УДК 539.3

Б. М. Калиняк, Ю. В. Токовий, А. В. Ясінський

ПРЯМІ ТА ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ТЕРМОМЕХАНІКИ СТОСОВНО ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ ДЕФОРМІВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ

Наведено основні етапи розвитку започаткованої професором В. М. Вігаком тематики досліджень, яка стосується теорії і методів оптимального керування тепловими процесами і термонапруженим станом деформівних твердих тіл, теорії обернених задач теплопровідності і термомеханіки, математичних методів механіки деформівного твердого тіла. Відзначено тісний зв'язок отриманих теоретичних результатів із прикладними проблемами теплоенергетики, які спонукали до розв'язування відповідних задач. Відмічено вклад науковців Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України у розвиток вказаної проблематики. Проаналізовано перспективи подальшого розвитку таких досліджень, а також окремі стадії життєвого та творчого шляху професора В. М. Вігака.

Обернені задачі математичної фізики, які ставлять за мету відтворення невідомих причинних характеристик математичної моделі за відомими наслідковими, зокрема задачі оптимізації, що передбачають, з одного боку, досягнення максимального ефекту, а з іншого – використання наперед заданого (зазвичай обмеженого) ресурсу, є чи не найпоширенішими задачами повсякденного життя. Особливо актуальними вони є в наш час бурхливого технологічного розвитку, коли задоволення невпинно зростаючих людських потреб не вкладається у наявні ресурси: енергетичні, земельні, водні тощо. Завдання проектування, виготовлення і експлуатації конструкцій в умовах інтенсивних силових і теплових навантажень, а також методи оцінки їх довговічності приводять до необхідності оптимізувати відповідні технологічні процеси з огляду на мінімізацію часу їх тривалості за відповідних обмежень, оптимізувати характеристики матеріалу елементів конструкції для заданих умов їх експлуатації, ідентифікувати термонапружений стан цих виробів за неповної вхідної інформації тощо.

У цій праці проаналізовано розвиток методів дослідження прямих та обернених задач термомеханіки стосовно оптимізації та ідентифікації термонапруженого стану деформівних твердих тіл, які започатковані професором В. М. Вігаком і активно розвиваються в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача Національної академії наук України.

Формування наукового світогляду та характерного дослідницького підходу науковця відбувається за суттєвого впливу наукових учителів, чий професійний та особистісний приклад є взірцем для наслідування, а також ставить перед ним нові орієнтири та цілі, досягнення яких обумовлює наукове зростання. Серед характерних чинників однієї з психологічних моделей такого впливу вирізняють [62, 79], зокрема, психологічний (вплив особистості учителя на учня), експертний (учитель володіє значно вищим рівнем знань, умінь і навичок, ніж учень), харизматичний (учитель володіє певними характерними якостями, які можуть спонукати учня до прогресу, зокрема, понад впливом логіки чи усталених методів навчання) та інші фактори. З цього погляду важливим є вивчення позитивного досвіду та особистих якостей видатних науковців і в той же час успішних учителів, які не лише прищепили послідовникам певні наукові інтереси, ідеї та підходи, але й сформували стійкі професійні якості, передали прогресивний досвід та традиції наукової школи, а отже, забезпечили тяглість наукових поколінь, що є однією з передумов наукового поступу.

Тому важливо також окреслити науковий доробок визнаного у світі українського вченого, доктора фізико-математичних наук, професора Василя Михайловича Вігака, у розвиток механіки деформівного твердого тіла та теорії оптимального керування тепловими процесами, а також простежити вплив та основні напрямки розвитку його наукових ідей у роботах учнів і послідовників. Сподіваємось також, що наведений у статті матеріал виявиться корисним (зокрема, при вирішенні таких «типових» проблем, як вибір теми чи методів досліджень, подання та виклад матеріалу у наукових працях тощо) як для учнів, так і для вчителів, які, кожен зі свого боку, опановують царину ефективної професійної взаємодії задля досягнення поставленої наукової мети.

Вігак В. М. народився 5 травня 1936 р. на Львівщині. Після закінчення університету в 1958 р. він упродовж двох років працює вчителем фізики і математики, а у 1960 р. переходить на роботу на підприємство Львів-ОРГРЕС Міністерства енергетики і електрифікації УРСР, де пройшов шлях від інженера до бригадного інженера-експерта з міцності та термоміцності теплоенергетичного обладнання. Саме тут, у поєднанні з пошуком вирішення виробничих проблем, починається самобутній творчий шлях майбутнього науковця. Такі особливості організації енергетичного виробництва, як постійна потреба підвищення продуктивності за одночасного зменшення енергетичних затрат, високий рівень відповідальності за прийняті рішення (адже помилки можуть загрожувати суттєвими матеріальними втратами, не кажучи про можливість аварій чи катастроф), раціоналізація технологій тощо, спонукають до вдосконалення виробничого процесу та оптимізації розподілу і використання ресурсів. Звідси, мабуть, беруть початок основні риси «наукового почерку» В. М. Вігака – вміння комплексного аналізу процесів і явищ, адекватного моделювання їх взаємовпливів; усвідомлення обмежень математичної моделі та достовірності припущень при її побудові; висока вимогливість до аналізу результатів; поєднання виробничого підходу (основою якого є надійність за природних відхилень параметрів зі збереженням економічної доцільності) і наукового підходу (основа якого – достовірність та адекватність моделей за фіксованих параметрів та аналіз впливу їх допустимої зміни на досліджувані процеси); зацікавлення оптимізаційними задачами і побудовою ефективних методик їх розв'язування. Наукові публікації В. М. Вігака у цей період (першу статтю [69] опубліковано в 1962 р. у журналі «Теплоэнергетика» у співавторстві з науковцями-енергетиками, повний перелік наукових публікацій В. М. Вігака див. в біографічній замітці [26]) відзначаються чіткою практичною спрямованістю. Вони стосувалися дослідження пускових режимів основних деталей енергоблоків (парогенератор – головні паропроводи – турбогенератор), методики монтажу та налагодження енергоблоків великої потужності, аналізу конструкції і функціонування паропроводів, методів вимірювання та розрахунку теплового та термонапруженого станів паропроводів і відповідальних елементів пароенергетичних установок, визначення напружено-деформованого стану паропроводів за впливу власної ваги і оптимального розміщення опор та підвісок, аналізу обробки результатів пусків дубль-блоків, оптимізації перехідних температурних режимів основних вузлів теплоенергетичного устаткування та ін.

Визначальний вплив на формування напрямку наукових досліджень В. М. Вігака мала співпраця з видатним науковцем і педагогом академіком Ярославом Степановичем Підстригачем, який глибоко цікавився проблемами виробництва та технологічного прогресу в поєднанні з розвитком моделей і методів теоретичної та прикладної науки. У 1973 р. Василь Михайлович Вігак за результатами спільних досліджень під керівництвом Я. С. Підстригача та А. Г. Прокопенка захистив кандидатську дисертацію «Исследование температурного и напряженного состояний упругих тел применительно к оптимизации переходных режимов в деталях энергооборудования». У дисертаційній роботі було сформульовано важливі для теплоенергетики прикладні задачі оптимального за швидкодією керування нагрівом деталей енергообладнання з урахуванням низки технологічних обмежень, а також запропоновано методику їх розв'язування.

Подальший розвиток цієї методики привів до розробки нового ефективного підходу до розв'язання задач оптимального керування температурними режимами та термонапруженим станом твердих тіл, який ґрунтується на зведенні їх до обернених задач теплопровідності або термопружності.

