УДК 539.377

Р. М. Кушнір, В. С. Попович, Б. В. Процюк

ПРО РОЗВИТОК ДОСЛІДЖЕНЬ ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ

Наведено короткий аналіз досліджень, виконаних в останні роки у Львівській науковій школі з механіки зв'язаних полів, стосовно термомеханічної поведінки термочутливих тіл.

Дослідження термомеханічної поведінки тіл із урахуванням залежності від температури (термочутливості) фізико-механічних характеристик (ФМХ) почали активно розвиватися у 50-х роках минулого століття. Вони були спричинені швидким розвитком атомної енергетики, ракетної техніки, лазерних технологій та інших нових галузей промисловості. Результати цих досліджень подано у роботах J. Nowinski [97, 98], H. S. Carslaw, J. C. Jaeger [5], H. Hilton [86], T. Hata, A. Atsumi [85], T. Koizumi, T. Taniwaki [87], R. Trostel [101], Ю. С. Постольника з учнями [1, 40], В. А. Ломакіна [21], N. Noda [96] та ін.

У Львівській науковій школі з механіки зв'язаних полів такі дослідження були започатковані Я. С. Підстригачем і Ю. М. Коляном усередині 60-х років минулого століття. Отримані ними результати у цьому напрямку, представлені окремими фрагментами у монографіях [6, 22, 23], стали підґрунтям для розвитку їхніми учнями математичних моделей та розробки аналітичних чи аналітично-числових методів розрахунку термопружного стану тіл канонічної форми з термочутливих матеріалів, що знаходяться в умовах складного теплообміну з середовищами високих чи низьких температур, за великих їх перепадів та одночасно зазнають дії силових навантажень.

Нижче аналізуємо набутий упродовж останнього двадцятип'ятиріччя доробок за цим напрямком. Значна увага приділена визначенню та дослідженню термопружної поведінки шаруватих термочутливих тіл з використанням побудованих функцій Ґріна.

1. Постановка задач термопружності термочутливих тіл і їх особливості. Визначення термопружного стану ізотропного термочутливого тіла, яке займає обмеженою поверхнею S область D, за нехтування перетворенням механічної енергії у теплову (незв'язані задачі термопружності) складається з двох етапів: ***1°***) знаходження температурного поля тіла та ***2°***) визначення компонент його напружено-деформованого стану. Неусталене температурне поле t, наприклад, у декартовій системі координат визначаємо з рівняння теплопровідності

$$\operatorname{div}\left(\lambda_t(t)\,\operatorname{grad} t\right) = c_v(t)\dot{t} - W, \qquad M \in D, \tag{1}$$

за початково-крайових умов

$$t\big|_S = t_s \qquad \text{або} \qquad \left(\lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial n}\right)\bigg|_S = q_s$$

чи

$$\left(\lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial n} + \alpha(t)(t - t_c) + \varepsilon(t)\sigma(t^4 - t_c^4)\right)\bigg|_S = 0\,, \tag{2}$$

$$t\big|_{\tau=0} = t_p\,. \tag{3}$$

Тут і надалі $\lambda(t)$, $c_v(t)$, $\alpha(t)$, $\varepsilon(t)$ – відповідно залежні від температури коефіцієнт теплопровідності, об'ємна теплоємність, коефіцієнт теплообміну з поверхні S і ступінь чорноти поверхні; W – густина джерел тепла; n – зовнішня нормаль до поверхні S; t_s, q_s – задані температура і тепловий потік на S; t_p – початкова температура тіла; t_c – температура зовнішнього середовища, що омиває поверхню S; σ – стала Стефана – Больцмана; M – точка тіла; крапкою зверху позначено диференціювання за часом τ.

У випадку багатошарового термочутливого тіла на межах поділу S_i його складових за умов ідеального теплового контакту повинні забезпечуватися рівності температур і теплових потоків

$$t_i = t_{i+1}, \qquad \lambda_t^{(i)} \frac{\partial t_i}{\partial n} = \lambda_t^{(i+1)} \frac{\partial t_{i+1}}{\partial n}, \qquad M \in S_i. \tag{4}$$

Для визначення напружено-деформованого стану тіла маємо:

– співвідношення між деформаціями e_{ij} і переміщеннями u_i (геометричні співвідношення)

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \tag{5}$$

– співвідношення Дюгамеля – Неймана між компонентами σ_{ij} і e_{ij} тензорів напружень і деформацій (фізичні співвідношення)

$$\sigma_{ij} = 2\mu(t)e_{ij} + \left[\lambda(t)e_{kk} - \beta(t)\Phi(t)\right]\delta_{ij} \tag{6}$$

або

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu(t)}\left[\sigma_{ij} - \frac{\lambda(t)}{\beta(t)}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right] + \Phi(t)\delta_{ij}; \tag{7}$$

– рівняння руху у напруженнях

$$\sigma_{ij,j} = \rho(t)\ddot{u}_i - F_i \tag{8}$$

чи в переміщеннях

$$\mu(t)u_{i,kk} + \left(\lambda(t) + \mu(t)\right)u_{k,ki} + \mu_{,k}(u_{i,k} + u_{k,i}) +$$
$$+ \lambda_{,i}u_{kk} - \left(\beta(t)\Phi(t)\right)_{,i} = \rho(t)\ddot{u}_i - F_i; \tag{9}$$

– умови сумісності деформацій

$$\varepsilon_{ij\ell}\varepsilon_{kmn}e_{\ell m,jn} = 0. \tag{10}$$

Тут $\beta(t) = 3\lambda(t) + 2\mu(t)$; $\mu(t) = G(t) = \dfrac{E(t)}{2(1 + \nu(t))}$, $\lambda(t) = \dfrac{\nu(t)E(t)}{(1 + \nu(t))(1 - 2\nu(t))}$ – виражені через модуль пружності $E(t)$ і коефіцієнт Пуассона $\nu(t)$ параметри Ляме; $G(t)$ – модуль зсуву; $\alpha_t(t)$ – температурний коефіцієнт лінійного розширення (ТКЛР); $\rho(t)$ – густина матеріалу тіла; $\Phi(t) = \int_0^t \alpha_t(t)\,dt$ – суто теплова деформація; F_i – компоненти вектора масових сил $\mathbf{F}$; $\delta_{ij} = \{1, i = j; 0, i \neq j\}$ – символ Кронекера, e_{kk} – відносна зміна об'єму тіла; σ_{kk} – сумарне напруження; величина $\varepsilon_{ij\ell}$ дорівнює +1 (-1), якщо i, j, ℓ утворюють парну (непарну) перестановку чисел 1, 2, 3; комою з одночасним індексним означенням змінної позначено диференціювання за координатою, а підсумовування здійснюється за індексами, що повторюються.

Задача термопружності може бути сформульована як у переміщеннях так і в напруженнях. При цьому повинні бути задані відповідні граничні, а у випадку динамічних задач – ще й початкові умови.

Як бачимо, характерною особливістю визначення термонапруженого стану елементів конструкцій на основі моделей, що враховують залежність теплових і механічних характеристик матеріалу від температури, є те, що відповідні задачі теплопровідності є нелінійними, а задачі термопружності − крайовими задачами математичної фізики для систем диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

2. Термопружність тонких термочутливих пластин і стрижнів. З огляду на те, що тонкі пластини є розповсюдженими елементами інженерних конструкцій, у роботі [9] побудовано математичну модель для визначення температурного поля тонкої термочутливої пластини, яка займає обмежену площинами $z = \pm\delta$ і циліндричною поверхнею S область D і нагрівається розподіленими в ній джерелами тепла густини W. Окрім цього, на її поверхнях $z = \pm\delta$, S задано відповідно потоки тепла $q^{\pm}$, q_s:

$$\lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial z}\bigg|_{z=\pm\delta} = \pm q^{\pm}, \qquad \lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial n}\bigg|_S = q_s. \tag{11}$$

Вважаємо, що товщина пластини є малою порівняно з іншими розмірами, а її матеріал такий [5], що залежності $\lambda_t(t) = \lambda_{t0}\lambda_t^*(t)$ і $c_v(t) = c_{v0}c_v^*(t)$ мають однаковий характер $(\lambda_t^*(t) \approx c_v^*(t))$, а отже, коефіцієнт температуропровідності майже не залежить від температури і є практично сталою величиною: $a \approx \lambda_{t0}/c_{v0}$ (матеріал з простою нелінійністю). Тут λ_{t0}, c_{v0} − сталі (опорні) значення, що мають відповідні розмірності.

