УДК 517.95

З. М. Нитребич[1], О. М. Маланчук[1,2]

ПРО ЯДРО ДВОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ЧАСОМ

Досліджено задачу для однорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часовою змінною, за якою задано однорідні двоточкові умови, та в загальному нескінченного порядку за іншою (просторовою) змінною. Доведено, що досліджувана задача має лише тривіальний розв'язок, якщо характеристичний визначник є відмінним від тотожного нуля. У випадку, коли множина нулів характеристичного визначника задачі є непорожньою, вказано спосіб побудови нетривіальних розв'язків задачі.

Вступ. У багатьох прикладних дослідженнях виникають задачі про побудову розв'язку $U = U(t,x)$ диференціального рівняння

$$\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} + \sum_{k=1}^{n} A_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{n-k}}{\partial t^{n-k}}\right]U(t,x) = f(t,x), \qquad n \in \mathbb{N}\,, \tag{1}$$

що описує деякий фізичний процес, з поліномними операторними коефіцієнтами $A_k\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$, $k = 1,2,\dots,n$, і гладкою правою частиною $f(t,x)$, коли є відомими значення шуканого розв'язку U і його похідних за часовою змінною t у кількох часових вузлах, а не в одній точці $t = t_0$, як у задачі Коші.

Така задача у випадку $n \ge 2$ вузлів ставиться так: знайти розв'язок U рівняння (1), що задовольняє n-точкові умови

$$U(t_k, x) = \varphi_k(x), \qquad k = 1,2,\dots,n\,, \tag{2}$$

де $-\infty < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < +\infty$, а $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ – задані функції.

Окрім умов (2), для рівняння (1) при $n > 2$ можуть розглядатися більш загальні умови в m, $1 < m < n$, різних вузлах t_1, t_2, …, t_m, де відомими є значення шуканого розв'язку та його похідних за часом у цих вузлах (умови з кратними вузлами).

Багатоточкова задача є узагальненням задачі Коші (один n-кратний вузол), проте вона має нові властивості – насамперед, вона є некоректною в області коректності задачі Коші. Постановка такого роду задач і перші загальні результати щодо їх розв'язності на підставі метричного підходу належать Б. Й. Пташнику [9, 10]. Зокрема, у цих працях було показано, що класи єдиності розв'язку багатоточкової задачі для диференціальних рівнянь із частинними похідними істотно відрізняються від класів єдиності розв'язку відповідної задачі Коші для таких рівнянь. Зокрема, двоточкова задача для рівняння коливань струни

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]U(t,x) = 0, \qquad a > 0\,, \tag{3}$$

з умовами

$$U(0,x) = \varphi_1(x), \qquad U(h,x) = \varphi_2(x), \qquad h > 0\,,$$

є некоректною крайовою задачею, оскільки задача для рівняння (3) з однорідними двоточковими умовами

$$U(0,x) = 0, \qquad U(h,x) = 0 \tag{4}$$

має нетривіальні розв'язки вигляду

$$U(t,x) = \Phi(x+at) - \Phi(x-at)\,,$$

де Φ – двічі неперервно диференційовна функція з періодом $2ah$.

Зауважимо, що класичний розв'язок задачі Коші у точці $t = 0$ для гіперболічного рівняння (3) є єдиним без жодних обмежень на початкові функції щодо їх поведінки на нескінченності.

На сьогоднішній день дослідження багатоточкових задач і їх аналогів для рівнянь та систем диференціальних рівнянь із частинними похідними в обмежених областях істотно розвинулося. На підставі метричного підходу одержано чимало результатів загального характеру (див. праці [4, 11–13] і бібліографію в них).

Виділенню класів існування і єдиності розв'язків крайових задач із загальними багатоточковими умовами в необмежених областях для рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними присвячено дослідження [1, 2, 5, 8].

Задачі з багатоточковими крайовими умовами для квазілінійних систем диференціальних рівнянь із частинними похідними у нескінченному шарі вивчались у працях [16, 17, 19].

Зауважимо, що багатоточкова задача для диференціальних рівнянь із частинними похідними є також узагальненням багатоточкової задачі для звичайних диференціальних рівнянь, яка зустрічається в літературі ще як задача Валле-Пуссена. Такі задачі вперше вивчалися у працях [14, 18, 20].

У цій статті досліджується питання ядра однорідної двоточкової задачі для загального рівняння другого порядку за часом і в загальному нескінченного порядку за просторовою координатою з операторними коефіцієнтами, яка як частковий випадок включає задачу (3), (4).

1. Формулювання задачі. Досліджується множина розв'язків однорідного рівняння

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial t} + b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2, \qquad (5)$$

що задовольняють локальні однорідні двоточкові умови

$$A_1 U(0,x) + A_2 \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0,$$

$$B_1 U(h,x) + B_2 \frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = 0, \quad h > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (6)$$

В умовах (6) коефіцієнти A_1, A_2, B_1, B_2 належать до $\mathbb{C}$, причому $|A_1|^2 + |A_2|^2 \neq 0$, $|B_1|^2 + |B_2|^2 \neq 0$. У рівнянні (5) операторні коефіцієнти $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – це диференціальні вирази з комплексними коефіцієнтами скінченного або нескінченного порядку, символи яких $a(\nu)$, $b(\nu)$ є цілими функціями комплексної змінної ν. Якщо $a(\nu)$ та $b(\nu)$ – поліноми, то їх степені позначимо через $p_a \in \mathbb{Z}_+$ та $p_b \in \mathbb{Z}_+$, а також вважатимемо, що $p_a = \infty$ та $p_b = \infty$, якщо $a(\nu)$ та відповідно $b(\nu)$ не є поліномами.

