(k)}} u_m(t,x)=u_m(R_2)$. Якщо точка $R_2\in\Gamma_2$, то $\dfrac{du_m(R_2)}{d\mathbf{b}}\le 0$. Враховуючи умову (10), маємо

$$u_m(R_2)\ge\inf_{\bar Q^{(k)}}(g_m\cdot h_0^{-1}).$$

Об'єднуючи нерівності (14), (15)–(18), одержуємо оцінку

$$u_m(t,x)\le A_1(f_m,\varphi_m^{(0)},\ldots,\varphi_m^{(N)},g_m).$$

Аналогічно одержуємо оцінку найменшого від'ємного значення функції $u_m(t,x)$.

В області $Q^{(k)}$ розглянемо крайові задачі:

$$(L_1u_m)(t,x)=f_m(t,x),\qquad u_m(t_k+0,x)=\tilde G_m^{(k)}(t_k,x), \tag{19}$$

$$u_m(t,x)\big|_{\Gamma^{(k)}}=\psi_m(t,x),\qquad u_m(t,x)\big|_{\Gamma^{(k)}}\ge 0, \tag{20}$$

$$(\mathcal{B}_1u_m-g_m)(t,x)\big|_{\Gamma^{(k)}}\ge 0,\quad u_m(\mathcal{B}_1u_m-g_m)(t,x)\big|_{\Gamma^{(k)}}=0, \tag{21}$$

де

$$\Gamma^{(k)}=[t_k,t_{k+1})\times\partial D,\qquad \tilde G_m^{(0)}(t_0,x)=\varphi_m^{(0)}(x),$$

$$\tilde G_m^{(k)}(t_k,x)=\left(1+d_k(x)\right)u_m(t_k-0,x)+\varphi_m^{(k)}(t_k,x),$$

$$x\in Q\bigcap(t=t_k),\qquad k\in\{1,\ldots,N\}.$$

При виконанні умов ***1°–4°*** розв'язки крайових задач (19)–(21) в області $Q^{(k)}$ існують і є єдиними в просторі $C^{2+\alpha}(Q^{(k)})$ [11, 12]. Знайдемо оцінку похідних від розв'язків $u_m(t,x)$.

Введемо у просторах $C^{2+\alpha}(Q)$ норму $\|u_m;\gamma;\beta;q;Q\|_{2+\alpha}$, еквівалентну при кожному фіксованому m гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і норма $\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_\ell$, у якій замість функцій $s(\beta_i,x_i)$ беремо $d(\beta_i,x_i)$, де

$$d(\beta_i,x_i)=\begin{cases}\max\{s(\beta_i,x_i),m^{-\beta_i}\}, & \beta_i\ge 0,\\ \min\{s(\beta_i,x_i),m^{-\beta_i}\}, & \beta_i<0,\end{cases}$$

і замість $S(\gamma,x)$ беремо $R(\gamma,x)=\min\limits_i d(\gamma,x_i)$.

Теорема 5. *Якщо виконуються умови теореми* 1, *то для розв'язку задачі* (6)–(9) *справджується нерівність*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c\sum_{k=1}^{N}\left\{\prod_{\lambda=k}^{N}\left(1+\|d_\lambda;Q\cap(t=t_\lambda)\|_0\right)\times\right.$$

$$\times\left(\|\varphi_{k-1};\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha}+\left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k-1)}\right\|_\alpha+\right.$$

$$\left.\left.+\left\|\psi;\gamma;\beta;0;Q^{(k-1)}\right\|_{2+\alpha}\right)\right\}+\|\varphi_N;\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_N)\|_{2+\alpha}+$$

$$+\left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(N)}\right\|_\alpha+\left\|\psi;\gamma;\beta;0;Q^{(N)}\right\|_{2+\alpha}. \tag{22}$$

Д о в е д е н н я. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [9, 11], маємо

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha} \le (1+\varepsilon^\alpha)\left\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\rangle_{2+\alpha}+c(\varepsilon)\left\|u_m;Q^{(k)}\right\|_0,$$