У результаті введення змінної Кірхгофа $\theta = \int\limits_0^t \lambda_t^*(t)\,dt$ з нелінійної задачі (1), (11) з початковою умовою (3) отримуємо лінійну задачу на θ, яка є аналогом тривимірної нестаціонарної задачі теплопровідності. Операторним методом, який запропонували Я. С. Підстригач і Ю. М. Коляно, задача зведена до системи двовимірних рівнянь для визначення інтегральних характеристик змінної Кірхгофа $\Theta = \dfrac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\theta\,dz$ і $\Theta^* = \dfrac{1}{2\delta^2}\int\limits_{-\delta}^{\delta} z\theta\,dz$.

У випадку задання на поверхнях $z = \pm\delta$, S пластини умов конвективного теплообміну

$$\left[\lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial z} \pm \alpha^{\pm}(t - t_c^{\pm})\right]\bigg|_{z=\pm\delta} = 0,$$

$$\left[\lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial n} + \alpha_s(t - t_s)\right]\bigg|_S = 0 \tag{12}$$

при незалежних від температури коефіцієнтах теплообміну $\alpha^{\pm}$, α_s методом усереднення отримано рівняння для визначення інтегральних характеристик змінної Кірхгофа Θ і Θ^*.

За незалежних від температури характеристик отримані рівняння збігаються з рівняннями для визначення температури нетермочутливої пластини [22].

З використанням гіпотези Кірхгофа − Лява про незмінні нормалі та методу усереднення тривимірну задачу термопружності для ізотропної тонкої пластини [9], модуль пружності, коефіцієнт Пуассона та ТКЛР якої залежить від температури, за умови відсутності навантажень на її бокових поверхнях $z = \pm\delta$ зведено до двовимірної щодо визначення компонент u_0, v_0, w вектора переміщення серединної поверхні $z = 0$. Фактично за допомогою такого підходу здійснено заміну рівнянь термопружності термочутливого тіла, що займає просторову область, один з розмірів якої малий порівняно з іншими, еквівалентною у певному сенсі системою рівнянь на серединній поверхні. При характеристиках, що не залежать від температури, але є функціями координат, отримані рівняння і співвідношення збігаються з рівняннями і співвідношеннями неоднорідних пластин, які отримані В. С. Поповичем спільно з Ю. М. Коляном [23].

Сформульовано плоску задачу термопружності термочутливих тіл [9]. У випадку залежності від температури одного лише ТКЛР побудову її розв'язку зведено до знаходження загального розв'язку бігармонічного рівняння та часткового розв'язку рівняння Пуассона.

Отримано також рівняння теплопровідності для тонкого прямолінійного термочутливого стрижня [9], який нагрівається внутрішніми джерелами тепла густини W, а через бічну поверхню конвективно обмінюється теплом із зовнішнім середовищем температури t_s.

3. Методи визначення та дослідження температурних полів і напружень у термочутливих тілах. У роботах [2, 4, 9, 10, 18, 24–39, 84, 88, 93–95, 99, 100] викладено аналітичні, аналітично-числові та числові методи визначення температурних полів у тілах простої геометричної форми, через поверхні яких здійснюється складний теплообмін із зовнішнім середовищем, на основі моделей, що враховують залежність теплових характеристик матеріалу від температури. Зокрема, метод поетапної лінеаризації, який стосується розв'язування двовимірних стаціонарних і одновимірних нестаціонарних задач теплопровідності, що є моделями температурних полів у термочутливих елементах конструкцій з матеріалу з простою нелінійністю, на поверхнях яких відбувається конвективний, променевий чи конвективно-променевий теплообмін, а коефіцієнт теплообміну і ступені чорноти цих поверхонь теж залежать від температури [9, 24, 26–32, 99].

Розроблено метод лінеаризувальних параметрів для знаходження температурних полів в елементах конструкцій, виготовлених з матеріалу з простою нелінійністю, через поверхні яких відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем [2, 9, 24, 25, 27, 31, 33, 94, 99].

Запропоновано методику побудови числових розв'язків нестаціонарних задач теплопровідності термочутливого тіла, на поверхні якого відбувається складний теплообмін з оточуючим середовищем [2, 29, 31, 99], а також варіант методу послідовних наближень розв'язування задач теплопровідності термочутливих елементів конструкцій простої геометричної форми, що знаходяться в умовах складного теплообміну з оточуючим середовищем [9, 26, 28, 88]. При цьому від температури можуть залежати коефіцієнт теплообміну та ступінь чорноти поверхні тіла.

Запропоновано та апробовано два варіанти побудови розв'язків крайових задач для визначення напружено-деформованого стану термочутливих тіл: варіант методу збурень [8, 9], а також спосіб їх зведення до інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду на певні базові компоненти напружено-деформованого стану, через які визначаються всі інші його компоненти [9, 33].

Розроблені методи визначення компонент термопружного стану однорідних конструктивних елементів адаптовано для визначення температурних полів і напружень у достатньо поширених в інженерній практиці кусково-однорідних термочутливих елементах конструкцій простої геометричної форми.

Для розв'язування задач теплопровідності контактуючих термочутливих тіл простої геометричної форми за умови, що між контактуючими складовими виконується ідеальний тепловий контакт, а на обмежуючих поверхнях відбувається конвективний теплообмін [9, 10, 26, 33], адаптовано метод лінеаризувальних параметрів.

У випадку задання на зовнішніх поверхнях кусково-однорідного термочутливого тіла умов складного теплообміну запропоновано комбінований метод побудови аналітично-числових розв'язків нестаціонарних контактних задач теплопровідності, який поєднує метод поетапної лінеаризації з використанням сплайн-апроксимації нелінійних виразів і метод лінеаризувальних параметрів [9, 25, 26].

Для розв'язування відповідної контактної задачі термопружності адаптовано метод збурень. В результаті отримано послідовність крайових задач для знаходження будь-якого наближення шуканого розв'язку за відомим попереднім наближенням [9, 38].

На основі побудованих математичних моделей і розроблених методів визначено температурні поля і напруження у шарі, смузі, суцільній та порожнистій кулі, в просторі зі сферичною порожниною і в циліндрі, спричинені дією температурних і силових чинників та досліджено вплив термочутливості матеріалу на їхній тепловий і напружено-деформований стан [9, 24, 25, 27, 28].

У роботах [11, 16, 17, 102] здійснено розробку моделей і методів визначення напружено-деформованого стану однорідних, кусково-однорідних, неоднорідних і термочутливих елементів конструкцій канонічної форми за неповної інформації про теплове навантаження. Зокрема, побудовано математичні моделі для визначення квазістатичних термонапружень в неоднорідних і термочутливих тілах за заданою температурою та додатково відомими переміщеннями (деформаціями) однієї з межових поверхонь і відсутності інформації про теплове навантаження – на іншій.

На основі запропонованого методу оберненої задачі термомеханіки розроблено методику побудови оптимальних за швидкодією теплових режимів, що реалізуються по межі допустимих обмежень, та алгоритми числового розв'язування відповідних задач термопластичності [88, 89, 102]. Нелінійні задачі теплопровідності розв'язано методом скінченних елементів, а лінеаризацію і розв'язання задач термопластичності здійснено за допомогою методу додаткових деформацій.

У роботах [3, 83] запропоновано чисельний підхід до дослідження у взаємозв'язку електромагнітного, температурного і механічного полів у термочутливих пружно-пластичних електропровідних феромагнітних тілах за високотемпературної індукційної обробки та вивчено за його допомогою закономірності термомеханічної поведінки таких тіл у широкому діапазоні температур.