Розкриттю наукового таланту В. М. Вігака сприяв перехід у 1975 р. на роботу в очолюваний його вчителем Львівський філіал математичної фізики Інституту математики АН УРСР (тепер Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України), де пройшов шлях від старшого наукового співробітника відділу механіки деформівного твердого тіла до завідувача відділу. З 1982 по 1990 рр. очолював лабораторію оптимального керування тепловими процесами цього ж відділу. Проведені у цей час наукові дослідження підсумовано у монографії [6]. У наступних працях разом з А. В. Костенком було здійснено теоретичне обґрунтування згаданого вище підходу для випадку пружного деформування матеріалу [13–15] за обмежень на напруження, параметри теплового процесу (перепади і градієнти температурного поля, швидкість нагріву, середню температуру) і функцію керування (тепловий потік на поверхні, температуру нагрівального середовища), що склало основу кандидатської дисертації А. В. Костенка [55].

Проблему оптимального за швидкодією керування нагрівом пружних неоднорідних термочутливих анізотропних тіл за допомогою зовнішнього теплового навантаження або внутрішніх теплових джерел досліджено в працях В. М. Вігака разом з А. В. Костенком, М. Б. Вітером, Х. О. Засадною, М. І. Свиридою, Я. Л. Лісевичем, Ю. П. Ярмолюком [9, 16–18, 23, 39, 40, 44]. Спільно з В. Л. Фальковським і Ю. П. Ярмолюком досліджено застосування до розв'язання цих задач методів теорії некоректних обернених задач теплопровідності [22, 23, 36].

На випадок в'язкопружного деформування матеріалу цей метод був поширений В. М. Вігаком спільно з Л. Д. Величком [3, 10].

Розв'язки вказаних вище задач є важливими також стосовно мінімізації енергетичних затрат технологічних процесів, пов'язаних з термічною обробкою елементів конструкцій, зокрема у металургійній і машинобудівній галузях промисловості. Оскільки більшість таких процесів відбувається за умов інтенсивного теплового навантаження тіла, то актуальним є врахування можливості його пластичного деформування. Тому в межах теорії пружно-пластичного деформування елементів тіла за криволінійними траєкторіями малої кривини В. М. Вігаком разом із А. В. Ясінським і М. Й. Юзв'яком [25, 40, 76] побудовано розв'язки задач оптимального за швидкодією керування нагріву термочутливих тіл за обмежень на функцію керування, параметри теплового процесу та максимальне значення інтенсивності напружень чи інтенсивності накопиченої пластичної деформації. Показано, що знайдені оптимальні температурні режими нагріву термочутливих тіл дають змогу також, шляхом вибору відповідних значень обмежуючих параметрів, керувати рівнем залишкових напружень і деформацій у тілі, що важливо з огляду на забезпечення його міцнісних та функціональних властивостей. Подальший розвиток таких досліджень можна знайти у працях [82, 83].

Метод зведення задач оптимізації напружено-деформованого стану пружних тіл до обернених задач термопружності виявився ефективним також і при розв'язуванні задач оптимального керування за допомогою стаціонарних внутрішніх чи зовнішніх теплових джерел розподілом у заданому перерізі тіла компонент вектора температурних переміщень чи тензора напружень [12, 24, 39]. Задачі такого типу є актуальними стосовно керування геометрією робочих поверхонь елементів оптичних систем, зокрема, лазерних дзеркал [11]. Розвиток вказаного підходу, наприклад, на нестаціонарні задачі термопружності, можна знайти у працях [99, 100].

Підсумком наукових досліджень, проведених В. М. Вігаком у 1980-х роках, стала дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук [8], яка була оформлена у вигляді монографії [7] і успішно захищена Василем Михайловичем у 1990 р. у м. Новосибірську. У монографії цілісно і систематично викладено метод оберненої задачі термомеханіки стосовно розв'язування задач керування за допомогою внутрішніх чи зовнішніх теплових джерел квазістатичними температурними напруженнями та переміщеннями в деформівних твердих тілах. У 1994 р. йому присвоєно вчене звання професора за спеціальністю «механіка деформівного твердого тіла».

При зведенні згаданих вище задач керування до обернених задач термопружності та їх розв'язанні було виявлено, що в окремих випадках [7] необхідними умовами існування розв'язків отриманих інтегральних рівнянь є інтегральні умови на компоненти тензора напружень і вектора переміщень, які, власне кажучи, є інтегральними умовами рівноваги чи суцільності. Цей результат привів до важливого етапу наукової діяльності В. М. Вігака в 1990–2003 рр., результатом якого стала розробка методу розв'язування прямих задач теорії пружності та термопружності, що ґрунтується на безпосередньому інтегруванні диференціальних рівнянь рівноваги і суцільності в напруженнях та зведенні прямої задачі до розв'язання диференціального або інтегро-диференціального рівняння (чи системи таких рівнянь) для відшукання окремих компонент тензора напружень чи їх комбінацій (визначальні функції) без підвищення диференціального порядку отриманих ключових рівнянь порівняно з вихідними рівняннями задачі. За мету ставилося знаходження розв'язків прямих задач термопружності у вигляді

$$\sigma_{\xi\eta} = \int_D G_{\xi\eta}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}})T(\overline{\mathbf{x}})\,d\overline{\mathbf{x}}, \qquad u_\xi = \int_D V_\xi(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}})T(\overline{\mathbf{x}})\,d\overline{\mathbf{x}}, \tag{1}$$

що явно пов'язує компоненти тензора напружень $\sigma_{\xi\eta}$ чи вектора переміщень u_ξ із температурним полем $T(\mathbf{x})$. Тут $G_{\xi\eta}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}})$ та $V_\xi(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}})$ – відомі функції, залежні від характеристик матеріалу і умов на межі, $\mathbf{x} \in D$, D – область тривимірного простору, ξ та η – координатні напрямки. Аналогічні подання, які пов'язують шукані компоненти напружено-деформованого стану та задані силові фактори і не втрачають змісту на межі області D, є бажаними у випадку розв'язання задач теорії пружності. З використанням такого підходу було побудовано розв'язки одно-, дво- та тривимірних задач теорії пружності та термопружності для необмежених і напівобмежених тіл у різних системах координат [5, 19, 20, 27, 29, 38]. Застосування цього методу дає змогу встановити співвідношення між компонентами тензора напружень і вектора переміщень на межі тіла, отримати вирази для інтегральних результуючих зусиль і моментів від напружень та умови їх зрівноваження; встановити інтегральні умови суцільності для компонент тензора деформацій і вектора переміщень. Отримані у такий спосіб інтегральні умови є зручним експрес-критерієм достовірності розв'язків задач термопружності. Загальну концепцію методу викладено в есе [95] «Encyclopedia of Thermal Stresses» – наймасштабнішого видання у галузі термомеханіки.