де ε – довільне дійсне число із $(0,1)$. Тому достатньо оцінити півнорму $\left\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\rangle_{2+\alpha}$. Із означення півнорми випливає існування в області $Q^{(k)}$ точок $P_1^{(k)}$, $M_i^{(k)}$, $H_i^{(k)}$, для яких виконується одна із нерівностей

$$\frac{1}{2}\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha} \le E_e, \qquad e\in\{1,2\}, \tag{23}$$

де

$$E_1 = \sum_{2i+|r|=2}\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^{(1)}-x_j^{(2)}\right|^{-\alpha}R((2+\alpha)\gamma,\tilde{x})d(-\alpha\beta_j,\tilde{x}_j)\times$$

$$\times\prod_{\nu=1}^{n}d(-r_\nu\beta_\nu,\tilde{x}_\nu)\left|\partial_t^i\partial_x^r u_m(H_j^{(k)})-\partial_t^i\partial_x^r u_m(P_1^{(k)})\right|,$$

$$E_2 = \sum_{2i+|r|=2}\sum_{j=1}^{n}\left|\tau^{(1)}-\tau^{(2)}\right|^{-\alpha/2}R((2+\alpha)\gamma,x^{(2)})\times$$

$$\times\prod_{\nu=1}^{n}d(-r_\nu\beta_\nu,x_\nu^{(2)})\left|\partial_t^i\partial_x^r u_m(M_j^{(k)})-\partial_t^i\partial_x^r u_m(H_j^{(k)})\right|.$$

Тут $R(\gamma,\tilde{x})=\min\{R(\gamma,x^{(1)}),R(\gamma,x^{(2)})\}$.

Якщо $\left|\tau_k^{(1)}-\tau_k^{(2)}\right| \ge R(2\gamma;\tilde{x})\dfrac{\varepsilon_1}{16}\equiv T_1$ – довільне число, $\varepsilon_1\in(0,1)$, то

$$E_1 \le 2\varepsilon_1^{-\alpha}\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_2. \tag{24}$$

Якщо $\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right| \ge n^{-1}R(\gamma;\tilde{x})d(-\beta_i,\tilde{x}_i)\dfrac{\varepsilon_1}{4}\equiv T_2$, то

$$E_2 \le 2\varepsilon_1^{-\alpha}\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_2. \tag{25}$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності до (24), (25), знаходимо

$$E_e \le \varepsilon^{-\alpha}\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{(2+\alpha)}+c(\varepsilon)\left\|u_m;Q^{(k)}\right\|_0, \qquad e\in\{1,2\}. \tag{26}$$

Нехай $\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|\le T_2$, $\left|\tau_k^{(1)}-\tau_k^{(2)}\right|\le T_1$. Будемо вважати, що $\left|x_i^{(1)}-z_i\right|\ge$ $\ge 4T_2$, $z\in\partial D$ і $d(\gamma,\tilde{x}_i)\equiv d(\gamma,x_i^{(1)})$, $P_1^{(k)}(\tau_k^{(1)},x^{(1)})\in Q^{(k)}$, $k\in\{1,\dots,N\}$.

В області $Q^{(k)}$ задачу (6)–(9) запишемо у вигляді

$$(L_2 v_m)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1^{(k)})\partial_{x_i}\partial_{x_j}\right] v_m = \sum_{i,j=1}^{n}\left[a_{ij}(P) - a_{ij}(P_1^{(k)})\right]\times$$

$$\times\, \partial_{x_i}\partial_{x_j} v_m - \sum_{i=1}^{n} a_i(P)\partial_{x_i} v_m - a_0(P)v_m + f_m(P) -$$