4. Застосування узагальнених функцій і побудованих функцій Ґріна до розв'язання задач теплопровідності та термопружності для шаруватих термочутливих тіл. При заданні на зовнішній поверхнях шаруватих плит, циліндрів та куль відповідно теплового потоку і температури знайдено з використанням узагальнених функцій точні розв'язки [15, 19, 20, 46, 62, 79, 80] одновимірних стаціонарних задач теплопровідності за лінійних, квадратичних та кубічних залежностей коефіцієнтів теплопровідності складових. За складніших температурних залежностей коефіцієнтів теплопровідності відповідні задачі зведено [79, 80] до рекурентних систем інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду. Проведено для відповідних тіл порівняльний аналіз температур, обчислених на основі точних і наближених (виходячи з інтегральних рівнянь) розв'язків задач теплопровідності, для одних і тих же залежностей, у тому числі і комбінованих. За аналогічних граничних умов досліджено розподіл температур по товщині тришарових тіл, у яких температурні залежності коефіцієнтів теплопровідності матеріалів (конкретних) складових у діапазоні температур 0÷1000°C апроксимовано відповідно експоненціальними функціями (перша складова) та різними поліномами четвертого степеня (друга і третя складові). Систему інтегральних рівнянь розв'язали методом послідовних наближень, обмежившись шістьма наближеннями. На основі отриманих точних розв'язків знайдено температурні поля у зазначених тілах при нелінійних граничних умовах за попередньо визначеним тепловим потоком і температурою на обмежуючих поверхнях із систем алгебричних рівнянь, які отримано в результаті підстановки відповідних точних розв'язків у задані граничні умови.

Для отримання інтегральних подань розв'язків одновимірних нестаціонарних задач теплопровідності для шаруватих термочутливих плит, циліндрів і куль за лінійних та нелінійних граничних умов використано побудовані у [43, 46, 61, 77] функції Ґріна відповідних лінійних задач теплопровідності.

Ці функції отримано з використанням інтегрального перетворення Лапласа та функції Ґріна [43] узагальненої задачі спряження для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яка побудована на основі фундаментальних систем кусково-неперервних розв'язків [48]. Функції Ґріна подано у вигляді рядів за власними функціями. За цими ж функціями підсумовано ряди типу

$$2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m(r)\Phi_m(\rho)}{N_m\mu_m^{2q+2}}=g_{q+1}(r,\rho)\,, \tag{13}$$

що виникають при розв'язуванні з використанням зазначених функцій Ґріна лінійних і нелінійних задач теплопровідності (в окремих випадках використання суми цих рядів має вирішальне значення при числовій реалізації). Тут μ_m, $\Phi_m(r)$ – власні числа і відповідні їм власні функції; N_m – коефіцієнт, обчислений з умови ортогональності власних функцій; q – невід'ємне ціле число; функція $g_{q+1}(r,\rho)$ виражається через інтеграли від елементарних функцій.

Для трискладового простору функції Ґріна [72] подано у вигляді функціональних рядів. У цьому випадку відпадає потреба у відшуканні власних значень. Як частковий випадок отримано функції Ґріна для півпростору, контактуючого з шаром, та для простору, що складається з двох півпросторів.

У [14, 61] проілюстровано застосування функцій Ґріна до визначення нестаціонарних температурних полів у багатошарових тілах, що взаємодіють із зовнішнім середовищем змінної в часі температури шляхом конвективного, променевого чи конвективно-променевого теплообміну без та з урахуванням температурної залежності параметрів теплообміну за усереднених коефіцієнтів теплопровідності та температуропровідності. Задачі зводяться до обчислення інтегралів від відомих функцій або до розв'язання систем нелінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра другого роду відносно температури на обмежуючих поверхнях тіл. Отримано [61] розв'язок задачі теплопровідності для багатошарового порожнистого циліндра за дії джерела тепла, розміщеного на одній з контактних поверхонь, і наявності конвективного теплообміну. Припускається, що інтенсивність джерела та температура зовнішнього середовища змінюються в часі за поліноміальним або періодичним законами. Досліджено [14] нестаціонарне температурне поле у п'ятишаровій плиті за конвективно-променевого теплообміну на обох зовнішніх поверхнях і заданих закону зміни температури зовнішнього середовища та залежності коефіцієнта теплообміну.

Метод розв'язання нестаціонарних задач теплопровідності для багатошарових тіл за урахування температурних залежностей коефіцієнтів теплопровідності і температуропровідності проілюстровано [44] на прикладі багатошарової плити, поверхня $z=0$ якої нагрівається тепловим потоком інтенсивності $q(\tau)$, а поверхня $z=z_n$ підтримується при температурі $t_c(\tau)$. При $\lambda_t(t,z)=\lambda_{t0}(z)(1+\bar{\beta}(z)t)$, $c_v(t,z)=c_{v0}(z)C(t)$ отримано таке інтегральне подання для змінної Кірхгофа:

$$\theta(z,\tau)=\int_0^{z_n}c_{v0}(\zeta)G(z,\zeta,\tau)\theta_0(\zeta)\,d\zeta-\lambda_{t0}^{(n)}\int_0^{\tau}\theta_c(\tau')\left.\frac{\partial G(z,\zeta,\tau-\tau')}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=z_n}d\tau'+$$

$$+\int_0^{\tau}q(\tau')G(z,0,\tau-\tau')\,d\tau'+$$

$$+\frac{1}{\lambda_{t0}^{(1)}}\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_{t0}^{(j+1)}\int_0^{\tau}\left.\frac{\partial G(z,\zeta,\tau-\tau')}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=z_j+0} F_{j+1}(\theta_{j+1}(z,\tau))\,d\tau' +$$

$$+\frac{1}{c_{v0}^{(1)}}\int_0^{\tau}\int_0^{z_n} c_{v0}(\zeta)G(z,\zeta,\tau-\tau')\left[1-\frac{C(t)}{1+\bar{\beta}(\zeta)t}\right]\frac{\partial\theta}{\partial\tau'}\,d\zeta\,d\tau' . \qquad (14)$$

Тут

$$F_{j+1}(\theta_{j+1}) = \left(1-\frac{\bar{\beta}_j}{\bar{\beta}_{j+1}}\right)\left(\theta_{j+1}-\frac{\sqrt{1+2\bar{\beta}_{j+1}\theta_{j+1}}-1}{\bar{\beta}_{j+1}}\right),$$

$$c_{v0}(z) = c_{v0}^{(i)}, \qquad \lambda_{t0}(z) = \lambda_{t0}^{(i)}, \qquad \bar{\beta}(z) = \bar{\beta}_i ,$$

$$\theta_0(z) = t_{0i}(z) + \frac{\bar{\beta}_i t_{0i}^2(z)}{2} \qquad \text{при} \qquad z_{i-1} < z < z_i ,$$

$$\theta_c(\tau) = t_c(\tau) + \frac{\bar{\beta}_n t_c^2(\tau)}{2} ,$$

$t_{0i}(z)$ – початкова температура i-ї складової; $G(z,\zeta,\tau)$ – функція Ґріна відповідної лінійної задачі теплопровідності для багатошарової плити.

Числові дослідження проведено для тришарової плити ($n = 3$) зі сталими коефіцієнтами температуропровідності за імпульсної дії теплового потоку при $t_0(z) = t_c(\tau) = 0$. Для розв’язання системи інтегральних рівнянь, яку отримали зі співвідношення (14) (за відсутності першого, другого і п’ятого доданків) при $z \to z_i + 0$, функції $F_{j+1}(\theta_{j+1}(z_j,\tau))$ апроксимовано лінійними сплайнами. Значення функцій $\theta_{j+1}(z_j,\tau)$ у вузлах сплайна знайдено із відповідної системи нелінійних алгебричних рівнянь. При цьому істотно використано, зокрема через те, щоб обминути відоме з математичного аналізу «явище Ґіббса», суми рядів типу (13).