Слід зауважити, що побудова розв'язків типу (1) для задач теорії пружності чи термопружності у випадку обмежених областей з кутовими точками (згідно з визначенням [46] – це тіла, поверхня яких складається з частин, паралельних до координатних поверхонь різних сімей) ускладнена, зокрема, несамоспряженістю загального диференціального оператора задачі, що робить практично неможливим побудову повних ортогональних систем власних функцій у ключових рівняннях (такі функції, як правило, виявляються комплексними та неортогональними з невизначеним алгоритмом розвинення) і, як наслідок, знаходження розв'язків, які би точно задовольняли як вихідні рівняння, так і крайові умови на повній поверхні таких тіл. Більшість відомих методів, історія розвитку яких сягає відомої задачі про пружну рівновагу паралелепіпеда, сформульованої Ляме і висунутої в 1846 р. на здобуття *Grand Prix de Mathématiques* Паризької Академії наук [85], в основному зорієнтовано на точне задоволення вихідних рівнянь вказаних задач (часто з використанням допоміжних потенціальних гармонічних чи бігармонічних функцій) і задоволення крайових умов з контрольованою точністю. Такими є, зокрема, метод однорідних розв'язків [58, 84] та метод перехресної суперпозиції [46, 59]. Використання методу безпосереднього інтегрування В. М. Вігака має на меті насамперед точне задоволення крайових умов, що є принциповим для встановлення явного причинно-наслідкового зв'язку типу (1) між прикладеними силовими чи тепловими навантаженнями і шуканими компонентами напружено-деформованого стану і, отже, відкриває широкі можливості реалізації методу оберненої задачі термомеханіки в задачах оптимального керування. З використанням цього методу В. М. Вігаком спільно з М. Й. Юзв'яком, А. В. Ясінським і Ю. В. Токовим було побудовано розв'язки плоских задач теорії пружності та термопружності для прямокутної області у вигляді розвинень за повними ортогональними системами функцій

$$\{1,\ y,\ \cos\gamma_n y/b,\ \sin\lambda_n y/b\},$$

$$\{1,\ x,\ \cos\gamma_n x/a,\ \sin\lambda_n x/a\},\qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

де $\gamma_n = n\pi$, λ_n – додатні корені трансцендентного рівняння $\operatorname{tg}\lambda = \lambda$, $|x| \le a$, $|y| \le b$. Власні функції $\{\cos\gamma_n y/b, \sin\lambda_n y/b\}$ та $\{\cos\gamma_n x/a, \sin\lambda_n x/a\}$ виділяють у виразах для напружень складові, які відповідають самозрівноваженим силовим навантаженням і згасають з віддаленням від навантаженої ділянки межі. Для задач теорії пружності [33, 34] та термопружності [97] було розроблено методику побудови цих складових напружень, яка полягає у реалізації алгоритму послідовних наближень, що дозволяє задовольнити ключові рівняння з контрольованою точністю. Функції $\{1, y\}$ та $\{1, x\}$, названі приєднаними функціями, виділяють у розвиненнях напружень частини (складові), що відповідають головному вектору та головному моменту прикладених силових навантажень, які було знайдено та проаналізовано в роботах [21, 32]. Розвинення розв'язку за системами (2) дозволяє явно розділити напружений стан на елементарні (несамозрівноважені) та самозрівноважені складові, що узгоджується з принципом статичної еквівалентності Сен-Венана. Результатом вказаних досліджень стала дисертаційна робота Ю. В. Токового [66]. У роботах [31, 35, 41] цей підхід було розвинуто для розв'язання плоских задач теорії пружності для кільцевого сектора та циліндра скінченної довжини.

На основі знайденого таким чином розв'язку прямої задачі термопружності методом оберненої задачі термомеханіки було побудовано розв'язки задач оптимального за швидкодією керування нагріву термочутливого вільного від зовнішнього силового навантаження довгого прямокутного паралелепіпеда, що перебуває в умовах плоскої деформації, за обмежень на функцію керування, параметри теплового процесу та максимальне значення інтенсивності напружень або інтенсивності накопиченої пластичної деформації [56, 82, 83].

Метод оберненої задачі термомеханіки було успішно застосовано також і до розв'язування важливого класу задач про визначення теплового і термонапруженого станів твердих тіл у випадку відсутності повної інформації про теплове навантаження. На основі цього підходу сформульовано та шляхом зведення до обернених задач термопружності побудовано розв’язки одно- та двовимірних нестаціонарних задач визначення теплового і термонапруженого станів в однорідних, кусково-однорідних, кусково-однорідних з фрикційним теплоутворенням, неоднорідних і термочутливих тілах канонічної форми за температурою та додатково відомими переміщеннями (деформаціями) однієї з межових поверхонь і відсутності інформації про теплове навантаження на іншій. Зацікавлений читач може простежити розвиток цих досліджень, зокрема, за публікаціями [56, 71, 73, 75, 99]. Значна частина отриманих результатів склала основу докторської дисертації А. В. Ясінського [74].

Поряд із побудовою розв’язків прямих задач у вигляді (1), застосування методу безпосереднього інтегрування відкриває можливість вирішення низки принципових теоретичних питань механіки деформівного твердого тіла. Одним з таких питань є «перевизначеність» вихідної системи рівнянь для побудови розв’язків тривимірних задач теорії пружності та термопружності в напруженнях. Так, наприклад, у випадку декартових координат рівняння суцільності в деформаціях, отримані Сен-Венаном у 1864 р. шляхом вилучення переміщень із рівнянь суцільності Коші

$$\textbf{А}: \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad x \nearrow^{y} \searrow z \leftarrow, \qquad \textbf{Б}: \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad x \nearrow^{y} \searrow z \leftarrow, \tag{3}$$

мають вигляд [64]

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \qquad x \nearrow^{y} \searrow z \leftarrow, \tag{4}$$

та

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right), \qquad x \nearrow^{y} \searrow z \leftarrow. \tag{5}$$

Тут $\varepsilon_{\xi\eta}$, $\xi, \eta = \{x, y, z\}$, – компоненти тензора деформацій, u_ξ, $\xi = \{x, y, z\}$, – компоненти вектора переміщень, а символ «$x \nearrow^{y} \searrow z \leftarrow$» означає, що два інші рівняння отримуються коловою (циклічною) перестановкою індексів x, y, z. Із використанням фізичних співвідношень [64] рівняння (4), (5) набувають вигляду шести рівнянь суцільності в напруженнях, які, разом із трьома рівняннями рівноваги, складають перевизначену систему для відшукання шести компонент тензора напружень. У 1938 році R. V. Southwell показав [86], що використання функцій Максвелла при застосуванні варіаційного принципу Кастільяно приводить до отримання лише рівнянь (4). Якщо ж використати функції Морери, то аналогічним чином буде отримано лише рівняння (5). Коментуючи цей результат, названий згодом «парадоксом Саусвелла», проф. Дж. І. Тейлор зауважив [86], що для однозначного визначення напружень в однозв’язному тілі необхідно і достатньо лише рівнянь (4) або лише рівнянь (5) без жодних додаткових умов. У відповідь на це R. V. Southwell, використовуючи комбінації функцій Максвелла та Морери, спробував довести, що усі шість рівнянь (4), (5) є необхідними [86]. Проте окремі елементи його доведення були недостатньо переконливими [98], що спонукало до подальших досліджень цього питання (див., наприклад, [1, 2, 45, 57, 69, 77, 81] та ін.), яке і далі залишалося дискусійним. Застосувавши метод безпосереднього інтегрування, В. М. Вігак у роботі [28] показав, що рівняння (3) групи **А**, наприклад, у випадку задачі для пружного паралелепіпеда $\{|x| \le a_x, |y| \le a_y, |z| \le a_z\}$, зводяться до трьох рівнянь вигляду

$$2u_\xi = u_\xi\Big|_{\xi=-a_\xi} + u_\xi\Big|_{\xi=a_\xi} + \int\limits_{-a_\xi}^{a_\xi} \varepsilon_{\xi\xi}\,\mathrm{sgn}\,(\xi-\zeta_\xi)\,d\zeta_\xi, \quad \xi=\{x,y,z\}. \tag{6}$$