Зауваження 1. *Дію диференціального виразу* $c\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ *з цілим символом* $c(\nu) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \nu^j$, $c_j \in \mathbb{C}$, *на нескінченно диференційовну на* $\mathbb{R}$ *функцію* $V(x)$ (*подібні дії виразів є у рівнянні* (5)) *визначаємо формально рядом* $c\left(\frac{d}{dx}\right)V = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \frac{d^j V}{dx^j}$ *з подальшим обґрунтуванням його збіжності.*

Розв'язком задачі (5), (6) вважаємо цілу функцію вигляду

$$U(t,x) = \sum_{k_0+k_1 \geq 0} u_{k_0k_1} t^{k_0} x^{k_1}, \quad k_0, k_1 \in \mathbb{Z}_+, \quad u_{k_0k_1} \in \mathbb{C},$$

змінних t та x, яка задовольняє рівняння (5) в області $\mathbb{R}^2$ та умови (6) в $\mathbb{R}$.

2. Основні результати.

2.1. Розв'язність задачі. Розглянемо квазіполіномні за t функції

$$T_0(t,\nu) = e^{-a(\nu)t}\left\{a(\nu)\frac{\sinh\left[t\sqrt{a^2(\nu)-b(\nu)}\right]}{\sqrt{a^2(\nu)-b(\nu)}} + \cosh\left[t\sqrt{a^2(\nu)-b(\nu)}\right]\right\},$$

$$T_1(t,\nu) = e^{-a(\nu)t}\frac{\sinh\left[t\sqrt{a^2(\nu)-b(\nu)}\right]}{\sqrt{a^2(\nu)-b(\nu)}}, \tag{7}$$

які для кожного $\nu \in \mathbb{C}$ утворюють нормальну в точці $t = 0$ фундаментальну систему розв'язків звичайного диференціального рівняння

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)T(t,\nu) \equiv \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2a(\nu)\frac{d}{dt} + b(\nu)\right)T(t,\nu) = 0, \qquad \nu \in \mathbb{C}. \tag{8}$$

Запишемо визначник вигляду (надалі − характеристичний визначник задачі (5), (6))

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1T_0(h,\nu) + B_2T_0'(h,\nu) & B_1T_1(h,\nu) + B_2T_1'(h,\nu) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_0(h,\nu) & T_1(h,\nu) \\ T_0'(h,\nu) & T_1'(h,\nu) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -A_2 \\ A_1 \end{pmatrix}$$

або

$$\Delta(\nu) = A_1\left[B_1T_1(h,\nu) + B_2T_1'(h,\nu)\right] - A_2\left[B_1T_0(h,\nu) + B_2T_0'(h,\nu)\right], \tag{9}$$

де $T_0'(h,\nu) = \dfrac{dT_0}{dt}(h,\nu)$, $T_1'(h,\nu) = \dfrac{dT_1}{dt}(h,\nu)$.

Функції (7) для всіх $t \in \mathbb{R}$ є цілими функціями стосовно параметра ν як розв'язки задачі Коші для рівняння (8) з цілими коефіцієнтами [15, с. 59], тому визначник $\Delta(\nu)$, означений формулою (9), також є цілою функцією.

Зауваження 2. *Порядок p цілих стосовно ν функцій $T_0(t,\nu)$, $T_1(t,\nu)$ визначають* [3, с. 83] *за степенями p_a та p_b поліномів $a(\nu)$, $b(\nu)$ формулою $p = \max\{p_a, p_b/2\}$. При цьому порядок p є нескінченним, якщо $a(\nu)$ або $b(\nu)$ не є поліномом.*

Для визначника $\Delta(\nu)$ (як для цілої функції) є можливими три випадки:

1°) $\Delta(\nu) \neq 0 \quad \forall\nu \in \mathbb{C}$, тобто $\dfrac{1}{\Delta(\nu)}$ − також ціла функція;

2°) $\Delta(\nu) \equiv 0$;

3°) множина нулів $M \equiv \{\nu \in \mathbb{C} : \Delta(\nu) = 0\}$ є непорожньою і $M \neq \mathbb{C}$, тобто M − скінченна або зліченна необмежена множина.

2.1.1. Випадок $\Delta(\nu) \neq 0 \quad \forall\nu \in \mathbb{C}$**.**

Для $q \in [1,\infty]$ введемо таке позначення: $q' = \begin{cases} q/(q-1), & q \in (1,\infty), \\ \infty, & q = 1, \\ 1, & q = \infty. \end{cases}$

Запровадимо клас $\mathbb{A}_{q'}$ цілих функцій $U(t,x)$, які для кожного фіксованого $t \in \mathbb{R}$ належать до $A_{q'}$, тобто $U(t,x)$ за вектор-змінною x є:

− цілими функціями, якщо $q' = \infty$;

− цілими функціями порядку, нижчого ніж q', якщо $q' \in (1,\infty)$;

− цілими функціями експоненційного типу, якщо $q' = 1$.