$$-\,(L_1\psi_m)(t,x) \equiv F_m^{(1)}(P; v_m) + F_m(P), \tag{27}$$

$$v_m(t_k+0,x) = G_m^{(k)}(t_k,x), \tag{28}$$

$$v_m(t,x)\big|_{\Gamma^{(k)}} = 0, \tag{29}$$

де $v_m(t,x) = u_m(t,x) - \psi_m(t,x)$, $G_m^{(0)}(t,x) = \varphi_m^{(0)}(x) - \psi_m(0,x)$, $G_m^{(k)}(t,x) =$ $= (1 + d_k(x))v_m(t_k-0,\, x) + \varphi_m^{(k)}(t_k,\, x) - \psi_m(t_k+0,\, x) + (1+d_k(x))\psi_m(t_k-0,\, x)$, $x \in Q \bigcap (t = t_k)$, $k \in \{1,2,\dots,N\}$.

Нехай $V_{\varepsilon_2}^{(k)}$ – область із $Q^{(k)}$, $V_{\varepsilon_2}^{(k)} = \left\{(t,x)\in Q^{(k)} : \left|\tau_k - \tau_k^{(1)}\right| \le \varepsilon_2^2 T_1,\right.$ $\left.\left|x_j - x_j^{(1)}\right| \le \varepsilon_2 T_2,\ j\in\{1,\dots,n\}\right\}$. Виконавши у задачі (27)–(29) заміну $v_m(t,x) =$ $= \omega_m(t,y)$, де $y_j = d(\beta_j, x_j^{(1)})x_j$, одержимо

$$(L_3\omega_m)(t,y) \equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1^{(k)})\, d(\beta_i, x_i^{(1)})\, d(\beta_j, x_j^{(1)})\partial_{y_i}\partial_{y_j}\right]\omega_m =$$

$$= F_m^{(1)}(t,\tilde y; \omega_m) + F_m(t,\tilde y),$$

$$\omega_m(t_k+0,y) = G_m^{(k)}(t_k,\tilde y),$$

$$\omega_m(t,y)\big|_{\Gamma^{(k)}} \equiv 0.$$

Тут $\tilde y = \left(d(-\beta_1, x_1^{(1)})x_1, \dots, d(-\beta_n, x_n^{(1)})x_n\right)$.

Позначимо $y_i^{(1)} = d(\beta_1, x_1^{(1)})x_i^{(1)}$, $W_{\varepsilon_2}^{(k)} = \left\{(t,y) : \left|\tau_k - \tau_k^{(1)}\right| \le \varepsilon_2 T_1,\ \left|y_i - y_i^{(1)}\right| \le\right.$ $\left.\le \varepsilon_1\sqrt{T_1}\,\right\}$ і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta_k(t,y)$, яка задовольняє умови

$$\eta_k(t,y) = \begin{cases} 1, & (t,y)\in W_{1/2}^{(k)},\quad 0 \le \eta(t,y) \le 1, \\ 0, & (t,y)\notin W_{3/4}^{(k)},\quad \left|\partial_t^i\partial_y^r\eta\right| \le c_{ir}R(-(2i+|r|)\gamma, x^{(1)}). \end{cases}$$

Тоді функція $Z_m(t,y) = \omega_m(t,y)\eta_k(t,y)$ буде розв'язком задачі

$$(L_3 Z_m)(t,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1^{(k)})d(\beta_i, x_i^{(1)})d(\beta_j, x_j^{(1)})\times$$

$$\times\left\{\partial_{y_i}\eta_k\partial_{y_j}\omega_m + \partial_{y_j}\eta_k\partial_{y_i}\omega_m\right\} +$$

$$+\,\omega_m\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1^{(k)})d(\beta_i, x_i^{(1)})d(\beta_j, x_j^{(1)})\partial_{y_i}\partial_{y_j}\eta_k - \partial_t\eta_k\right] +$$

$$+\,\eta_k\left[F_m^{(1)} + F_m\right] \equiv F_m^{(2)} + \eta_k F_m, \tag{30}$$