За наявності формул (6) виконання рівнянь (3) групи **Б** зводиться до наступних трьох інтегро-диференціальних рівнянь суцільності:

$$2\varepsilon_{\xi\eta} = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(u_\xi\Big|_{\xi=-a_\xi} + u_\xi\Big|_{\xi=a_\xi} + \int\limits_{-a_\xi}^{a_\xi} \varepsilon_{\xi\xi}\,\mathrm{sgn}\,(\xi-\zeta_\xi)\,d\zeta_\xi \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\xi}\left(u_\eta\Big|_{\eta=-a_\eta} + u_\eta\Big|_{\eta=a_\eta} + \int\limits_{-a_\eta}^{a_\eta} \varepsilon_{\eta\eta}\,\mathrm{sgn}\,(\eta-\zeta_\eta)\,d\zeta_\eta \right),$$

$$\xi,\,\eta=\{x,y,z\}. \tag{7}$$

Відповідним диференціюванням рівняння (7) зводяться до (4) за наявності певних умов погодження на сторонах паралелепіпеда. У такий спосіб доведено, що три з шести рівнянь (3) можна використати для визначення переміщень u_ξ, $\xi=\{x,y,z\}$, а решту три рівняння – для утворення сімнадцяти еквівалентних наборів по три з шести рівнянь суцільності (4), (5), які для обмежених областей, взагалі кажучи, є інтегро-диференціального типу (7). Ці висновки узгоджуються з майже одночасно отриманими результатами М. І. Остросабліна [61] і були використані при побудові розв’язків тривимірних задач теорії пружності і термопружності [19, 20, 94].

Широкі можливості методу безпосереднього інтегрування вповні проявилися при побудові аналітичних та аналітично-числових розв’язків задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних, зокрема, функціонально-градієнтних тіл. Ефективність методу для такого класу задач пояснюється тим, що метод безпосереднього інтегрування ґрунтується на зведенні вихідних задач у напруженнях до розв’язання ключових рівнянь з відповідними крайовими та інтегральними умовами для визначальних функцій (компонент тензора напружень або їх лінійних комбінацій). Шукані напруження виражають через визначальні функції за допомогою співвідношень, отриманих шляхом інтегрування диференціальних рівнянь рівноваги, які, по-перше, пов’язують усі компоненти тензора напружень, що дає можливість визначити будь-яку з них через решту, а по-друге, не залежать від механічних характеристик матеріалу. Так, наприклад, плоску осесиметричну задачу термопружності для порожнистого радіально-неоднорідного циліндра зведено до ключового рівняння суцільності [29, 30, 42]

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\nu^2(\rho)}{E(\rho)}\sigma(\rho) + (1+\nu(\rho))\alpha(\rho)T(\rho)\right) = \sigma_{rr}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1+\nu(\rho)}{E(\rho)}\right), \tag{8}$$

що пов’язує сумарні $\sigma=\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}$ та радіальні σ_{rr} напруження, і співвідношень

$$\sigma_{rr}(\rho) = -\frac{\bar\rho^2}{\rho^2}p_I + \frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\bar\rho}^{\rho}\eta\sigma(\eta)\,\mathrm{d}\eta,\ \ \sigma_{\theta\theta}(\rho) = \sigma(\rho) + \frac{\bar\rho^2}{\rho^2}p_I - \frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\bar\rho}^{\rho}\eta\sigma(\eta)\,\mathrm{d}\eta, \tag{9}$$

які отримано з рівняння рівноваги з урахуванням крайової умови $\sigma_{rr}(\bar\rho) = -p_I$. Тут ρ – безрозмірна радіальна координата, отримана віднесенням відповідної розмірної величини до зовнішнього радіуса, $E(\rho)$ – модуль пружності, $\nu(\rho)$ і $\alpha(\rho)$ – відповідно коефіцієнти Пуассона та лінійного теплового розширення, $T(\rho)$ – температурне поле, p_I – заданий сталий розподіл радіальних напружень на внутрішній поверхні циліндра $\rho=\bar\rho$. На зовнішній поверхні $\rho=1$, де задано крайову умову $\sigma_{rr}(1) = -p_O$, перше зі співвідношень (9) породжує інтегральну умову

$$\int_{\bar\rho}^{1} \rho\sigma(\rho)\,d\rho = \bar\rho^2 p_I - p_O. \tag{10}$$

Розв'язавши рівняння (8) відносно сумарних напружень σ і підставивши в отриманий розв'язок перше зі співвідношень (9), отримуємо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$\sigma(\rho) = \frac{E(\rho)}{1-\nu^2(\rho)} A + f(\rho) + \int_{\bar\rho}^{\rho} \sigma(\xi)\mathscr{K}(\rho,\xi)\,d\xi\,, \tag{11}$$

де A − стала інтегрування, яку визначаємо за допомогою інтегральної умови (10), а вільний член

$$f(\rho) = -\frac{\alpha(\rho)E(\rho)}{1-\nu(\rho)} T(\rho) - p_I \bar\rho^2 \frac{E(\rho)}{1-\nu^2(\rho)} \int_{\bar\rho}^{\rho} \frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \frac{1+\nu(\eta)}{E(\eta)}\,d\eta$$

і ядро

$$\mathscr{K}(\rho,\xi) = \frac{\xi E(\rho)}{1-\nu^2(\rho)} \int_{\xi}^{\rho} \frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \frac{1+\nu(\eta)}{E(\eta)}\,d\eta$$

є відомими функціями. Після знаходження розв'язку рівняння (11) з використанням відповідної аналітичної, аналітично-числової або числової методик [4] радіальну та колову компоненти тензора напружень знаходимо за допомогою співвідношень (9). Основною перевагою цього підходу є те, що побудова розв'язку ключового рівняння не накладає жодних обмежень на характер функцій, якими задаються властивості матеріалу (окрім існування потрібного порядку похідних, принаймні в узагальненому сенсі). Таким чином, цей підхід виявляється ефективним для широкого класу неоднорідних матеріалів. Результати дослідження одновимірних задач теорії пружності та термопружності для поперечно-неоднорідного шару, суцільних і порожнистих циліндра та кулі склали основу дисертаційної роботи Б. М. Калиняка [50].

Метод безпосереднього інтегрування був використаний також у працях прикладного характеру, спрямованих на подальший розвиток розрахунково-експериментальної методики [54] визначення стаціонарних розподілів залишкових напружень у зварних швах, які моделюються полями залишкових деформацій. Ці розподіли були визначені для зварених у стик плит [37, 43, 70], прямокутних пластин [60] і товстостінної труби з круговим стиковим швом [87].