Теорема 1. *Нехай* $\overline{p} = \max\{p, 1\}$. *Якщо* $\Delta(\nu) \neq 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{C}$, *то задача* (5), (6) *у класі цілих функцій* $\mathbb{A}_{\overline{p}'}$ *має лише тривіальний розв'язок.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що в $\mathbb{A}_{\overline{p}'}$ існує ненульовий цілий розв'язок U рівняння (5), що задовольняє умови (6). Позначимо $\varphi(x) = U(0, x)$, $\psi(x) = \dfrac{\partial U}{\partial t}(0, x)$. Тоді функції $\varphi(x)$, $\psi(x)$ є цілими і належать до $A_{\overline{p}'}$ [7 с. 316], де $\overline{p} = \max\{p, 1\} \geq 1$. Згідно з диференціально-символьним методом [6, с. 106], розв'язок задачі (5), (6) подамо як розв'язок задачі Коші для рівняння (5) з початковими умовами

$$U(0, x) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial U}{\partial t}(0, x) = \psi(x)$$

у такому вигляді:

$$U(t, x) = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{T_0(t, \nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0} + \psi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{T_1(t, \nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}. \tag{10}$$

Із крайових умов (6) при $t = 0$ отримаємо

$$A_1\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\{e^{\nu x}\}\Big|_{\nu=0} + A_2\psi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\{e^{\nu x}\}\Big|_{\nu=0} = A_1\varphi(x) + A_2\psi(x) \equiv 0. \tag{11}$$

Розглянемо випадок $A_1A_2 \neq 0$. Із другої крайової умови (6) при $t = h$ з урахуванням тотожності (11) одержимо

$$\frac{1}{A_1}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\{e^{\nu x}\Delta(\nu)\}\Big|_{\nu=0} \equiv 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Помноживши цю тотожність на A_1 та подіявши на неї диференціальним виразом $\Delta^{-1}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$, отримаємо

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{e^{\nu x}\frac{1}{\Delta(\nu)}\Delta(\nu)\right\}\Big|_{\nu=0} \equiv 0,$$

звідки маємо $\varphi\left(\dfrac{\partial}{\partial \nu}\right)\{e^{\nu x}\}\Big|_{\nu=0} \equiv 0$ або $\varphi(x) \equiv 0$. Враховуючи тотожність (11), одержимо, що $\psi(x) \equiv 0$.

Отже, маємо тотожність $U(t, x) \equiv 0$, яка суперечить припущенню про нетривіальність розв'язку задачі (5), (6).

У випадку $A_1 = 0$, $A_2 \neq 0$ з тотожності (11) отримаємо, що $\psi(x) \equiv 0$. Тоді рівність (10) матиме вигляд $U(t, x) = \varphi\left(\dfrac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{T_0(t, \nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}$. З другої крайової умови (6) отримаємо $\varphi\left(\dfrac{\partial}{\partial \nu}\right)\left[B_1T_0(h, \nu) + B_2T_0'(h, \nu)\right]e^{\nu x}\Big|_{\nu=0} = 0$ або $\varphi\left(\dfrac{\partial}{\partial \nu}\right)\{e^{\nu x}\Delta(\nu)\}\Big|_{\nu=0} \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $\Delta(\nu) \neq 0$ для $\forall \nu \in \mathbb{C}$, то $\varphi(x) \equiv 0$. Отже, отримуємо тотожність $U(t, x) \equiv 0$.

Аналогічно можна довести твердження теореми для випадку $A_1 \neq 0$, $A_2 = 0$. Теорему доведено. ♦

Зауваження 3. *Умова* $\overline{p} = 1$ *виконується лише для рівняння* (5) *вигляду*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \left(a_1 + a_2\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial t} + \left(b_0 + b_1\frac{\partial}{\partial x} + b_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)U = 0,$$

де $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{C}$.

Приклад 1. Знайти розв'язок рівняння

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}+2\frac{\partial}{\partial x}-1\right]U(t,x)=0,\qquad (t,x)\in\mathbb{R}^2, \tag{12}$$

що задовольняє двоточкові умови

$$\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0,\qquad U(1,x)+\frac{\partial U}{\partial t}(1,x)=0,\qquad x\in\mathbb{R}. \tag{13}$$

▼ Задача (12), (13) є задачею (5), (6), у якій $h=1$, $a(\nu)=\nu$, $b(\nu)=2\nu-1$, $a^2(\nu)-b(\nu)=(\nu-1)^2$, $A_1=0$, $A_2=1$, $B_1=1$, $B_2=1$.

У цьому випадку

$$T_0(t,\nu)=e^{-\nu t}\left\{\nu\frac{\sinh[t(\nu-1)]}{\nu-1}+\cosh[t(\nu-1)]\right\},\, T_1(t,\nu)=e^{-\nu t}\frac{\sinh[t(\nu-1)]}{\nu-1},$$

причому $\overline{p}=1$ (див. зауваження 3).