За такого ж типу крайових умов у [67, 68] проведено числові розрахунки для одношарових кулі і плити з урахуванням температурних залежностей як коефіцієнтів тепло-, так і температуропровідності. Тут розв’язання задач зведено з використанням лінійних сплайнів до рекурентної системи нелінійних алгебричних рівнянь відносно похідних від часу на поверхнях, що знаходяться всередині тіл. Досліджували, зокрема, залежно від кроку сітки сплайна безрозмірну температуру на поверхні нагріву. Порівнювали її з відповідними температурами, обчисленими на основі розв’язків задачі з простою нелінійністю і лінійних задач. Лінійні задачі розглядали відповідно з характеристиками, взятими при нульовій температурі і за середньоінтегральних значень.

Нестаціонарну задачу теплопровідності для багатошарового термочутливого циліндра, який нагрівається тепловим потоком, розглянуто у [12]. Числові дослідження виконано для трискладового циліндра з простою нелінійністю.

За конвективно-променевого теплообміну з використанням цього підходу отримано [90, 92] інтегральні подання розв’язків нестаціонарних задач теплопровідності для багатошарових термочутливих плит, циліндрів і куль.

Побудовані функції Ґріна у вигляді функціональних рядів [72] для трискладового простору застосовано [54–56, 74, 75] до розв’язання одновимірних нестаціонарних задач теплопровідності для не- і термочутливих кусково-однорідних простору, півпростору та плити з урахуванням конвективно-променевого теплообміну. Як частковий випадок розглянуто задачу теплопровідності [54] для трискладової плити, на одній із поверхонь якої задано імпульсний тепловий потік, а інша зовнішня поверхня підтримується при нульовій температурі. За сталих теплофізичних характеристик і за простої нелінійності температури на поверхні нагріву в одні і ті ж моменти часу збіглися до двох-трьох знаків після коми з відповідними температурами, розрахованими на основі інтегрального подання (14). Встановлено, зокрема, що під час остигання [56] у трискладовому просторі з тонким проміжним шаром за сталих теплофізичних характеристик розподіл температури по товщині шару після певного моменту часу має лінійний характер. Для цієї задачі отримано інженерні формули для визначення температури і напружень. За періодичної теплової дії характер розподілу температури по товщині проміжного шару є суттєво нелінійним [55].

Одержано [43, 45] точні формули (аналоги формул Майзеля) для визначення з урахуванням температурної залежності ТКЛР статичних і квазістатичних переміщень у багатошарових порожнистих трансверсально-ізотропної кулі і ортотропному циліндрі у вигляді суми переміщень, зумовлених центрально-симетричним і плоским осесиметричним температурними полями, масовими силами, поверхневими рівномірно розподіленими навантаженнями, а у випадку циліндра – осьовою деформацією. Записано відповідні формули для напружень. При цьому використано побудовані функції Ґріна $G(r,\rho)$ і $\Gamma(r,\rho)$ відповідно одновимірних задач пружності для багатошарових циліндра з ортотропними та кулі з трансверсально-ізотропними складовими, причому заміною параметрів задачі для циліндра відповідними параметрами задачі для кулі отримали співвідношення $\Gamma(r,\rho)=\dfrac{G(r,\rho)}{\sqrt{r\rho}}$. Встановлено необхідні та достатні умови існування і єдиності функцій Ґріна відповідно для циліндра і кулі. У випадку циліндра такими умовами є виконання нерівності

$$\frac{E_\varphi^{(i)}}{E_r^{(i)}} > \frac{\nu_{\varphi r}^{(i)} + \nu_{\varphi z}^{(i)}\nu_{zr}^{(i)}}{1-\nu_{rz}^{(i)}\nu_{zr}^{(i)}},$$

де E і ν (з відповідними індексами) – модулі пружності і коефіцієнти Пуассона ортотропної i-ї складової з циліндричною анізотропією.

У [13, 76, 78, 91] розглядається контактна взаємодія шаруватих тіл з урахуванням теплоутворення від дії сил тертя, які підпорядковані закону Амонтона.

Визначення стаціонарного температурного поля і напружено-деформованого стану тіл під час обертання одного з багатошарових циліндрів відносно іншого за припущення, що складові частини ізотропні, ідеально контактують, кутова швидкість є сталою, а коефіцієнти теплопровідності і ТКЛР є функціями температури, зведено [78] до розв’язання одного нелінійного алгебричного рівняння щодо контактного тиску на поверхні тертя. Числовий аналіз проведено для чотирьох варіантів пар тертя за теплоізольованої внутрішньої поверхні.

Для аналогічної контактної пари розглянуто [76] квазістатичну задачу термопружності за припущення, що від температури залежить лише коефіцієнт тертя. Вважалося, що через обмежуючі циліндричні поверхні відбувається конвективний теплообмін, а навантаження, прикладені до цих поверхонь, залежать від часу. За допомогою відповідних функцій Ґріна задачу зведено до системи двох нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно контактних температури та тиску. Їх розв’язок знайдено у вигляді лінійного сплайна. При цьому істотно використано суму рядів за власними функціями (13). Числові дослідження для ізотропного тришарового вузла, зокрема, показали, що контактні температура і тиск, обчислені з урахуванням температурної залежності коефіцієнта тертя, на відміну від обчислень при сталому коефіцієнті тертя, обмежені у всій області визначення коефіцієнта тертя.

У [91] розглядається, пара тертя виготовлена із матеріалів, ФМХ яких є функціями координати. Трибосистема моделюється двома плоско-паралельними шарами. Верхній шар, до якого прикладено змінне в часі стискальне навантаження, рухається поступально по поверхні нижнього жорстко закріпленого шару зі змінною швидкістю. Припускається, що коефіцієнт тертя залежить від температури. Через зовнішні поверхні шарів відбувається конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем, температура якого є функцією часу. У початковий момент часу температура кожного шару є різною і змінюється за товщиною. Температурне поле, переміщення і швидкість руху визначаються на основі рівнянь теплопровідності та термопружності для неоднорідного тіла і рівняння руху абсолютно твердого тіла. При цьому коефіцієнти теплопровідності та об'ємної теплоємності апроксимуються кусково-сталими функціями. Отриману внаслідок цього крайову задачу для шаруватого тіла зведено за допомогою функції Ґріна (відповідної лінійної задачі теплопровідності) до нелінійного інтегрального рівняння типу Вольтерра другого роду щодо контактної температури, яке розв'язано з використанням лінійних сплайнів та суми рядів за відповідними власними функціями. Наведено низку числових досліджень.

Визначення термопружного стану шаруватих ізотропних циліндрів і куль з урахуванням температурної залежності ФМХ шляхом апроксимації модулів пружності та коефіцієнтів Пуассона складових (а у випадку квазістатичних задач – для кожного моменту часу) кусково-сталими функціями радіальної координати проілюстровано у [12, 15, 20]. При цьому приходимо до задач термопружності для багатошаровий тіл, складених з $N = \sum_{k=1}^{n} n_k$ шарів зі сталими, за винятком ТКЛР, характеристиками (n_k – кількість частин, на які поділений k-й шар n-шарового тіла). Числові дослідження виконано за заданих температурних залежностей ФМХ для дво-і тришарових циліндрів і куль показали, що стрибки кільцевих напружень у масштабах графіків при $N > 10$ практично непомітні.

Застосування такого підходу до задач термопружності, в яких треба враховувати залежність ФМХ складових як від координати (функціонально-градієнтні матеріали), так і від температури, може призвести, як засвідчили числові дослідження, до значного збільшення N, що є певною незручністю, особливо у квазістатичних задачах.

Інший підхід до визначення термопружного стану у кусково-неоднорідних термочутливих тілах з циліндричними і сферичними поверхнями поділу (суцільні і порожнисті циліндри та кулі, суцільні і з порожнинами відповідні простори), зумовленого одновимірними температурними полями та рівномірно розподіленими поверхневими навантаженнями (при наявності зовнішніх границь), передбачає [41, 59, 66, 69] зведення за допомогою функцій Ґріна задач пружності для однорідних циліндрів і куль до розв'язання відповідних систем інтегро-алгебричних рівнянь (СІАР) відносно радіальних переміщень і напружень за однакових і різних сталих коефіцієнтів Пуассона складових. Для відшукання розв'язків цих систем використано метод послідовних наближень. При цьому за нульові наближення вибирали праві частини відповідних рівнянь. Виявилось, що чим істотнішою є відмінність, зокрема, між коефіцієнтами Пуассона, тим більше наближень необхідно для досягнення заданої точності.