$$Z_m(t_k+0,x)=G_m^{(k)}(t_k,\tilde{y})\eta_k\,, \tag{31}$$

$$Z_m(t,\tilde{y})\big|_{\Gamma^{(k)}}\equiv 0\,. \tag{32}$$

Згідно з теоремою 5.2 із [4, с. 364], для розв'язку задачі (30)–(32) виконується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)\left|\partial_t^i\partial_y^r Z_m(M_1)-\partial_t^i\partial_y^r Z_m(M_2)\right|\le$$

$$\le c\left(\left\|F_m^{(2)}+\eta_k F_m\right\|_{C^{\alpha}(W_{3/4}^{(k)})}+\left\|\eta_k G_m^{(k)}\right\|_{C^{2+\alpha}(W_{3/4}^{(k)})}\right), \tag{33}$$

де $(M_1,M_2)\subset W_{3/4}^{(k)}$, $d(M_1,M_2)$ – параболічна відстань між точками M_1 і M_2, $2i+|r|=2$. Враховуючи властивості функції $\eta_k(t,y)$, знаходимо

$$\left\|F_m^{(2)}+\eta_k F_n\right\|_{C^{\alpha}(W_{3/4}^{(k)})}\le cR\left(-(2+\alpha)\gamma,x^{(1)}\right)\left(\left\|\omega_m;\gamma;0;0;W_{3/4}^{(k)}\right\|_2+\right.$$

$$\left.+\left\|\omega_m;W_{3/4}^{(k)}\right\|_0+\left\|F_m;\gamma;0;0;W_{3/4}^{(k)}\right\|_{\alpha}\right), \tag{34}$$

$$\left\|\eta G_m^{(k)}\right\|_{C^{2+\alpha}(W_{3/4}^{(k)})}\le cR\left(-(2+\alpha)\gamma,x^{(1)}\right)\left\|G_m^{(k)};\gamma;0;0;W_{3/4}^{(k)}\right\|_{2+\alpha}. \tag{35}$$

Підставляючи (34), (35) у (33) і повертаючись до змінних (t,x), враховуючи інтерполяційні нерівності та оцінки кожного з доданків виразів F_m і $G_m^{(k)}$, маємо

$$E_e\le\left(\varepsilon_1^{\alpha}(n+2)+\varepsilon^2 n^2\right)\left\|u_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}^{(k)}\right\|_{2+\alpha}+c_2\left(\left\|u_m;V_{3/4}^{(k)}\right\|_0+\right.$$

$$+c_3\left\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;V_{3/4}^{(k)}\right\|_{\alpha}+\left\|\tilde{G}_m^{(k)};\gamma;\beta;0;V_{3/4}^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha}+$$

$$\left.+\left\|\psi_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}^{(k)}\right\|_{2+\alpha}\right). \tag{36}$$

Використовуючи нерівності (23), (26), (36) і вибираючи ε, ε_1 достатньо малими, одержимо оцінку

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha}\le c\left(\left\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\right\|_{\alpha}+\right.$$

$$\left.+\left\|\tilde{G}_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha}+\left\|\psi_m;\gamma;\beta;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha}\right)+$$

$$+\left\|u_m;Q^{(k)}\right\|_0. \tag{37}$$

Розглянемо випадок, коли $\left|x_i^{(1)}-z_i\right|\le 4T_1$, $z\in\partial D$, $i\in\{1,\dots,n\}$. Вважаємо для простоти, що $i=n$. Нехай $\mathcal{K}(P)$ – куля радіуса R_0, $R_0>4(T_1 n+T_2)$ з центром у деякій точці $P\in\Gamma^{(k)}$, яка містить точки $P_1^{(k)}$, $M_i^{(k)}$, $H_i^{(k)}$. Використовуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити межу $\partial D\cap\mathcal{K}(P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x=\mu(\xi)$ із [11, с. 126]. Внаслідок такого перетворення область $Q^{(k)}\cap\mathcal{K}(P)$ перейде в область $\Pi^{(k)}$, для точок якої $\xi_n\ge 0$.