Стосовно розв'язування прямих задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних тіл метод безпосереднього інтегрування знайшов подальший розвиток у роботах Б. М. Калиняка та Ю. В. Токового з колегами та учнями. Зокрема, було побудовано розв'язки одновимірних задач термопружності для термочутливого багатошарового циліндра за умов асимптотичного теплового режиму [49, 53]. Розв'язок одновимірної квазістатичної задачі теорії пружності та термопружності для радіально-неоднорідної порожнистої кулі за різних способів задання напружень і переміщень на її поверхнях наведено в [52]. У праці [48] метод безпосереднього інтегрування було поширено на динамічні задачі теорії пружності та термопружності для радіально-неоднорідного ортотропного циліндра. Методику визначення характеристик неоднорідних матеріалів для забезпечення нульових радіальних і колових термонапружень у довгому порожнистому циліндрі при заданих сталих теплових навантаженнях на поверхнях і за класичних умов теплообміну, заданих на поверхнях циліндра, та опису характеристик матеріалу моделлю простої суміші запропоновано в роботі [51]. Застосуванням методу резольвентного ядра [4] для побудови розв'язків ключових інтегральних рівнянь, до яких зводяться задачі для довільно неоднорідних уздовж однієї з координат тіл, вдалося отримати розв'язки плоских задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних смуги, площини і півплощини [90, 93], плоских неосесиметричних задач такого класу для порожнистих радіально-неоднорідних циліндричних тіл і тонких дисків [88], осесиметричних задач для радіально-неоднорідних циліндричних тіл зі змінними вздовж твірної силовими та тепловими навантаженнями [92], осесиметричних [91] і тривимірних [68, 94] задач для неоднорідних простору, півпростору та шару у вигляді явної функціональної залежності від навантаження. Побудовані аналітичні розв'язки задач є ефективними при дослідженні напруженого стану неоднорідних тіл, забезпечують задовільну точність при відносно малих обсягах обчислень і є зручними у використанні при розв'язанні інших класів задач та аналізу експериментальних даних. Окремі результати, засновані на використанні цього підходу, зокрема розв'язок класичної задачі теорії пружності про визначення напружень і переміщень у кільці під дією рівномірного стиску, прикладеного до діаметрально-протилежних ділянок зовнішньої поверхні [67], увійшли до нещодавно опублікованих підручників [78, 80]. Отримано взаємно однозначні співвідношення між компонентами тензора напружень і вектора переміщень плоских задач теорії пружності й термопружності для неоднорідних тіл, які не втрачають свого змісту на границях областей [89, 93]. З використанням цих співвідношень задачі такого класу у випадку задання на границях переміщень або змішаних крайових умов зводяться до відповідних задач у напруженнях, розв'язки яких знайдено з використанням розробленого методу. Окремі результати сформували докторську дисертацію Ю. В. Токового [65], а головні аспекти застосування методу до розв'язання задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних тіл викладено в есе [96].

Наукова спадщина професора В. М. Вігака [26], крім двох монографій та понад 230 наукових праць, у яких висвітлюються започатковані ним підходи до розв'язання актуальних фундаментальних і прикладних проблем механіки та математики, продовжує жити у створеній науковій школі, яка отримала визнання як в Україні, так і за її межами. Під керівництвом професора В. М. Вігака підготовлено та захищено одну докторську [74] і сім кандидатських [3, 44, 47, 50, 55, 66, 72] дисертацій.

Не менш значущими, ніж наукові результати, були невичерпна особиста енергія, жвавість характеру та доброзичлива простота Василя Вігака у спілкуванні з колегами, співробітниками та учнями. Ці якості поєднувалися у ньому з високою вимогливістю як до себе, так і до тих, з ким працював, ретельним та педантичним ставленням до своїх і чужих наукових результатів. Таку свою рису Василь Михайлович жартома пояснював співзвучністю власного прізвища з німецьким «wie Haken» («як гак», «чіпкий»). Йому було притаманне принципове та інколи навіть радикальне ставлення до сумнівних наукових результатів або ж таких, які викладені недостатньо чітко чи необґрунтовано. Це завжди вирізняло його на засіданнях наукових семінарів, конференцій чи в особистому спілкуванні. Наукова праця, отримані наукові результати, доведення їх викладу до чіткого абсолюту були для нього питанням особистим, на які не можна було «дивитися крізь пальці» чи задовольнятися самозаспокоюючим принципом «і так буде зрозуміло, не слід багато з цим возитись». Професор В. М. Вігак умів запалити своїм прикладом, зацікавити, надихнути на наполегливу працю. Ці його якості так високо цінували ми, його учні, які повністю завдячують своїм професійним становленням видатному учителеві Василеві Михайловичеві Вігаку! Ці чисто людські якості дозволили створити наукову школу, яка продовжує діяльність на межі фундаментальних досліджень і одночасних практичних застосувань, де пошук проблем та постановка задач відбувається на основі практичних проблем господарства.

1. *Блох В. И.* Функции напряжений в теории упругости // Прикл. математика и механика. – 1950. – **14**, № 4. – С. 415–422.
2. *Бородачев Н. М.* Об одном подходе к решению пространственной задачи теории упругости в напряжениях // Прикл. механика. – 1995. – **31**, № 12. – С. 38–44.
   Те саме: *Borodachev N. M.* Three-dimensional elasticity-theory problem in terms of the stress // J. Appl. Mech. – 1995. – **31**, No. 12. – P. 991–996.
3. *Величко Л. Д.* Оптимальное по быстродействию управление нагревом тела при ограничении на управление и вязкоупругие напряжения: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Львов, 1986. – 20 с.
4. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наук. думка, 1986. – 542 с.
5. *Вигак В. М.* Метод прямого интегрирования уравнений осесимметричной задачи термоупругости в напряжениях для неограниченных областей // Прикл. механика. – 1999. – **35**, № 3. – С. 49–56.
   Те саме: *Vigak V. M.* Method for direct integration of the equations of an axisymmetric problem on thermoelasticity in stresses for unbounded regions // J. Appl. Mech. – 1999. – **35**, No. 3. – P. 262–268.
6. *Вигак В. М.* Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. – Киев: Наук. думка, 1979. – 360 с.
7. *Вигак В. М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.
8. *Вигак В. М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Новосибирск: СО АН СССР, 1990. – 35 с.
9. *Вигак В. М., Засадна Х. Е., Ильченко Г. А., Костенко А. В., Ярмолюк Ю. П.* Оптимизация зональной термообработки составных цилиндрических деталей подвижными концентрированными теплоисточниками // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1991. – Вып. 33. – С. 65–69.
   Те саме: *Vigak V. M., Zasadna Kh. E., Il'chenko G. A., Kostenko A. V., Yarmolyuk Yu. P.* Optimization of zonal thermal treatment of cylindrical component parts by moving concentrated heat sources // J. Sov. Math. – 1993. – **65**, No. 5. – P. 1874–1877.
10. *Вигак В. М., Колесов В. С., Величко Л. Д.* Оптимальное управление нагревом термовязкоупругого цилиндра // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1981. – Вып. 14. – С. 81–84.
11. *Вигак В. М., Колесов В. С., Ясинский А. В.* Оптимальное управление температурными перемещениями оптической поверхности лазерного зеркала // Физика и химия обработки материалов. – 1985. – № 3. – С. 25–30.
12. *Вигак В. М., Колесов В. С., Ясинский А. В.* Оптимизация термоупругих осесимметричных напряжений в заданном сечении тонкой круглой пластины с помощью источников тепла // Прикл. механика. – 1985. – **21**, № 8. – С. 63–70.
   Те саме: *Vigak V. M., Kolesov V. S., Yasinskii A. V.* Optimizing the thermoelastic axisymmetric stress in a specified cross section of a thin circular plate using heat sources // Sov. Appl. Mech. – 1985. – **21**, No. 8. – P. 779–784.
13. *Вигак В. М., Костенко А. В.* Оптимальное управление нагревом пластины при ограничениях на градиенты температурного поля // Прикл. механика. – 1979. – **15**, № 4. – С. 43–49.
   Те саме: *Vigak V. M., Kostenko A. V.* Optimal control of plate heating under constraints on the temperature field gradient // Sov. Appl. Mech. – 1979. – **15**, No. 4. – P. 306–311.
14. *Вигак В. М., Костенко А. В.* Оптимальный нагрев пластины и сферы при ограничениях на градиенты температурного поля // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1978. – Вып. 8. – С. 83–89.
15. *Вигак В. М., Костенко А. В.* Оптимальный нагрев пластины при ограничении на перепад температур // Прикл. механика. – 1979. – **15**, № 8. – С. 69–73.
   Те саме: *Vigak V. M., Kostenko A. V.* Optimal heating of a plate under a constraint on the temperature drop // Sov. Appl. Mech. – 1979. – **15**, No. 8. – P. 727–731.
16. *Вигак В. М., Костенко А. В., Засадна Х. Е.* Оптимальное по быстродействию управление нагревом термоупругой пластины с помощью мощности внутренних источников тепла // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1987. – Вып. 26. – С. 55–59.
17. *Вигак В. М., Костенко А. В., Свирида М. И.* Оптимизация двумерных нестационарных температурных режимов при ограничениях на параметры теплового процесса // Инж.-физ. журн. – 1989. – **56**, № 4. – С. 640–645.