Визначник $\Delta(\nu)$ має такий вигляд:

$$\Delta(\nu)=\begin{vmatrix}0 & 1\\ T_0(1,\nu)+T_0'(1,\nu) & T_1(1,\nu)+T_1'(1,\nu)\end{vmatrix}=-T_0(1,\nu)-T_0'(1,\nu)=$$

$$=e^{-\nu}[\cosh(\nu-1)-\sinh(\nu-1)]=e^{-2\nu+1}.$$

Оскільки $\Delta(\nu)\neq 0$ для всіх $\nu\in\mathbb{C}$, то задача (12), (13) має лише нульовий розв'язок, тобто ядро задачі є тривіальним. ▲

2.1.2. Випадок $\Delta(\nu)\equiv 0$**.**

Розглянемо цілу функцію $(A_2T_0(t,\nu)-A_1T_1(t,\nu))e^{\nu x}$. Її порядок позначимо через $\overline{q}$, причому $\overline{q}\in[1,\infty]$ і $\overline{q}\le\overline{p}$.

Теорема 2. *Якщо* $\Delta(\nu)\equiv 0$*, то в класі* $\mathbb{A}_{\overline{q}'}$ *існують нетривіальні цілі розв'язки задачі* (5), (6), *які можна подати у вигляді*

$$U(t,x)=\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{(A_2T_0(t,\nu)-A_1T_1(t,\nu))e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}, \tag{14}$$

де φ *− довільна ціла функція з класу* $A_{\overline{q}'}$.

Д о в е д е н н я. Відповідно до диференціально-символьного методу запишемо цілі розв'язки рівняння (5) у вигляді

$$U(t,x)=\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{T_0(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}+\varphi_2\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{T_1(t,x)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}, \tag{15}$$

де $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ − довільні цілі функції з класу $A_{\overline{p}'}$. Підберемо функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ так, щоб виконувались умови (6).

Задовольняючи першу з умов (6), отримаємо співвідношення

$$0\equiv A_1\varphi_1(x)+A_2\varphi_2(x).$$

У випадку $A_1A_2\neq 0$ отримаємо $\varphi_2(x)=-\dfrac{A_1}{A_2}\varphi_1(x)$. З рівності (15) маємо

$$U(t,x)=\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\left(T_0(t,\nu)-\frac{A_1}{A_2}T_1(t,\nu)\right)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}$$

або

$$U(t,x)=\frac{1}{A_2}\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{(A_2T_0(t,\nu)-A_1T_1(t,\nu))e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}.$$

Остання рівність − це рівність (14), у якій $\varphi(x) = \dfrac{1}{A_2}\varphi_1(x)$. Зауважимо, що за $\varphi(x)$ можна взяти довільну цілу функцію з класу $A_{\overline{q}'}$, оскільки $\overline{q} \le \overline{p}$.

Оскільки $\Delta(\nu) \equiv 0$, то виконується і друга з умов (6). Справді,

$$B_1 U(h,x) + B_2 \frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\left[B_1\left(A_2 T_0(h,\nu) - A_1 T_1(h,\nu)\right)\right]e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0} +$$

$$+\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\left[B_2\left(A_2 T_0'(h,\nu) - A_1 T_1'(h,\nu)\right)\right]e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0} =$$

$$= -\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\Delta(\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0} \equiv 0.$$

У випадку $A_1 \ne 0$, $A_2 = 0$ характеристичний визначник матиме вигляд

$$\Delta(\nu) = A_1\left[B_1 T_1(h,\nu) + B_2 T_1'(h,\nu)\right].$$

З першої умови (6) отримаємо, що $\varphi_1(x) = 0$. Тоді маємо

$$U(t,x) = -\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{A_1 T_1(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}, \tag{16}$$

де $\varphi(x) = -\dfrac{1}{A_1}\varphi_2(x)$.

Покажемо, що друга з умов (6) виконується:

$$B_1 U(h,x) + B_2 \frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = -\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{A_1\left[B_1 T_1(h,\nu) + B_2 T_1'(h,\nu)\right]e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0} =$$

$$= -\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\Delta(\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0} \equiv 0.$$

Зауважимо, що розв’язок (16) отримуємо з (14), поклавши $A_2 = 0$.

Випадок $A_1 = 0$, $A_2 \ne 0$ аналізуємо аналогічно. Теорему доведено. ♦

Приклад 2. Знайти розв’язки диференціально-функціонального рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(t,x) + 2\frac{\partial}{\partial t}U(t,x+1) - 2U(t,x+1) - U(t,x) = 0, \quad (t,x)\in\mathbb{R}^2, \tag{17}$$

що задовольняють умови

$$U(0,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \qquad U(h,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = 0, \qquad x\in\mathbb{R}. \tag{18}$$

▼ Диференціально-функціональне рівняння (17) подамо у вигляді такого диференціального рівняння нескінченного порядку:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\exp\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t} - \left(2\exp\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+1\right)\right]U(t,x) = 0.$$

Задача (17), (18) є задачею (5), (6), у якій $a(\nu) = e^\nu$, $b(\nu) = -2e^\nu - 1$, $A_1 = A_2 = 1$, $B_1 = B_2 = 1$, $a^2(\nu) - b(\nu) = (e^\nu + 1)^2$ ($a(\nu)$ та $b(\nu)$ не є поліномами).