Вважаємо, що $v_m(t,x)$, $P_1^{(k)}$, $M_i^{(k)}$, $H_i^{(k)}$ при цьому перетворенні переходять відповідно в $\tilde{u}_m(t,\xi)$, $\tilde{P}_1^{(k)}$, $\tilde{M}_i^{(k)}$, $\tilde{H}_i^{(k)}$. Позначимо коефіцієнти диференціального виразу L_2 в області $\Pi^{(k)}$ через $\tilde{a}_{ij}(t,\xi)$, $\tilde{a}_i(t,\xi)$, $\tilde{a}_0(t,\xi)$. Тоді $\omega_m(t,\xi)$ буде розв'язком задачі

$$\left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(\tilde{P}_1^{(k)})\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\right]\tilde{u}_m = \sum_{i,j=1}^{n}\left[\tilde{a}_{ij}(t,\xi) - \tilde{a}_{ij}(\tilde{P}_1^{(k)})\right]\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\tilde{u}_m -$$

$$- \tilde{a}_0(t,\xi)\tilde{u}_m + f_m(t,\mu(\xi)) - (L_1\psi_m)(t,\mu(\xi)),$$

$$\tilde{u}_m(t_k + 0,\xi) = G_m^{(k)}(t_k,\mu(\xi)),$$

$$\tilde{u}_m\big|_{\xi_n=0} = 0.$$

Повторюючи міркування, наведені при знаходженні оцінок розв'язку задачі (27)–(29) і використовуючи при цьому теорему 5.2 із [4, с. 364], одержимо нерівність (37). Враховуючи значення виразу $G_m^{(k)}(t,x)$, маємо

$$\left\|G_m^{(0)};\gamma;\beta;0;D\right\|_{2+\alpha} \le c\left(\left\|\varphi_m^{(0)};\gamma;\beta;0;D\right\|_{2+\alpha} + \left\|\psi_m;\gamma;\beta;0;Q^{(0)}\right\|_{2+\alpha}\right),$$

$$\left\|G_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha} \le c\left(1+\left\|d_\lambda;Q^{(k)}\cap(t=t_\lambda)\right\|_0\right)\times$$

$$\times\left(\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k-1)}\right\|_{2+\alpha} + \left\|\varphi_m^k;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha} +\right.$$

$$\left.+\left\|\psi_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha}\right), \quad k\in\{1,2,\ldots,N\}. \qquad (38)$$

Оскільки

$$\left\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\right\|_\alpha \le c\left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\right\|_\alpha,$$

$$\left\|\varphi_m^k;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha} \le c\left\|\varphi_k;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha},$$

$$\left\|\psi_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha} \le c\left\|\psi;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha}, \qquad (39)$$

то, враховуючи оцінку (11) і нерівності (37), (38) при $k = 0,1,\ldots,N$, отримуємо оцінку (22). ♦

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теореми* 2. *Тоді для розв'язку задачі* (6)–(8), (10) *справджується нерівність*

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\right\|_{2+\alpha} \le c\sum_{k=1}^{N}\left\{\prod_{\lambda=k}^{N}\left(1+\left\|d_\lambda;Q\cap(t=t_\lambda)\right\|_0\right)\times\right.$$

$$\times\left(\left\|\varphi_{k-1};\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_{k-1})\right\|_{2+\alpha} + \left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k-1)}\right\|_\alpha +\right.$$

$$\left.\left.+\left\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k-1)}\right\|_{1+\alpha}\right)\right\} + \left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^N\right\|_\alpha +$$

$$+\left\|\varphi_N;\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_N)\right\|_{2+\alpha} + \left\|g;\gamma;\beta;0;Q^{(N)}\right\|_{1+\alpha}. \qquad (40)$$

Д о в е д е н н я. Оцінку (40) доводимо за тією ж схемою, за якою встановлено нерівність (22). Вкажемо на деякі відмінності в доведенні.