Те саме: *Vigak V. M., Kostenko A. V., Svirida M. I.* Optimization of two-dimensional nonsteady-state temperature regimes with limitation imposed on the parameters of the thermal process // J. Eng. Phys. – 1989. – **56**, No. 4. – P. 463–467.

18. *Вигак В. М., Лисевич Я. Л.* Оптимизация управления нестационарным температурным режимом термоупругого ортотропного цилиндра // Механика композит. материалов. – 1986. – № 6. – С. 1081–1086.
    Те саме: *Vigak V. M., Lisevich Ya. L.* Optimizing control over the nonstationary temperature regime of a thermoelastic orthotropic cylinder // Mech. Compos. Mater. – 1986. – **22**, No. 6. – P. 756–760.
19. *Вигак В. М., Рычагивский А. В.* Метод прямого интегрирования уравнений трехмерных задач упругости и термоупругости для пространства и полупространства // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 11. – С. 74–81.
    Те саме: *Vigak V. M., Rychagivskii A. V.* The method of direct integration of the equations of three-dimensional elastic and thermoelastic problems for space and a halfspace // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, No. 11. – P. 1468–1475.
20. *Вигак В. М., Рычагивский А. В.* Решение трехмерной задачи теории упругости для слоя // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 9. – С. 78–86.
    Те саме: *Vigak V. M., Rychagivskii A. V.* Solution of a three-dimensional elastic problem for a layer // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No. 9. – P. 1094–1102.
21. *Вигак В. М., Токовый Ю. В.* Построение элементарных решений плоской задачи теории упругости для прямоугольной области // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 7. – С. 79–87.
    Те саме: *Vigak V. M., Tokovyi Yu. V.* Construction of elementary solutions to a plane elastic problem for a rectangular domain // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No. 7. – P. 829–836.
22. *Вигак В. М., Фальковский В. Л.* Параметрический метод решения некорректной обратной задачи теплопроводности (ОЗТ) применительно к оптимизации тепловых режимов // Инж.-физ. журн. – 1986. – **51**, № 4. – С. 668–672.
    Те саме: *Vigak V. M., Falkovskii V. L.* Parametric method for the solution of an ill-posed inverse heat-conduction problem in application to the optimization of thermal regimes // J. Eng. Phys. – 1986. – **51**, No. 4. – P. 1249–1254.
23. *Вигак В. М., Ярмолюк Ю. П.* Построение оптимального управления нагревом пластины с помощью решения обратной задачи теплопроводности // Вопросы прикл. термомеханики. – Киев: Наук. думка, 1979. – С. 167–172.
24. *Вигак В. М., Ясинский А. В.* Оптимизация осесимметричных температурных перемещений в заданном сечении неограниченного слоя // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1991. – Вып. 34. – С. 55–61.
    Те саме: *Vigak V. M., Yasinskii A. V.* Optimization of axisymmetric thermal displacements in a given section of an unbounded layer // J. Soviet Math. – 1993. – **66**, No. 6. – P. 2601–2606.
25. *Вигак В. М., Ясинский А. В., Юзвяк М. И.* Оптимальное управление нагревом термочувствительных тел канонической формы при ограничениях на напряжения в пластической зоне // Прикл. механика. – 1995. – **31**, № 12. – С. 44–51.
    Те саме: *Vigak V. M., Yasinskii A. V., Yuzvyak N. I.* Optimal control of the heating of thermosensitive canonical bodies with constraints on the stress in the plastic zone // Int. Appl. Mech. – 1995. – **31**, No. 12. – P. 997–1003.
26. *Вігак Василь Михайлович* / В. С. Попович, А. В. Ясінський, Ю. В. Токовий // Крайові задачі для диференц. рівнянь. – 2004. – Вип. 11. – С. 315–341.
27. *Вігак В. М.* Метод прямого інтегрування рівнянь пружності // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2001. – Вип. 4, Т. 1. – С. 24–35.
28. *Вігак В. М.* Рівняння суцільності для деформівного твердого тіла // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 2. – С. 117–123.
    Те саме: *Vihak V. M.* Continuity equations for a deformable solid // J. Math. Sci. – 2000. – **99**, No. 5. – P. 1655–1661.
29. *Вігак В. М.* Розв’язки задач пружності та термопружності в напруженнях // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – 1995. – Вип. 9. – С. 34–122.
30. *Вігак В. М., Калиняк Б. М.* Зведення одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних і термочутливих тіл до інтегральних рівнянь другого роду // Доп. НАН України. – 1998. – № 11. – С. 60–67.
31. *Вігак В. М., Свирида М. І.* Відокремлення змінних у рівняннях двовимірної задачі термопружності в напруженнях для кільцевого сектора // Доп. НАН України. – 1998. – № 2. – С. 68–74.