Квазіполіномні за t функції

$$T_0(t,\nu) = \frac{2e^\nu + 1 + e^{2(e^\nu+1)t}}{2(e^\nu+1)}e^{-t}, \qquad T_1(t,\nu) = \frac{e^{2(e^\nu+1)t} - 1}{2(e^\nu+1)}e^{-t}$$

є цілими за параметром ν функціями нескінченного порядку і утворюють нормальну в точці $t = 0$ фундаментальну систему розв’язків рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2e^{\nu}\frac{d}{dt} - (2e^{\nu}+1)\right]T(t,\nu) = 0\,.$$

Характеристичний визначник $\Delta(\nu)$ задачі (17), (18) матиме вигляд

$$\Delta(\nu) = (1 \quad 1)\begin{pmatrix} T_0(h,\nu) & T_1(h,\nu) \\ T_0'(h,\nu) & T_1'(h,\nu)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1\end{pmatrix} =$$

$$= e^{-e^{\nu}h}\,\frac{\sinh\left[h(e^{\nu}+1)\right]}{e^{\nu}+1}\left[(e^{\nu}+1)^2 - (e^{\nu}+1)^2\right] \equiv 0\,.$$

Згідно з теоремою 2 існують нетривіальні розв'язки задачі (17), (18), які можна знайти за формулою (14):

$$U(t,x) = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\left(T_0(t,\nu) - T_1(t,\nu)\right)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0} = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-t+\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0},$$

де $\varphi(x)$ − довільна ціла функція (ціла за ν функція $e^{-t+\nu x}$ має перший порядок, $\overline{q} = 1$). Для цілої функції $\varphi(x)$ виконується рівність

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0} = \varphi(x)\,,$$

тому розв'язком задачі (17), (18) є функція вигляду

$$U(t,x) = e^{-t}\varphi(x)\,.$$

Ядро задачі є нескінченновимірним. Зауважимо, що умову цілості функції $\varphi(x)$ можна послабити, розглядаючи класичні розв'язки задачі (5), (6): функція $\varphi(x)$ може бути довільною неперервною на $\mathbb{R}$ функцією. ▲

2.1.3. Дослідимо ***випадок 3°***. Нехай M − множина нулів цілої функції $\Delta(\nu)$, причому $M \neq \varnothing$ і $M \neq \mathbb{C}$.

Теорема 3. *Нехай* $\varphi(x)$ − *квазіполіном вигляду*

$$\varphi(x) = Q(x)e^{\alpha x}\,, \tag{19}$$

де $\alpha \in M$, *тобто число* α *є нулем функції* $\Delta(\nu)$ *кратності* $r \in \mathbb{N}$ ($\Delta(\alpha) = 0$, $\Delta'(\alpha) = 0,\ \ldots,\ \Delta^{(r-1)}(\alpha) = 0,\ \Delta^{(r)}(\alpha) \neq 0$), $Q(x)$ − *поліном з комплексними коефіцієнтами степеня* $n \le r-1$. *Тоді квазіполіном*

$$U(t,x) = Q\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\left[A_2T_0(t,\nu) - A_1T_1(t,\nu)\right]e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha}, \tag{20}$$

де $T_0(t,\nu)$, $T_1(t,\nu)$ *визначаються за формулою* (7), *є розв'язком задачі* (5), (6).

Навпаки, якщо розв'язком задачі (5), (6) *є квазіполіном вигляду*

$$U(t,x) = \sum_{\ell=1}^{N} P_\ell(t,x)e^{\beta_\ell t + \alpha x}\,, \tag{21}$$

де $N \in \mathbb{N}$, $P_\ell(t,x)$, $\ell = 1,\ldots,N$, − *поліноми з комплексними коефіцієнтами степеня* $n \in \mathbb{Z}_+$ *за змінною* x, $\beta_\ell \in \mathbb{C}$, $\beta_\ell \neq \beta_k$ *для* $k \neq \ell$, $k,\ell = 1,\ldots,N$, *то* $\alpha \in M$, *причому* $n < r$, *де* r − *кратність нуля* α *функції* $\Delta(\nu)$, *і цей розв'язок можна подати у вигляді* (20), *у якому* $Q(x)$ − *деякий поліном степеня* n.

Д о в е д е н н я. *Достатність.* Нехай $\varphi(x)$ − квазіполіном вигляду (19). Тоді функція (20) задовольняє рівняння (5) і першу з крайових умов (6).

Крім того, маємо

$$B_1U(h,x) + B_2\frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = Q\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\Delta(\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

Оскільки α – нуль функції $\Delta(\nu)$ кратності r і $n \le r-1$, то і друга з умов (6) виконується. Отже, функція $U(t,x)$ є розв'язком задачі (5), (6).

Необхідність. Нехай $U(t,x)$ – розв'язок задачі (5), (6), який є квазіполіномом вигляду (21). Позначимо $U(0,x) = \varphi_1(x)$, $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \varphi_2(x)$. Тоді

$$\varphi_1(x) = e^{\alpha x} Q_1(x), \qquad \varphi_2(x) = e^{\alpha x} Q_2(x),$$

де $Q_1(x) = \sum_{\ell=1}^{N} P_\ell(0,x)$, $Q_2(x) = \sum_{\ell=1}^{N}\left(\beta_\ell P_\ell(0,x) + \frac{\partial P_\ell}{\partial t}(0,x)\right)$ – поліноми степеня n.