Нехай $\left|\tau_k^{(1)} - \tau_k^{(2)}\right| \le T_1$ і $\left|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\right| \le T_2$, $\left|x_i^{(1)} - z_i\right| \ge 4T_1$, $z\in\partial D$. В області $Q^{(k)}$ задачу (6)–(8), (10) запишемо у вигляді

$$(L_2 u_m)(t,x) = F_m^{(1)}(P;u_m) + f_m(P), \qquad u_m(t_k+0,x) = \tilde{G}_m^{(k)}(t,x),$$
$$u_m(t,x)\big|_{\Gamma^{(k)}} \geq 0,$$
$$(\mathcal{B}_2 u_m)(t,x)\big|_{\Gamma^{(k)}} \geq \tilde{g}_m(t,x,u_m)\big|_{\Gamma^{(k)}},$$
$$[u_m(\mathcal{B}_2 u_m - \tilde{g}_m)](t,x)\big|_{\Gamma^{(k)}} \equiv 0, \tag{41}$$
де
$$(\mathcal{B}_2 u_m)(t,x) \equiv \sum_{k=1}^{n} h_k(P_1^{(k)})\partial_{x_k} u_m(t,x),$$
$$\tilde{g}_m(t,x,u_m) \equiv \sum_{k=1}^{n} [h_k(t,x) - h_k(P_1^{(k)})]\partial_{x_k} u_m(t,x) + h_0(t,x)u_m - g_m(t,x).$$

Нехай $V_{\varepsilon_2}^{(k)}$ – область із $Q^{(k)}$. Виконавши в задачі (41) заміну $u_m(t,x) = \omega_m^{(1)}(t,y)$, одержимо задачу для знаходження розв'язку $\omega_m^{(1)}(t,y)$:
$$(L_3\omega_m^{(1)})(t,y) = F_m^{(1)}(t,\tilde{y};\omega_m^{(1)}) + f_m(t,\tilde{y}),$$
$$\omega_m^{(1)}(t_k+0,y) = \tilde{G}_m^{(k)}(t_k,\tilde{y}),$$
$$\omega_m^{(1)}(t,y)\big|_{\Gamma^{(k)}} \geq 0, \qquad (\mathcal{B}_3\omega_m^{(1)})(t,y)\big|_{\Gamma^{(k)}} \geq \tilde{g}_m(t,\tilde{y},\omega_m^{(1)})\big|_{\Gamma^{(k)}},$$
$$[\omega_m^{(1)}(\mathcal{B}_3\omega_m^{(1)} - \tilde{g}_m)](t,y)\big|_{\Gamma^{(k)}} \equiv 0,$$
де
$$(\mathcal{B}_3\omega_m^{(1)})(t,y) \equiv \sum_{k=1}^{n} h_k(P_1^{(k)})d(\beta_k, x_k^{(1)})\partial_{y_k}\omega_m^{(1)}(t,x).$$

Тоді функція $Z_m^{(1)}(t,y) = \omega_m^{(1)}(t,y)\eta_k(t,y)$ буде розв'язком такої задачі в області $W_{\varepsilon_2}^{(k)}$:
$$(L_3 Z_m^{(1)})(t,y) = F_m^{(2)} + \eta_k f_m, \quad Z_m^{(1)}(t_k+0,y) = \eta\tilde{G}^{(k)}(t,\tilde{y})\big|_{\Gamma^{(k)}}, \tag{42}$$
$$Z_m^{(1)}(t,y)\big|_{\Gamma^{(k)}} \geq 0, \qquad (\mathcal{B}_3 Z_m^{(1)})(t,y)\big|_{\Gamma^{(k)}} \geq \tilde{g}_m^{(1)}(t,\tilde{y},\omega_m^{(1)})\big|_{\Gamma^{(k)}}, \tag{43}$$
$$[Z_m^{(1)}(\mathcal{B}_3 Z_m^{(1)} - \tilde{g}_m^{(1)})](t,y)\big|_{\Gamma^{(k)}} = 0, \tag{44}$$
де
$$\tilde{g}_m^{(1)}(t,\tilde{y},\omega_m^{(1)}) \equiv \sum_{j=1}^{n} h_i(P_1^{(k)})d(\beta_j, x_j^{(1)})\partial_{y_j}\eta_k + \tilde{g}_m\eta_k.$$