Для визначення термопружного стану кусково-неоднорідних термочутливих порожнистих циліндрів і куль для широкого діапазону зміни їх ФМХ та товщин отримано [65] СІАР відносно радіальних переміщень за допомогою функції Ґріна задач пружності для шаруватих циліндра і куль зі сталими ФМХ складових. Для n-шарового циліндра ця система рівнянь з урахуванням поверхневих навантажень σ_0, σ_n має вигляд

$$
\begin{aligned}
& c_p(\rho)u_p(\rho) - \frac{\varphi_{2p}(\rho)}{2r_{p-1}Q}\left[\sum_{j=1}^{p-1} r_j M_{1j}^{+} V_{aj}(r_j) - \sum_{j=1}^{p} r_{j-1} M_{1j}^{-} V_{bj}(r_{j-1})\right] - V_{ap}(\rho) + \\
& \quad + V_{bp}(\rho) + \frac{r_p \varphi_{1p}(\rho)}{2Q}\left[\sum_{j=p+1}^{n} \frac{c_{0p} M_{2j}^{+}}{r_{j-1} c_{0j}} V_{bj}(r_{j-1}) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=p}^{n} \frac{c_{0p} M_{2j}^{-}}{r_j c_{0j}} V_{aj}(r_j)\right] - \\
& \quad - \sum_{i=1}^{n-1} g_{up}^{(i)}(\rho) u_i(r_i) - \frac{1}{2Q}\left[\frac{\gamma_n r_p c_{0p}}{r_n c_{0n}} u_n(r_n) \varphi_{2p}(\rho) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{2\gamma_1 r_0}{r_{p-1}} u_1(r_0) \varphi_{1p}(\rho)\right] = u_{tp}(\rho) + \frac{1}{2Q}\left[\frac{2r_0^2}{r_{p-1}} \sigma_0 \varphi_{2p}(\rho) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{c_{0p}}{c_{0n}} r_p \sigma_n \varphi_{1p}(\rho)\right] - \varepsilon_z u_{\varepsilon p}(\rho), \qquad p = 1, \ldots, n, \qquad (15)
\end{aligned}
$$

де невідомі функції $u_p(\rho)$ входять в інтегральні оператори

$$
V_{ap}(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_{r_{p-1}}^{\rho} r \frac{d}{dr}\left(\frac{\mu_p(t_p, r)}{1 - 2\nu_p(t_p, r)}\right) u_p(r)\, dr,
$$

$$
V_{bp}(\rho) = \rho \int_{\rho}^{r_p} \frac{1}{r} \frac{d\mu_p(t_p, r)}{dr} u_p(r)\, dr,
$$

а також в оператори $V_{aj}(r_j)$, $V_{bj}(r_{j-1})$. Крім цього, в (15) невідомою є осьова деформація $\varepsilon_z = \mathrm{const}$.

Розв'язок системи (15) шукали у вигляді

$$
u_p(\rho) = u_p^t(\rho) + u_p^y(\rho) - \varepsilon_z u_p^{\varepsilon}(\rho),
$$

де (з урахуванням змінності ФМХ) перший доданок описує переміщення, зумовленні температурним полем, другий − поверхневими навантаженнями у циліндрі з закріпленими торцями. Осьову деформацію ε_z визначали з умови самоврівноваження зусиль, прикладених на торцях.

Числові дослідження проведено в тришарових циліндрах для різних комбінацій сталих коефіцієнтів Пуассона, але змінних інших ФМХ складових. При цьому показано, що для визначення з заданою точністю переміщень на основі системи рівнянь (15) необхідно менше наближень, ніж на основі рівнянь [41], отриманих з використанням функції Ґріна для однорідного циліндра. Зокрема, для однієї із таких комбінацій необхідно було відповідно 4 і 32 наближень. Тут за нульові наближення брали також відповідні праві частини.

У [42, 50] розв'язок рівнянь типу (15) знайдено методом послідовних наближень, обмеженим лише першим наближенням. Тут за нульові наближення вибрано переміщення, які є точними розв'язками відповідних задач термопружності при тих самих сталих модулях пружності і коефіцієнтах Пуассона, що й у співвідношеннях для функції Ґріна. Причому за такого вибору початкового наближення в інтегральних операторах відсутні похідні.

Для розв'язання просторових задач термопружності для шаруватих тіл з плоско-паралельними межами поділу, зокрема, з урахуванням температурної залежності ТКЛР, побудовано [49, 51, 52, 60, 70, 71] функції Ґріна осесиметричних і тривимірних задач статики для шаруватих простору, півпростору і шару зі сталими ФМХ. При цьому виходили з відповідних задач для рівнянь пружності у переміщеннях. У подальшому їх зводили шляхом виключення змінних, за якими ФМХ є неперервні, до задач для систем відповідно двох і трьох звичайних диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами. Ці задачі розв'язано з використанням побудованих відповідних функцій Ґріна.

Функції Ґріна $\tilde{G}_r^{(k)}(\xi, z, \zeta)$ і $\tilde{G}_z^{(k)}(\xi, z, \zeta)$ (де ξ – параметр інтегрального перетворення Ганкеля) трансформованих осесиметричних задач побудовано на основі обмеженого при $z \to -\infty$ розв'язку задачі для системи диференціальних рівнянь

$$D_r(\tilde{G}_r^{(k)}, \tilde{G}_z^{(k)}) = -\delta_{rk}\delta(z-\zeta), \qquad D_z(\tilde{G}_r^{(k)}, \tilde{G}_z^{(k)}) = -\delta_{zk}\delta(z-\zeta),$$

$$k = r, z, \tag{16}$$

з граничними умовами на обмежуючій поверхні

$$\tilde{\tau}_{zz}^{(k)} = \tilde{\tau}_{rz}^{(k)} = 0 \qquad \text{при} \qquad z = z_n, \tag{17}$$

де $D_r(\cdot)$, $D_z(\cdot)$ – диференціальні вирази, які отримано після застосування інтегрального перетворення Ганкеля; $\tilde{\tau}_{zz}^{(k)}$, $\tilde{\tau}_{rz}^{(k)}$ – трансформанти нормальних і дотичних напружень; верхній індекс вказує, в напрямі якої осі циліндричної системи координат діє зосереджений фактор; δ_{jk} – символ Кронеккера.

Задачу (16), (17) зведено до відшукання обмеженого при $z \to -\infty$ кусково-неперервного розв'язку рівняння четвертого порядку відносно $\tilde{G}_r^{(k)}(\xi, z, \zeta)$ за однорідних граничних умов на поверхні $z = z_n$. Причому права частина його містить, крім дельта-функції, ще й першу і другу похідні від неї. Цей розв'язок знайдено з використанням побудованої функції Ґріна відповідної задачі. Тут було використано фундаментальну систему кусково-неперервних розв'язків відповідного однорідного диференціального рівняння (отриманого як частковий випадок з [48]) і метод варіації сталої.

Зауважимо, що при розв'язуванні задачі (16), (17) одночасно отримали для системи диференціальних рівнянь (16) розв'язки ще для п'яти варіантів граничних умов, які можна сформулювати на поверхні $z = z_n$ з $\tilde{G}_r^{(k)}$, $\tilde{G}_z^{(k)}$, $\tilde{\tau}_{zz}^{(k)}$, $\tilde{\tau}_{rz}^{(k)}$.