Квазіполіном $U(t,x)$ як єдиний розв'язок задачі Коші

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) U(t,x) = 0,$$

$$U(0,x) = \varphi_1(x), \qquad \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \varphi_2(x),$$

згідно з диференціально-символьним методом, запишемо у вигляді

$$U(t,x) = \varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{T_0(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0} + \varphi_2\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{T_1(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}.$$

З першої умови (6) одержимо, що

$$A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) \equiv 0. \tag{22}$$

Використовуючи тотожність (22), одержимо

$$A_1 U(t,x) = -\varphi_2\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\left[A_2 T_0(t,\nu) - A_1 T_1(t,\nu)\right]e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0},$$

$$A_2 U(t,x) = \varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\left[A_2 T_0(t,\nu) - A_1 T_1(t,\nu)\right]e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}. \tag{23}$$

З рівностей (23) одержимо, що розв'язок задачі (5), (6) можна подати у вигляді

$$U(t,x) = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\left[A_2 T_0(t,\nu) - A_1 T_1(t,\nu)\right]e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0},$$

де $\varphi(x) = Q(x)e^{\alpha x}$, $Q(x)$ – деякий поліном степеня n. З виконання другої умови (6) одержимо, що

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\Delta(\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0} \equiv 0$$

або

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\Delta(\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha} \equiv 0. \tag{24}$$

З огляду на лінійну незалежність функцій $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \ldots, x^n e^{\alpha x}$ тотожність (24) виконується тоді й лише тоді, коли α є r-кратним нулем функції $\Delta(\nu)$, причому $n < r$. Теорему доведено. ♦

Відповідно до теореми 3 покажемо, що задача (3), (4) має нетривіальні розв'язки, вказані у вступі. Для цієї задачі $a(\nu) = 0$, $b(\nu) = -a^2\nu^2$, $A_1 = B_1 = 1$, $A_2 = B_2 = 0$, $a^2(\nu) - b(\nu) = a^2\nu^2$.

Функції

$$T_0(t,\nu) = \cosh[a\nu t], \qquad T_1(t,\nu) = \begin{cases} \dfrac{\sinh[a\nu t]}{a\nu}, & \nu \ne 0, \\ t, & \nu = 0, \end{cases}$$

для кожного $t \in \mathbb{R}$ є цілими за параметром ν першого порядку і утворюють нормальну в точці $t = 0$ фундаментальну систему розв'язків рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} - a^2\nu^2\right]T(t,\nu) = 0 .$$

Запишемо характеристичний визначник задачі (3), (4):

$$\Delta(\nu) = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} T_0(h,\nu) & T_1(h,\nu) \\ T_0'(h,\nu) & T_1'(h,\nu) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T_1(h,\nu),$$

тому $\Delta(\nu) = \dfrac{\sinh[a\nu h]}{a\nu}$ для $\nu \neq 0$ та $\Delta(0) = h$.

Множина нулів $\Delta(\nu)$ матиме вигляд

$$M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{\nu_k = \pm\frac{\pi k i}{ah}\right\}, \qquad i^2 = -1 .$$

Числа $\nu_1, \nu_2, \ldots$ є простими нулями функції $\dfrac{\sinh[a\nu h]}{a\nu}$. Згідно з теоремою 3 розв'язками задачі (3), (4) будуть функції (20), де $Q(x)$ − стала (поліном нульового степеня), вигляду

$$U_k(t,x) = A_k\left\{-\frac{\sinh[a\nu h]}{a\nu}e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=\nu_k} = -\frac{A_k}{2a\nu_k}\left\{e^{\nu(x+at)} - e^{\nu(x-at)}\right\}\Big|_{\nu=\nu_k}$$

або

$$U_k(t,x) = \left\{e^{\nu(x+at)} - e^{\nu(x-at)}\right\}\Big|_{\nu=\nu_k},$$

де для простоти сталу A_k вибрано так: $A_k = -2a\nu_k$.

Функція $e^{\nu(x+at)} - e^{\nu(x-at)}$ є розв'язком рівняння (3) і задовольняє першу з умов (4) для довільного параметра ν. Відповідно до диференціально-символьного методу, подіявши на цю функцію довільним диференціальним виразом $\Phi\left(\dfrac{\partial}{\partial\nu}\right)$ з цілим символом $\Phi = \Phi(\nu)$ і поклавши після цього $\nu = 0$, одержимо розв'язок рівняння (3) у вигляді $U(t,x) = \Phi(x+at) - \Phi(x-at)$. Отримана функція U є розв'язком рівняння (3) (причому Φ може бути довільною двічі неперервно диференційовною на $\mathbb{R}$), U задовольняє першу умову (4), а для виконання другої з умов (4) достатньо виконання рівності $\Phi(x+ah) = \Phi(x-ah)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 3. Знайти нетривіальні розв'язки двоточкової задачі:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2} + \pi^2\right]U(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^2, \tag{25}$$

$$U(0,x) + i\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \qquad U(1,x) + i\frac{\partial U}{\partial t}(1,x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{26}$$

▼ Задача (25), (26) є задачею (5), (6), у якій $a(\nu) = \nu^2$, $b(\nu) = \pi^2$, $A_1 = B_1 = 1$, $A_2 = B_2 = i$, $h = 1$.