Можливі такі два випадки:

I) в області $W_{\varepsilon_2}^{(k)}$ існують точки, в яких виконується умова
$$Z_m^{(1)}(t,y)\big|_{\Gamma^{(k)}} = 0, \tag{45}$$

II) таких точок в області $W_{\varepsilon_2}^{(k)}$ не існує, тоді з крайової умови (44) маємо
$$(\mathcal{B}_3 Z_m^{(1)})(t,y)\big|_{\Gamma^{(k)}} = \tilde{g}_m^{(1)}(t,\tilde{y},\omega_m^{(1)})\big|_{\Gamma^{(k)}}. \tag{46}$$

У випадку ***I*** досліджуємо задачу (42)–(45). Для цієї задачі виконується оцінка (37) при $\psi = 0$. У випадку ***II*** досліджуємо задачу (42), (46). Коефіцієнти диференціальних виразів L_3 і $\mathcal{B}_3$, згідно з накладеними умовами ***1°***, ***3°***, ***4°***, обмежені сталими, які не залежать від точки $P_1^{(k)}$. Тому на підставі теореми 5.3 із [4, с. 364] одержуємо нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2)\left|\partial_t^i \partial_y^r Z_m^{(1)}(M_1) - \partial_t^i \partial_y^r Z_m^{(1)}(M_2)\right| \le$$

$$\le c\left(\left\| F_m^{(2)} + \eta_k f_m \right\|_{C^{\alpha}(W_{3/4}^{(k)})} + \left\| \eta_k \tilde{G}_m^{(k)} \right\|_{C^{2+\alpha}(W_{3/4}^{(k)})} + \right.$$

$$\left. + \left\| \tilde{g}_m^{(1)} \right\|_{C^{1+\alpha}(W_{3/4}^{(k)} \cap \Gamma^{(k)})} \right).$$

Враховуючи властивості функції $\eta_k(t, y)$ і повертаючись до змінних (t, x), знаходимо оцінки кожного з доданків виразів $F_m^{(2)}$, $\tilde{g}_m^{(1)}$, $\tilde{G}_m^{(k)}$.

В результаті одержимо

$$\left\| u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \right\|_{2+\alpha} \le c\left(\left\| f_m; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(k)} \right\|_{\alpha} + \right.$$

$$\left. + \left\| \tilde{G}_m^{(k)}; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \cap (t = t_k) \right\|_{2+\alpha} \right) +$$

$$+ \left\| g_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \right\|_{1+\alpha} + \left\| u_m; Q^{(k)} \right\|_0 . \tag{47}$$

Аналогічно досліджуємо задачу у випадку, коли $\left| x_i^{(1)} - z_i \right| \le 4T_1$, $z \in \partial D$.

Враховуючи значення виразу $\tilde{G}_m^{(k)}$ і нерівності (17), (23), (39), (47), знаходимо оцінку (40). ♦

Д о в е д е н н я **теореми 1.** Права частина нерівності (22) не залежить від m. Крім того, послідовності

$$\{U_m^{(0)}\} \equiv \{u_m\},$$

$$\{U_m^{(1)}\} \equiv \{R(\gamma, x) d(-\beta_i, x_i) \partial_{x_i} u_m\},$$

$$\{U_m^{(2)}\} \equiv \{R(2\gamma, x) \partial_t u_m\},$$

$$\{U_m^{(3)}\} \equiv \{R(2\gamma, x) d(-\beta_i, x_i) d(-\beta_j, x_j) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u_m\}$$