Встановлено, що функції $\tilde{G}_r^{(k)}(\xi, z, \zeta)$ і $\tilde{G}_z^{(k)}(\xi, z, \zeta)$ є симетричними як для (17), так і ще для таких граничних умов:

$$\tilde{G}_r^{(k)} = \tilde{G}_z^{(k)} = 0, \quad \tilde{G}_z^{(k)} = 0, \quad \tilde{\tau}_{rz}^{(k)} = 0, \quad \tilde{G}_r^{(k)} = 0, \quad \tilde{\tau}_{zz}^{(k)} = 0. \tag{18}$$

З функцій Ґріна для шаруватого півпростору отримано функції Ґріна для простору (спрямувавши $z_n \to \infty$) та шістнадцять функцій Ґріна ${}_s^m\tilde{G}_i^{(k)}(\xi, z, \zeta)$ для багатоскладового шару з такими самими варіантами граничних умов, що й для півпростору, але з кількістю складових, на одиницю меншою. Причому співвідношення для кожного варіанту відрізняються лише початковими значення рекурсій. Тут s відповідає одному з чотирьох варіантів граничних умов (17), (18), а m відповідає номеру цих же варіантів граничних умов, але заданих на протилежній поверхні.

Приклади застосування цих функцій Ґріна та відповідні числові дослідження наведено у [47, 82].

Для побудови у півбезмежній області функцій Ґріна $\bar{G}_i^{(k)}$, $i, k = 1, 2, 3$, трансформованих тривимірних задач використано систему рівнянь

$$D_i(\bar{G}_1^{(k)}, \bar{G}_2^{(k)}, \bar{G}_3^{(k)}) = -\delta_{ik}\delta(x_3 - \xi_3), \qquad i = 1, 2,$$

$$D_3(\bar{G}_1^{(k)}, \bar{G}_2^{(k)}, \bar{G}_3^{(k)}) = -\delta_{3k}\delta(x_3 - \xi_3) \tag{19}$$

і такі варіанти граничних умов на поверхні $x_3 = x_{3n}$:

$$\bar{\tau}_{33}^{(k)} = \bar{\tau}_{32}^{(k)} = \bar{\tau}_{31}^{(k)} = 0, \qquad \bar{G}_1^{(k)} = \bar{G}_2^{(k)} = \bar{G}_3^{(k)} = 0,$$

$$\bar{G}_3^{(k)} = 0, \quad \bar{\tau}_{31}^{(k)} = \bar{\tau}_{32}^{(k)} = 0, \quad \bar{G}_1^{(k)} = \bar{G}_2^{(k)} = 0, \quad \bar{\tau}_{33}^{(k)} = 0, \tag{20}$$

де $D_i(\cdot)$, $i = 1,2,3$, − диференціальні вирази, які отримано після виключення змінних x_1, x_2; верхній індекс вказує, в напрямі якої осі декартової системи координат діє зосереджений фактор; $\bar{\tau}_{31}^{(k)}$, $\bar{\tau}_{32}^{(k)}$, $\bar{\tau}_{33}^{(k)}$ − трансформанти напружень.

Задачі (19), (20) зведено до розв'язання двох незалежних крайових задач для одного і системи двох звичайних диференціальних рівнянь. Перша з них − аналог задачі про визначення зумовлених зосередженими факторами заданої інтенсивності трансформант стаціонарної температури або переміщення при крученні, коли шукана функція або її похідна на обмежуючій поверхні дорівнюють нулеві, а друга − аналог задачі про визначення зумовлених зосередженими факторами заданої інтенсивності трансформант радіальних і осьових переміщень у шаруватому півпросторі за граничних умов, аналогічних до (17), (18). Розв'язок першої задачі знайдено за допомогою функції Ґріна [43] узагальненої задачі спряження для звичайного диференціального рівняння другого порядку, а другої − за допомогою згаданих вище функцій Ґріна трансформованих осесиметричних задач.

Отримано, як і в осесиметричному випадку, функції Ґріна для простору та шістнадцять функцій Ґріна ${}_s^m\bar{G}_i^{(k)}$ для багатоскладового шару з такими ж варіантами граничних умов, але з кількістю складових частин, на одиницю меншою, ніж у півпросторі.

Необхідно зауважити, що, коли точки спостереження і прикладання зосередженої сили знаходяться усередині однієї і тієї ж складової, то функції Ґріна вихідних задач (осесиметричних і тривимірних) отримуються з виділеними особливостями (з тими, що й у фундаментальних розв'язках задач пружності для однорідного простору) без проведення спеціальних перетворень. Регулярні доданки подано у вигляді невласних інтегралів від експоненціально спадних функцій.

Для півпростору, що контактує з шаром, на зовнішній поверхні якого відсутні напруження, за припущення, що модуль зсуву півпростору більший ніж модуля шару регулярні доданки функцій Ґріна осесиметричних і тривимірних задач статики [70, 71] подано через функціональні ряди, члени яких виражаються через обчислені невласні інтеграли. Застосування функцій Ґріна трансформованих тривимірних задач для такої області проілюстровано на прикладі [63] рівномірно нагрітого тіла, що складається з шару і півпростору з включенням у вигляді паралелепіпеда, в якого ТКЛР відмінний від відповідного коефіцієнта півпростору (термічне включення). Проаналізовано розподіл нормальних напружень на внутрішній поверхні шару за різних значень геометричних параметрів.

На основі побудованих функцій Ґріна осесиметричних і тривимірних задач статики отримано [46] подання розв'язків відповідних задач термопружності для шаруватих тіл з плоско-паралельними границями поділу. Зокрема, у багатошаровій ізотропній плиті, яка займає область V: $\{0 \le x_3 \le x_{3n}, -\infty \le x_1, x_2 \le \infty\}$, переміщення, зумовлені температурним полем t, масовими силами X_i і поверхневими навантаженнями, які загасають при x_1, $x_2 \to \pm\infty$, визначаються з урахуванням температурної залежності ТКЛР на основі співвідношення

$$\delta_{1k}u_1(M_0)+\delta_{2k}u_2(M_0)+\delta_{3k}u_3(M_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[G_1^{(k)}(M,M_0)\sigma_{13}(M)+$$

$$+G_2^{(k)}(M,M_0)\sigma_{23}(M)+G_3^{(k)}(M,M_0)\sigma_{33}(M)-$$

$$-\tau_{13}^{(k)}(M,M_0)u_1(M)-\tau_{23}^{(k)}(M,M_0)u_2(M)-$$

$$-\tau_{33}^{(k)}(M,M_0)u_3(M)\Big]\Big|_{x_3=0}^{x_3=x_{3n}}\,dx_1\,dx_2+$$

$$+\int_V\left[G_i^{(k)}(M,M_0)X_i(M)+\gamma^*(x_3)G_{i,i}^{(k)}(M,M_0)\Theta^*\right]dV\,, \qquad (21)$$

де

$$\gamma^*(x_3)=3\lambda(x_3)+2\mu(x_3), \qquad \Theta^*=\int_0^t\alpha_t(x_3,\zeta)\,d\zeta\,,$$

$\lambda(x_3)$, $\mu(x_3)$ – коефіцієнти Ляме, $\alpha_t(x_3,t)$ – ТКЛР.

Конкретизуючи граничні умови, з (21) отримуємо узагальнення формул Майзеля на випадок шаруватого тіла з плоско-паралельними границями поділу.

Необхідні при цьому розподіли просторових температурних полів знаходимо на основі інтегральних подань розв’язків стаціонарних і нестаціонарних задач теплопровідності, отриманих за допомогою побудованих відповідних функцій Ґріна [53, 64, 73].

Функції Ґріна просторових стаціонарних задач теплопровідності для шаруватої плити з трансверсально-ізотропними складовими, віднесеної до циліндричної та декартової систем координат, з виділеними особливостями наведено у [53, 73]. Регулярні частини подано у вигляді невласних інтегралів від експоненціально спадних функцій. Шляхом граничних переходів отримано функції Ґріна для шаруватих півпростору і простору.

Для кусково-однорідного простору, який складається з двох з’єднаних шаром постійної товщини h півпросторів, регулярні частини подані у вигляді функціональних рядів. При отриманні цього подання не накладається обмежень на товщину шару h, що дає змогу ефективно використовувати ці функції Ґріна і у разі тонких проміжкових шарів.