Нормальна в точці $t = 0$ фундаментальна система розв'язків звичайного диференціального рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\nu^2\frac{d}{dt} + \pi^2\right]T(t,\nu) = 0$$

має вигляд

$$T_0(t,\nu) = e^{-\nu^2 t}\left\{\nu^2\frac{\sinh\left[t\sqrt{\nu^4-\pi^2}\right]}{\sqrt{\nu^4-\pi^2}} + \cosh\left[t\sqrt{\nu^4-\pi^2}\right]\right\},$$

$$T_1(t,\nu) = e^{-\nu^2 t}\frac{\sinh\left[t\sqrt{\nu^4-\pi^2}\right]}{\sqrt{\nu^4-\pi^2}}.$$

Позначимо для зручності $\Phi(t,x,\nu) = \left[iT_0(t,\nu) - T_1(t,\nu)\right]e^{\nu x}$.

Запишемо характеристичний визначник задачі та множину його нулів:

$$\Delta(\nu) = (1 \quad i)\begin{pmatrix} T_0(1,\nu) & T_1(1,\nu) \\ T_0'(1,\nu) & T_1'(1,\nu) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-\nu^2}\,\frac{\sinh\sqrt{\nu^4-\pi^2}}{\sqrt{\nu^4-\pi^2}}(1-2i\nu^2-\pi^2),$$

$$M = \left\{\nu \in \mathbb{C}:\ \frac{\sinh\sqrt{\nu^4-\pi^2}}{\sqrt{\nu^4-\pi^2}} = 0,\ \ 1-2i\nu^2-\pi^2 = 0\right\}.$$

Позначимо корені рівняння $\nu^4 - \pi^2 = -\pi^2 k^2$, $k \in \mathbb{N}$:

$\nu_1 = 0$ для $k = 1$

і

$$\nu_{k\pm} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \mp i)\sqrt[4]{\pi^2(k^2-1)},$$

$$\mu_{k\pm} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \pm i)\sqrt[4]{\pi^2(k^2-1)} \qquad \text{для } k \ge 2.$$

Корені рівняння $1 - 2i\nu^2 - \pi^2 = 0$ позначимо через $\mu_{0\pm} = \pm\dfrac{\sqrt{\pi^2-1}}{2}(1+i)$.

Точки множини M, зображеної на рис. 1, є симетричними відносно точки $(0,0)$ комплексної площини. Відстань між точками $\nu_{k\pm}$ і $\nu_{k+1,\pm}$, а також між точками $\mu_{k\pm}$ і $\mu_{k+1,\pm}$ при $k \to \infty$ прямує до нуля.

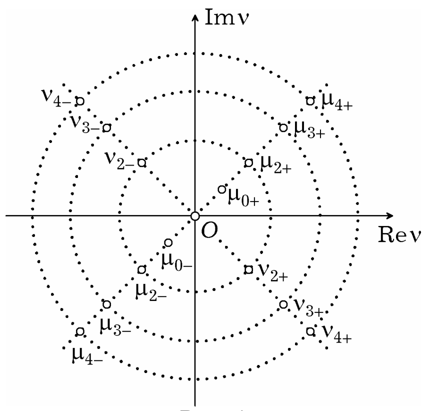

Рис. 1

Число $\nu_1 = 0$ є чотирикратним коренем $\Delta(\nu)$, тому для ν_1 за теоремою 3 знаходимо нетривіальні квазіполіномні розв'язки задачі (25), (26):

$$U_{11}(t,x) = \Phi(t,x,0) = i\cos\pi t - \frac{\sin\pi t}{\pi},$$

$$U_{12}(t,x) = \left.\frac{\partial\Phi(t,x,\nu)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0} = ix\cos\pi t - x\frac{\sin\pi t}{\pi},$$

$$U_{13}(t,x) = \left.\frac{\partial^2\Phi(t,x,\nu)}{\partial\nu^2}\right|_{\nu=0} = i(x^2-2t)\cos\pi t - (x^2-2t-2i)\frac{\sin\pi t}{\pi},$$

$$U_{14}(t,x) = \left.\frac{\partial^3\Phi(t,x,\nu)}{\partial\nu^3}\right|_{\nu=0} = i(x^3-6tx)\cos\pi t - (x^3-6tx-6ix)\frac{\sin\pi t}{\pi}.$$

Для простих коренів $\nu_{k\pm}$, $\mu_{k\pm}$ отримаємо такі розв'язки задачі (25), (26):

$$U_{k1\pm}(t,x) = \left(\left(\pm\pi\sqrt{k^2-1}-1\right)\frac{\sin\pi kt}{\pi k} + i\cos\pi kt\right)\times$$
$$\times\exp\left(\mp\pi i\sqrt{k^2-1}\,t \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1\mp i)\sqrt[4]{\pi^2(k^2-1)}\,x\right),$$

$$U_{k2\pm}(t,x) = \left((\mp\pi\sqrt{k^2-1}-1)\frac{\sin\pi kt}{\pi k} + i\cos\pi kt\right)\times$$
$$\times\exp\left(\pm\pi i\sqrt{k^2-1}\,t \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)\sqrt[4]{\pi^2(k^2-1)}\,x\right).$$

Для коренів $\mu_{0\pm} = \pm \frac{\sqrt{\pi^2 - 1}}{2}(1+i)$ рівняння $1 - 2i\nu^2 - \pi^2 = 0$ розв'язки задачі (25), (26) матимуть вигляд

$$U_{0\pm}(t,x) = \Phi(t,x,\mu_{0\pm}) = i\exp\left(it \pm \frac{\sqrt{\pi^2-1}}{2}(1+i)x\right).$$