є рівномірно обмеженими та рівностепенево неперервними в областях $\bar{Q}^{(k)}$. Згідно з теоремою Арцела, існують підпослідовності $\{U_{m(i)}^{(\nu)}\}$, рівномірно збіжні в $Q^{(k)}$ до $\{U_0^{(\mu)}\}$, $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Переходячи в задачі (6)–(9) до границі при $m(i) \to \infty$, одержимо, що $u(t, x) = U_0^{(0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1)–(4), $u \in C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$. ♦

Д о в е д е н н я **теореми 2.** Права частина нерівності (40) не залежить від m. Крім того, послідовності $\{U_m^{(\nu)}\}$, $\nu \in \{0, 1, 2, 3\}$, – рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні в областях $\bar{Q}^{(k)}$. За теоремою Арцела, існують підпослідовності $\{U_{m(j)}^{(\nu)}\}$, рівномірно збіжні в $Q^{(k)}$ до $\{U_0^{\nu}\}$. Переходячи до границі при $m(j) \to \infty$ в задачі (6)–(8), (10), одержимо, що $u(t, x) = U_0^{(0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1)–(4), $u \in C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$. ♦

1. *Асанова А. Т.* О нелокальной краевой задаче для систем гиперболических уравнений с импульсными воздействиями // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 315–328.
   Те саме: *Asanova A. T.* On a nonlocal boundary-value problem for systems of impulsive hyperbolic equations // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, No. 3. – P. 349–365.
2. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Наука, 1981. – 448 с.

3. *Ісарюк І. М., Пукальський І. Д.* Крайові задачі для параболічних рівнянь з нелокальною умовою і виродженнями // Укр. мат. вісн. – 2014. – **11**, № 4. – С. 315–328.
   Те саме: *Isaryuk I. M., Pykal'skii I. D.* The boundary-value problems for parabolic equations with a nonlocal condition and degenerations // J. Math. Sci. – 2015. – **207**, No. 1. – P. 26–38.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
   Те саме: *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. – Transl. Math. Monogr., Vol. 23. – Providence, RI: AMS, 1968. – xi + 648 p.
5. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні. – Чернівці: Чернів. нац. ун-т, 2010. – 248 с.
6. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
7. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 427 с. – (Тр. Ин-та математики НАН Украины. Сер. Математика и её применение; Т. 67.)
   Те саме: *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential equations with impulse effects: Multivalued right-hand sides with discontinuities. – Berlin: Walter de Gruyter Co., 2011. – xiv+310 p.
8. *Перестюк Н. А., Ткач А. Б.* Периодические решения слаболинейной системы уравнений в частных производных с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 4. – С. 601–605.
   Те саме: *Perestyuk N. A., Tkach A. B.* Periodic solutions of a weakly nonlinear system of partial differential equations with pulse influence // Ukr. Math. J. – 1997. – **49**, No. 4. – P. 665–671.
9. *Пукальський І. Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 2008. – 253 с.
10. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
    Те саме: *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1995. – 462 p.
11. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
    Те саме: *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964. – xiv + 347 p.
12. *Bainov D., Minchev E., Myshkis A.* Periodic boundary value problems for impulsive hyperbolic systems // Commun. Appl. Anal. – 1997. – **1**. – P. 1–14.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ИМПУЛЬСНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЯМИ

Рассмотрена первая краевая задача и односторонняя краевая задача с импульсными условиями по временной переменной для линейного параболического уравнения со степенными особенностями произвольного порядка по пространственным переменным. С помощью принципа максимума и априорных оценок установлены существование и единственность решений сформулированных задач в гельдеровых пространствах со степенным весом.

THE BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH IMPULSE CONDITIONS FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH DEGENERATIONS

The first boundary value problem and the one-sided boundary value problem with impulse conditions in time variable for the linear parabolic equation with power singularities of arbitrary order in spatial variables are considered. The existence and uniqueness of the solutions of formulated problems in Hölder spaces with power weight are established by using the maximum principle and a priori estimates.

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
18.02.16