Як часткові випадки, отримано функції Ґріна тривимірних і осесиметричних задач для простору, що складається з двох півпросторів та функції Ґріна для контактуючого з шаром півпростору. З використанням останньої визначено [46, 81] стаціонарне температурне поле у півпросторі з покриттям товщиною h, на зовнішній поверхні якого всередині квадратної області зі стороною $2a$ підтримується стала температура, а за межами цієї області – нульова. Числові дослідження температурного поля показали, що коли відношення a/h більше 2, то розподіл температури по товщині покриття (під центром квадрата) практично лінійний, а коли стає меншим 2, то він починає відрізнятися від лінійного. З подальшим зменшенням відношення ця різниця стає істотною.

З використанням цієї ж функції Ґріна та узагальнених функцій отримано [58] інтегральне подання розв’язку стаціонарної задачі теплопровідності для двоскладового півпростору з порожниною паралелепіпедіальної форми за нагріву його зовнішньої поверхні тепловим потоком і конвективного охолодження через поверхні порожнини. Відшукання температур на поверхнях порожнини зведено до розв’язання систем лінійних алгебричних рівнянь, отриманих з використанням формул прямокутників. Числові результати наведено для порожнини, що має форму куба, за нагрівання концентрованим потоком тепла.

Наближені функції Ґріна просторових нестаціонарних задач теплопровідності для півпростору, контактуючого з шаром, і двох контактуючих півпросторів для малих часів наведено у [7, 57]. Тут істотно використано встановлене розвинення величини, оберненої до знаменника трансформант Лапласа функції Ґріна, у вигляді ряду нескінченно спадної геометричної прогресії. Як приклад визначено і досліджено (стосовно оптичних дискових пристроїв запису, відтворення і збереження інформації) температурне поле, зумовлене дією джерела тепла, розподіленого на поверхні поділу активного шару і прозорої для оптичного випромінювання основи:

$$w_t(r, \varphi, \tau, z) = \\ = q_0 e^{-k[r^2 + c^2 - 2rc\cos(\varphi - \omega\tau)]} \sum_{i=0}^{m-1} \left[S(\tau - b_i) - S(\tau - b_i - \tau_1) \right] \delta(z) \,, \quad (22)$$

де $b_i = i(\tau_1 + \tau_2)$, τ_1 – тривалість імпульсу, τ_2 – тривалість паузи, c – радіус кола, по якому рухається з постійною кутовою швидкістю ϖ центр плями нагріву.

За тією ж схемою, що й для одновимірних, у [64] побудовано функції Ґріна просторових нестаціонарних задач теплопровідності для ортотропних багатошарових обмежених і необмежених (у напрямках, паралельних до поверхонь поділу) пластин. Характерним для цих функцій Ґріна є те, що, на відміну від одновимірних задач, власні функції для шаруватих плит подаються через тригонометричні, а ще й через гіперболічні функції, Апробацію цих функцій Ґріна проведено [46] на тривимірній нестаціонарній задачі теплопровідності для п'ятишарової скінченних розмірів пластини, коли одна з лицьових поверхонь нагрівається тепловим потоком, інтенсивність якого є сталою у квадратній області, а за її межами спадає до нуля. Проведено числовий аналіз залежності від часу розподілу температури на лицьовій і контактних поверхнях.

1. *Гаранчук В. А., Постольник Ю. С., Губа В. М.* Температура и температурные напряжения в телах простой геометрии с зависящими от температуры свойствами // Изв. вузов. Авиац. техника. – 1974. – № 2. – С. 32–36.
2. *Гарматій Г. Ю., Попович В. С.* Термопружний стан безмежного термочутливого тіла з циліндричною порожниною за умови конвективного теплообміну // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 3. – С. 192–200.
   Те саме: *Harmatii H. Yu., Popovych V. S.* Thermoelastic state of an infinite thermo-sensitive body with cylindrical cavity under condition of convective heat exchange // J. Math. Sci. – 2010. – **171**, No. 5. – P. 662–672.
3. *Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д.* Термомеханіка намагнечуваних електропровідних термочутливих тіл. – Львів: Сполом, 2010. – 256 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 4.
4. *Гачкевич О. Р., Кушнір Р. М.* Вибрані проблеми механіки зв'язаних полів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 1. – С. 7–24.
5. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – Москва: Наука, 1964. – 488 с.
   Те саме: *Carslaw H. S., Jaeger J. C.* Conduction of heat in solids. – Oxford: Clarendon Press, 1959. – 510 p.
6. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
7. *Коляно Ю. М., Ирлин А. В., Процюк Б. В., Драпкин Б. А., Цуканов В. Г.* Изучение температурного поля при записи и воспроизведении информации сфокусированным излучением // Инж.-физ. журн. – 1989. – **57**, № 6. – С. 983–990.
   Те саме: *Kolyano Yu. M., Irlin A. V., Protsyuk B. V., Drapkin B. A., Tsukanov V. G.* Studying the temperature field in the recording and reproduction of information by means of focused radiation // J. Eng. Phys. – 1989. – **57**, No. 6. – P. 1492–1498.
8. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Напружений стан термочутливої пластини в центрально-симетричному температурному полі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – **42**, № 2. – С. 5–12.

Те саме: *Kushnir R. M., Popovych V. S.* Stressed state of a thermosensitive plate in a central-symmetric temperature field // Mater. Sci. – 2006. – **42**, No. 2. – P. 145–154.

9. *Кушнір Р. М., Попович. В. С.* Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Сполом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.
10. *Кушнір Р. М., Попович В. С., Гарматій Г. Ю.* Аналітично-чисельне розв'язування контактних задач термопружності для термочутливих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – **37,** № 6. – С. 39–44.

    Те саме: *Kushnir R. M., Popovych V. S., Harmatii H. Yu.* Analytic-numerical solution of contact problems of thermoelasticity for thermosensitive bodies // Mater. Sci. – 2001. – **37**, No. 6. – P. 893–901.
11. *Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В.* Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: Сполом, 2011. – 256 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 5.
12. *Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М.* Квазістатичні температурні напруження в багатошаровому термочутливому циліндрі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40,** № 4. – С. 7–16.

    Те саме: *Kushnir R. M., Protsyuk B. V., Synyuta V. M.* Quasistatic temperature stresses in a multilayer thermally sensitive cylinder // Mater. Sci. – 2004. – **40**, No. 4. – P. 433–445.
13. *Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М.* Моделювання та розрахунок термонапруженого стану кусково-однорідних вузлів тертя // Трибофатика: Праці 4-го Міжнар. симп. з трибофатики (23–27 вер. 2002, Тернопіль) / Відп. ред. В. Т. Трощенко. – Тернопіль: Терноп. держ. техн. ун-т ім. І. Пулюя, 2002. – Т. 2. – С. 551–556.
14. *Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М.* Температурні напруження та переміщення в багатошаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 6. – С. 31–38.

    Те саме: *Kushnir R. M., Protsyuk B. V., Synyuta V. M.* Temperature stresses and displacements in a multilayer plate with nonlinear conditions of heat exchange // Mater. Sci. – 2002. – **38**, No. 6. – P. 798–808.
15. *Кушнір Р. М., Процюк Ю. Б.* Термопружний стан шаруватих термочутливих тіл обертання за квадратичної залежності коефіцієнтів теплопровідності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 1. – С. 7–18.

    Те саме: *Kushnir R. M., Protsyuk Yu. B.* Thermoelastic state of layered thermosensitive bodies of revolution for the quadratic dependence of the heat-conduction coefficients // Mater Sci. – 2011. – **46**, No. 1. – P. 1–15.
16. *Кушнір Р. М., Ясінський А. В.* Ідентифікація температурних поля і напружень термочутливого циліндра за поверхневими деформаціями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 6. – С. 55–61.