Зауважимо, що всі розв'язки U_{11}, U_{12}, U_{13}, U_{14}, $U_{k1\pm}$, $U_{k2\pm}$, $U_{0,\pm}$ задачі (25), (26) знайдено з точністю до сталих множників. ▲

Висновки. Досліджено однорідну задачу для рівняння із частинними похідними другого порядку за часовою змінною, за якою задано двоточкові умови, та в загальному нескінченного порядку за іншою (просторовою) змінною. У випадку, коли характеристичний визначник задачі є відмінним від нуля для всіх значень ν, доведено існування лише тривіального розв'язку задачі у класі цілих функцій. Якщо характеристичний визначник задачі тотожно дорівнює нулеві, то доведено, що ядро задачі є нескінченновимірним і встановлено вигляд елементів ядра. У випадку, коли множина нулів характеристичного визначника задачі не є порожньою, а також не збігається з $\mathbb{C}$, доведено існування нетривіальних квазіполіномних розв'язків задачі та вказано спосіб їх побудови.

У перспективі цікавим є знаходження класів однозначної розв'язності відповідної неоднорідної задачі та дослідження ядра такої ж задачі у випадку декількох просторових змінних.

1. *Борок В. М., Перельман М. А.* О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 8. – С. 29–34.
2. *Віленць І. Л.* Класи єдиності розв'язку загальної крайової задачі в шарі для систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 3. – С. 195–197.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – Москва: Физматгиз, 1958. – 274 с.
4. *Ільків В. С., Нитребич З. М.* Оцінка міри множини рівня розв'язків диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 3. – С. 29–36.
   Те саме: *Il'kiv V. S., Nytrebych Z. M.* Estimate of the measure of level set for the solutions of differential equations with constant coefficients // J. Math. Sci. – 2016. – **217**, No. 2. – P. 166–175.
5. *Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич З. М.* Дослідження задачі з однорідними локальними доточковими умовами для однорідної системи рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 4. – С. 17–28.
   Те саме: *Kalenyuk P. I., Kohut I. V., Nytrebych Z. M.* An investigation into a problem with homogeneous local two-point conditions for a homogeneous system of partial differential equations // J. Math. Sci. – 2011. – **174**, No. 2. – P. 121–135.
6. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во нац. ун-ту «Львів. політехніка», 2002. – 292 с.
7. *Леонтьев А. Ф.* Обобщения рядов экспонент. – Москва: Наука, 1981. – 320 с.
8. *Нитребич З. М.* Крайова задача в безмежній смузі // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1994. – Вып. 37. – С. 16–21.
   Те саме: *Nitrebich Z. M.* A boundary-value problem in an unbounded strip // J. Math. Sci. – 1996. – **79**, No. 6. – P. 1388–1392.
9. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
10. *Пташник Б. Й.* Задача типу Валле-Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1966. – № 10. – С. 1254–1257.
11. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.

12. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача з кратними вузлами для диференціальних рівнянь із частинними похідними // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 3. – С. 400–413.

Те саме: *Ptashnyk B. I., Symotyuk M. M.* Multipoint problem with multiple nodes for partial differential equations // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, No. 3. – P. 481–497.

13. *Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для лінійних систем рівнянь з частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45,** № 4. – С. 107–118.
14. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград: Тип. М. П. Фроловой, 1917. – xiv+308 с.
15. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. – Москва: Наука, 1980. – 232 с.
16. *Bassanini P.* Iterative methods for quasilinear hyperbolic systems in the first canonic form // Appl. Anal. – 1981. – **12**, No. 2. – P. 105–117.
17. *Cesari L.* A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems // Riv. Mat. Univ. Parma. Ser. 3. – 1974. – **3**. – P. 107–131.
18. *Picone M.* Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine // Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. 1re sér. – 1910. – **11**, No. 1. – P. 1–144.
19. *Pucci P.* Problemi ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche // Boll. Unione Mat. Ital. V. Ser. – 1979. – **16 B**. – P. 87–99.
20. *De la Vallée-Poussin Ch.-J.* Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equations d'ordre n // J. Math. Pures Appl. – 1929. – **8**, No. 2. – P. 125–144.

О ЯДРЕ ДВУХТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕНИ

Исследована задача для однородного уравнения с частными производными второго порядка по временной переменной, по которой заданы однородные двухточечные условия, вообще бесконечного порядка по второй (пространственной) переменной. Доказано, что исследуемая задача имеет только тривиальное решение, если характеристический определитель тождественно не равен нулю. В случае, если множество нулей характеристического определителя не пустое, указан способ построения нетривиальных решений задачи.

ON THE KERNEL OF TWO-POINT PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER IN TIME

The problem for homogeneous partial differential equation of the second order with respect to time variable, in which there given two-point conditions, and generally infinite order in another (spatial) variable was studied. We proved the problem has only trivial solution when the characteristic determinant of the problem is not identically zero. In the case when the set of zeros of the characteristic determinant of the problem is not empty the method of construction nontrivial solutions of the problem was found.

[1] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,

[2] Львів. нац. мед. ун-т
ім. Д. Галицького, Львів

Одержано
27.05.16