32. *Вігак В. М., Токовий Ю. В.* Аналіз елементарних розв'язків плоскої задачі пружності для прямокутної області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46,** № 2. – С. 107–113.
33. *Вігак В. М., Токовий Ю. В.* Визначення розв'язку плоскої задачі пружності в прямокутній області у випадку ортотропного матеріалу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44,** № 1. – С. 97–102.
34. *Вігак В. М., Токовий Ю. В.* Дослідження плоского напруженого стану в прямокутній області // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **37**, № 2. – С. 61–66.
    Те саме: *Vihak V. M., Tokovyi Yu. V.* Investigation of the plane stressed state in a rectangular domain // Mater. Sci. – 2002. – **38**, No. 2. – P. 230–237.
35. *Вігак В. М., Токовий Ю. В.* Точний розв'язок осесиметричної задачі пружності в напруженнях для суцільного циліндра певної довжини // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2003. – Вип. 1. – С. 55–60.
36. *Вігак В. М., Фальковський В. Л.* Оптимізація нагріву твердого тіла за допомогою нестійких розв'язків оберненої задачі теплопровідності // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 6. – С. 27–30.
37. *Вігак В. М., Цимбалюк Л. І., Шаблій О. М.* Розподіл залишкових напружень у шарі, зумовлених осесиметричними пластичними деформаціями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – **37**, № 1. – С. 22–26.
    Те саме: *Vigak V. M., Tsymbalyuk L. I., Shablii O. M.* Distribution of residual stresses induced by axially symmetric plastic strains in a layer // Mater. Sci. – 2001. – **37**, No. 1. – P. 19–24.
38. *Вігак В. М., Юзв'як М. Й.* Метод прямого інтегрування рівнянь плоских задач пружності та термопружності для необмежених областей // Крайові задачі для диференц. рівнянь. – 1999. – Вип. 4. – С. 9–33.
39. *Вігак В. М., Ясінський А. В.* Оптимізація осесиметричних термопружних напружень і переміщень круглої пластини // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1985. – № 12. – С. 24–26.
40. *Вігак В. М., Ясінський А. В.* Оптимальне за швидкодією керування нагрівом простих термочутливих тіл при обмеженні на термопластичні напруження // Доп. АН України. – 1993. – № 8. – С. 56–59.
41. *Вігак В., Єршов Ю.* Визначення переміщень для двовимірних задач механіки деформівного твердого тіла в полярних координатах // Машинознавство. – 2002. – № 1. – С. 36–40.
42. *Вігак В., Калиняк Б.* Дослідження напружень у термочутливих циліндричних тілах // Машинознавство. – 1999. – № 9. – С. 10–14.
43. *Вігак В., Цимбалюк Л., Шаблій О.* Обернена задача визначення залишкових напружень у склопластині з прямолінійним зварним швом // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2000. – Т. 2. – С. 270–274.
44. *Вітер М. Б.* Оптимальний за швидкодією нагрів твердих тіл внутрішніми джерелами тепла при обмеженнях на керування і параметри теплового процесу: Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02. – Львів, 1997. – 16 с.
45. *Власов Б. Ф.* О числе независимых уравнений неразрывности // Тр. Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы. Сер. Строительство. – 1968. – **34**, вып. 5. – С. 171–174.
46. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
47. *Засадна Х. О.* Оптимізація температурних режимів нагрівання та термонапруженого стану неоднорідних і термочутливих тіл: Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук: 01.02.04. – Львів, 2000. – 20 с.
48. *Калиняк Б. М.* Інтегральні рівняння зі змінною верхньою межею динамічної задачі теорії пружності в напруженнях у неоднорідному довгому порожнистому ортотропному циліндрі // Доп. НАН України. – 2010. – № 8. – С. 60–69.
49. *Калиняк Б. М.* Аналітичні вирази для напружень і термонапружень у довгому порожнистому неоднорідному термочутливому циліндрі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50,** № 2. – С. 79–86.
50. *Калиняк Б. М.* Визначення напруженого стану неоднорідних термочутливих пружних тіл зведенням одновимірних крайових задач до інтегральних рівнянь: Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук: 01.02.04. – Львів, 2001. – 20 с.
51. *Калиняк Б. М.* Характеристики матеріалів, які забезпечують нульові радіальні термонапруження у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2015. – Спецвипуск. – С. 97–100.

52. *Калиняк Б. М., Яцків І. І.* Визначення напружень і переміщень у неоднорідній порожнистій кулі зведенням відповідної задачі термопружності до інтегральних рівнянь // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 142–150.
53. *Калиняк Б., Попович В.* Напружений стан багатошарового термочутливого циліндра в умовах асимптотичного теплового режиму // Машинознавство. – 2005. – № 2. – С. 22–30.
54. *Кир'ян В. І., Осадчук В. А., Николишин М. М.* Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій. – Львів: Сполом, 2007. – 320 с.
55. *Костенко А. В.* Оптимальное по быстродействию управление нагревом упругих тел при ограничении на термонапряжения: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Львов, 1981. – 18 с.
56. *Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В.* Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: Сполом, 2011. – 256 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 5.
57. *Ліхачов В. А., Флейшман Н. П.* Рівняння сумісності Бельтрамі–Мітчелла // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1984. – № 9. – С. 44–46.
58. *Лурье А. И.* К теории толстых плит // Прикл. математика и механика. – 1942. – **6**, № 3-4. – С. 151–168.
59. *Мелешко В. В.* Метод суперпозиции в задачах о тепловых напряжениях в прямоугольных пластинах // Прикл. механика. – 2005. – **41,** № 9. – С. 101–117.
    Те саме: *Meleshko V. V.* Superposition method in thermal-stress problems for rectangular plates // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No. 9. – P. 1043–1058.
60. *Осадчук В., Токовий Ю.* Визначення залишкових напружень у зварному стиковому з'єднанні двох прямокутних пластин // Машинознавство. – 2005. – № 9. – С. 3–9.
61. *Остросаблин Н. И.* Условия совместности малых деформаций и функции напряжений // Прикл. механика и техн. физика. – 1997. – **38**, № 5. – С. 136–146.
    Те саме: *Ostrosablin N. I.* Compatibility conditions of small deformations and stress functions // J. Appl. Mech. Techn. Phys. – 1997. – **38**, No. 5. – P. 774–783.
62. *Пащенко С. Ю., Дорошенко Т. Г., Заноздра О. І.* Проблема взаємовідносин між студентом та науковим керівником // Вісн. Запор. нац. ун-ту. Пед. науки. – 2010. – № 2. – С. 214–222.
63. *Победря Б. Е.* О задаче в напряжениях // Докл. АН СССР. – 1978. – **240**, № 3. – С. 564–567.
64. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
    Те саме: *Timoshenko S. P., Goodier J. N.* Theory of elasticity. – New York etc.: McGraw-Hill Book Co., 1951. – xviii+506 p.
65. *Токовий Ю. В.* Пружна рівновага однорідних і неоднорідних тіл, обмежених плоскими та циліндричними поверхнями: Автореф. дис. ... док. фіз.-мат. наук: 01.02.04. – Львів, 2013. – 40 с.
66. *Токовий Ю. В.* Розв'язування в напруженнях плоских задач теорії пружності для прямокутних областей: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.02.04. – Львів, 2003. – 20 с.
67. *Токовий Ю. В., Ханг К.-М., Ма Ч.-Ч.* Визначення напружень і переміщень у тонкому кільцевому диску під дією діаметрального стиску // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 3. – С. 152–162.
    Те саме: *Tokovyy Yu. V., Hung K.-M., Ma C.-C.* Determination of stresses and displacements in a thin annular disk subjected to diametral compression // J. Math. Sci. – 2010. – **165**, No. 3. – P. 342–354.
68. *Токовий Ю.* Інтегральні рівняння тривимірної задачі термопружності для неоднорідного простору // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 73. – С. 63–70.
69. *Фальковский С. В., Захаров Е. С., Вигак В. М., Яскилко Н. Б., Булыгин Ю. Г., Пасечник И. И.* Натурное тензометрирование паропроводов блока 200 МВт // Теплоэнергетика. – 1962. – № 1. – С. 32–36.
70. *Цимбалюк Л. І.* Розподіл напружень у шарі, зумовлених плоскими і осесиметричними залишковими деформаціями: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.02.04. – Львів, 2001. – 20 с.
71. *Ясинский А. В.* Идентификация теплового и термонапряженного состояний двухслойного цилиндра по поверхностным перемещениям // Прикл. механика. – 2008. – **44,** № 1. – С. 40–47.

Те саме: *Yasinskii A. V.* Identification of the thermal and thermostressed states of a two-layer cylinder from surface displacements // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, No. 1. – P. 34–40.
72. *Ясинский А. В.* Оптимизация осесимметричного напряженого состояния упругих тел с помощью стационарных теплових источников: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Львов, 1989. – 17 с.
73. *Ясинский А. В., Шипка Р. И.* Определение осесимметричного температурного поля и термонапряженного состояния круглой пластины по прогибу // Прикл. механика. – 2001. – **37,** № 8. – С. 118–124.
Те саме: *Yasinskii A. V., Shipka R. I.* Determination of the axisymmetric thermal field and thermostressed state of a circular plate from its deflection // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, No. 8. – P. 1075–1082.
74. *Ясінський А. В.* Визначення та оптимізація термонапруженого стану тіл на основі обернених задач термомеханіки: Автореф. дис. … док. фіз.-мат. наук: 01.02.04. – Львів, 2008. – 40 с.
75. *Ясінський А. В.* Ідентифікація теплового і термонапруженого станів двошарового циліндра за поверхневими переміщеннями при фрикційному нагріванні // Доп. НАН України. – 2006. – № 5. – С. 69–74.
76. *Ясінський А. В., Юзв'як М. Й.* Оптимізація нестаціонарних одновимірних температурних режимів термочутливих тіл при обмеженні на пластичну деформацію // Доп. НАН України. – 1998. – № 4. – С. 93–97.
77. *Andrianov I. V., Awrejcewicz J.* A comment on the problem of elasticity // Facta Universitatis. Ser. Mech., Autom. Control Robotics. – 2002. – **3**, No. 12. – P. 475–478.
78. *Hemsley J. A.* Glass in engineering science – Vol. 2: Glass under load. – Chapeltown: Society of Glass Technology, 2016. – 757 p.
79. *Higgins M. C., Kram K. E.* Reconceptualizing mentoring at work: A developmental network perspective // Acad. Manag. Rev. – 2001. – **26**, No. 2. – P. 264–288.
80. *Jog C. S.* Continuum mechanics: Foundations and applications of mechanics. – Delhi: Cambridge Univ. Press, 2015. – 852 p.
81. *Kozák I., Szeidl Gy.* Complete solution for stresses in terms of stress functions. Part I. Derivation from the principle of virtual work // Technische Mechanik. – 1996. – **16**, No. 2. – P. 147–168.
82. *Kushnir R. M., Yasinskyy A. V.* Optimal heating control of thermosensitive bodies under plastic deformation of material // J. Eng. Math. – 2013. – **78**, No. 1. – P. 83–98.
83. *Kushnir R. M., Yasinskyy A. V.* Optimal heating control of thermosensitive rectangular domain under restrictions on stresses in a plastic zone // J. Therm. Stresses. – 2010. – **33**, No. 3. – P. 251–261.
84. *Lurie S. A., Vasiliev V. V.* The biharmonic problem in the theory of elasticity. – Amsterdam: Gordon & Breach, 1995. – 265 p.
85. *Meleshko V. V.* Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem // Trans. ASME. Appl. Mech. Rev. – 2003. – **56,** No. 1. – P. 33–85.
86. *Southwell R. V.* Castigliano's principle of minimum strain-energy, and the conditions of compatibility for strain // In: Stephen Timoshenko, 60th Anniversary Volume. – New York: The Macmillan Co., 1938. – P. 211–217.
87. *Tokovyy Y. V., Ma C.-C.* Analysis of residual stresses in a long hollow cylinder // Int. J. Pres. Ves. Pip. – 2011. – **88,** No. 5-7. – P. 248–255.
88. *Tokovyy Y. V., Ma C.-C.* Thermal stresses in anisotropic and radially inhomogeneous annular domains // J. Therm. Stresses. – 2008. – **31**, No. 9. – P. 892–913.
89. *Tokovyy Y., Lozynskyy Y., Ma C.-C.* Two-dimensional thermal stresses and displacements in an arbitrarily inhomogeneous elastic layer // Appl. Mech. Mater. (Adv. Develop. in Industry and Appl. Mech.) – 2014. – **627**. – P. 141–144.
90. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* An explicit-form solution to the plane elasticity and thermoelasticity problems for anisotropic and inhomogeneous solids // Int. J. Solids Struct. – 2009. – **46**, No. 21. – P. 3850–3859.
91. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* Analytical solutions to the axisymmetric elasticity and thermoelasticity problems for an arbitrarily inhomogeneous layer // Int. J. Eng. Sci. – 2015. – **92**. – P. 1–17.
92. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* Axisymmetric stresses in an elastic radially inhomogeneous cylinder under length-varying loadings // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2016. – **83,** No. 11. – P. 111007–111007-7.

93. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* Steady-state heat transfer and thermo-elastic analysis of inhomogeneous semi-infinite solids // In: Heat conduction – Basic research / V. S. Vikhrenko (ed.). – Rijeka: InTech (Croatia), 2011. – 350 p. – (Chap. 11. – P. 249–268.) – http://www.intechopen.com/books/show/title/heat-conduction-basic-research.
94. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* Three-dimensional temperature and thermal stress analysis of an inhomogeneous layer // J. Therm. Stresses. – 2013. – **36**, No. 8. – P. 790–808.
95. *Tokovyy Yu. V.* Direct integration method // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 951–960.
96. *Tokovyy Yu. V., Kalynyak B. M., Ma C.-C.* Nonhomogeneous solids: integral equations approach // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 7. – P. 3350–3356.
97. *Vihak V. M., Yuzvyak M. Y., Yasinskij A. V.* The solution of the plane thermo-elasticity problem for a rectangular domain // J. Therm. Stresses. – 1998. – **21**, No. 5. – P. 545–561.
98. *Washizu K.* A note on the conditions of compatibility // J. Math. & Phys. – 1957. – **36**, No. 1-4. – P. 306–312. – DOI: 10.1002/sapm1957361306.
99. *Yasinskyy A. V.* Determination and optimization of stress state of bodies on the basis of inverse thermoelasticity problems // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht, etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 916–924.
100. *Yasinskyy A., Tokovyy Yu., Ierokhova O.* Optimization of two-dimensional nonstationary thermal stresses and displacements in a half-space through the use of internal heat sources // J. Therm. Stresses. – 2016. – **39**, No. 9. – P. 1084–1097.

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОМЕХАНИКИ КАСАТЕЛЬНО ОПТИМИЗАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫЕХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Приведены основные этапы развития основанной профессором В. М. Вигаком тематики исследований, касающейся теории и методов оптимального управления тепловыми процессами и термоупругим состоянием деформируемых твердых тел, теории обратных задач теплопроводности и термомеханики, математических методов механики деформируемого твердого тела. Отмечена тесная связь полученных теоретических результатов с прикладными проблемами теплоэнергетики, которые привели к решению соответствующих задач. Отмечен вклад ученых Института прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины в развитие указанной проблематики. Проанализированы перспективы дальнейшего развития таких исследований, а также некоторые этапы жизненного и творческого пути профессора В. М. Вигака.

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS OF THERMOMECHANICS CONCERNING THE OPTIMAL CONTROL AND IDENTIFICATION OF THERMOELASTIC STATE OF DEFORMABLE SOLIDS

The basic stages of the development of research themes initiated by Professor Vasyl M. Vihak concerning the theory and methods of optimal control on thermal processes and thermo-stressed state of deformable solids, the theory of inverse problems of heat transfer and thermomechanics, the mathematical methods in mechanics of deformable solids are discussed. The intimate linkage among the obtained theoretical results and the applied problems of heat- and power-engineering, those have initiated the relevant theoretical research, is pointed out. The contribution of scientists of the Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine to these problems is described. The perspectives of further development of such investigations as well as some stages of the life and creative way of Professor Vasyl M. Vihak are analyzed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
04.07.16