    Те саме *Kushnir R. M., Yasins'kyi A. V.* Identification of the temperature field and stresses in a thermosensitive cylinder according to the surface strains // Mater. Sci. – 2007. – **43**, No. 6. – P. 814–822.
17. *Кушнір Р. М., Ясінський А. В.* Обернена задача термопружності для неоднорідного циліндра за неповної інформації про теплове навантаження // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50,** № 3. – С. 140–145.
18. *Кушнір Р., Попович В.* Про розвиток досліджень з термомеханіки термочутливих тіл (до 80-річчя з дня народження професора Коляна Ю. М.) // Сучасні проблеми термомеханіки: зб. наук. праць / За заг. ред. Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2016. – С. 26–38. – Режим доступу: www.iapmm.lviv.ua/MPT2016.
19. *Кушнір Р., Процюк Ю.* Температурні поля в шаруватих тілах канонічної форми за лінійної температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності // Машинознавство. – 2009. – № 1. – С. 13–18.
20. *Кушнір Р., Процюк Ю.* Термопружний стан шаруватих термочутливих циліндрів і куль за конвективно-променевого теплоообіну // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2008. – Вип. 8. – С. 103–112.
21. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 368 с.
22. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.

23. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. –·368 с.
24. *Попович В. С.* О решении задач теплопроводности термочувствительных тел, нагреваемых путем конвективного теплообмена // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1988. – Вып. 28. – С. 83–86.
    Те саме: *Popovich V. S.* On the solution of heat conduction problems for thermosensitive bodies heated by convective heat exchange // J. Soviet Math. – 1993. – **63**, No. 1. – P. 94–97.
25. *Попович В. С.* О решении стационарных задач теплопроводности контактирующих термочувствительных тел // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1989. – Вып. 29. – С. 51–55.
    Те саме: *Popovich V. S.* On the solution of stationary problems for the thermal conductivity of heat-sensitive bodies in contact // J. Soviet Math. – 1993. – **65**, No. 4. – P. 1762–1766.
26. *Попович В. С., Вовк О. М.* Термопружний стан контактуючих термочутливих півпросторів з тепловиділеннями на межі дотику впродовж певного часу // Вісн. Київ. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. Спецвипуск. – 2015. – С. 213–218.
27. *Попович В. С., Вовк О. М., Гарматій Г. Ю.* Дослідження статичного термопружного стану термочутливого порожнистого циліндра за конвективно-променевого теплообміну з довкіллям // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54,** № 4. – С. 151–158.
    Те саме: *Popovych V. S., Vovk O. M., Harmatii H. Yu.* Investigation of the static thermoelastic state of a thermosensitive hollow cylinder under convective-radiant heat exchange with environment // J. Math. Sci. – 2012. – **187**, No. 6. – P. 726–736.
28. *Попович В. С., Гарматій Г. Ю.* Нестаціонарна задача теплопровідності для термочутливого простору зі сферичною порожниною // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1994. – Вып. 37. – С. 100–104.
    Те саме: *Popovich V. S., Garmatyi G. Yu.* The nonstationary heat-conduction problem for a heat-sensitive space with a spherical cavity // J. Math. Sci. – 1996. – **79**, No. 6. – P. 1478–1482.
29. *Попович В. С., Гарматій Г. Ю.* Розв'язування нестаціонарних задач теплопровідності для термочутливих тіл при конвективному теплообміні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40,** № 2. – С. 148–152.
    Те саме: *Popovich V. S., Garmatii G. Yu.* Solution of nonstationary heat-conduction problems for thermosensitive bodies under convective heat exchange // J. Math. Sci. – 1998. – **90**, No. 2. – P. 2037–2041.
30. *Попович В. С., Гарматій Г. Ю., Вовк О. М.* Термопружний стан термочутливої порожнистої кулі за умов конвективно-променевого теплообміну з довкіллям // Фіз.- хім. механіка матеріалів. – 2006. – **42**, № 6. – С. 39–48.
    Те саме: *Popovych V. S., Harmatii H. Yu., Vovk O. M.* Thermoelastic state of a thermosensitive hollow sphere under the conditions of convective-radiant heat exchange with the environment // Mater. Sci. – 2006. – **42**, No. 6. – P. 756–770.
31. *Попович В. С., Горечко Н. О.* Методика розрахунку неусталених температурних напружень у термочутливому півпросторі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53,** № 2. – С. 137–146.
    Те саме: *Popovych V. S., Horechko N. O.* Method for calculating nonstationary temperature stresses in a thermosensitive half-space // J. Math. Sci. – 2011. – **178**, No. 5. – P. 531–544.
32. *Попович В. С., Заводовська Н. О.* Термочутливий циліндр за конвективного теплообміну з середовищами змінної температури // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – **50**, № 1. – С. 25–31.
    Те саме: *Popovych V. S., Zavodovs'ka N. O.* Heat-sensitive cylinder under the conditions of convective heat exchange with media of variable temperature // Mater. Sci. – 2014. – **50**, No. 1. – P. 22–30.
33. *Попович В. С., Калиняк Б. М.* Математичне моделювання і методика визначення статичного термопружного стану багатошарових термочутливих циліндрів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57,** № 2. – С. 169–186.
    Те саме: *Popovych V. S., Kalynyak B. M. O.* Mathematical modeling and methods for the determination of the static thermoelastic state of multilayer thermally sensitive cylinders // J. Math. Sci. – 2016. – **215**, No. 2. – P. 218–242.
34. *Попович В. С., Махоркін І. М.* Про розв'язування задач теплопровідності термочутливих тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40,** № 1. – С. 36–44.

Те саме: *Popovich V. S., Makhorkin I. M.* On the solution of heat-conduction problems for thermosensitive bodies // J. Math. Sci. – 1998. – **88**, No. 3. – P. 352–359.

35. *Попович В. С., Ракоча І. І.* Моделювання та аналіз термопружного стану шаруватого по осі термочутливого циліндра за тепловідведення шляхом випаровування рідини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58,** № 3. – С. 7–14.
36. *Попович В. С., Ракоча І. І.* Напружено-деформований стан кусково-однорідного термочутливого циліндра за тепловідведення кипінням рідини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58,** № 2. – С. 89–97.

    Те саме: *Popovych V. S., Rakocha I. I.* Stress-strain state of a piecewise homogeneous thermally sensitive cylinder in the presence of heat removal by liquid boiling // J. Math. Sci. – 2017. – **223**, No. 2. – P. 102–116.
37. *Попович В. С., Сулим Г. Т.* Центрально-симетрична квазістатична задача термопружності термочутливого тіла // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 3. – С. 62–68.

    Те саме: *Popovych V. S., Sulym G. T.* Centrally symmetric quasistatic problem of thermoelastisity for a temperature sensitive body // Mater. Sci. – 2004. – **40**, No. 3. – P. 365–375.
38. *Попович В. С., Федай Б. Н.* Осесимметричная задача термоупругости многослойной термочувствительной трубы // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39,** № 1. – С. 97–103.

    Те саме: *Popovich V. S., Fedai B. N.* The axisymmetric problem of thermoelasticity of a multilayer thermosensitive tube // J. Math. Sci. – 1997. – **86**, No. 2. – P. 2605–2610.
39. *Попович В. С., Янішевський В. В.* Квазістатичні термонапруження в термочутливому шарі за конвективного теплообміну з середовищами змінної з часом температури // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 3. – С. 164–171.

    Те саме: *Popovych V. S., Yanishevsky V. V.* Quasistatic thermal stresses in a thermosensitive layer under convective heat exchange with media of time-varying temperature // J. Math. Sci. – 2012. – **186**, No. 1. – P. 82–92.
40. *Постольник Ю. С., Огурцов А. П.* Нелінійна прикладна термомеханіка. – Київ: НМЦ ВО МОНУ, 2000. – 280 с.
41. *Процюк Б. В.* Визначення термопружного стану кусково-неоднорідних термочутливих тіл з циліндричними поверхнями поділу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57,** № 4. – С. 139–153.

    Те саме: *Protsyuk B. V.* Determination of the thermoelastic states of piecewise inhomogeneous thermosensitive bodies with cylindrical interfaces // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, No. 2. – P. 173–192.
42. *Процюк Б. В.* Визначення термопружного стану кусково-неоднорідного термочутливого порожнистого циліндра // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2015. – Вип. 13. – С. 101–110.
43. *Процюк Б. В.* Застосування методу функцій Ґріна до визначення термопружного стану шаруватих трансверсально-ізотропних сферичних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 3. – С. 95–109.
44. *Процюк Б. В.* Квазистатические температурные напряжения в многослойной пластине при нагреве тепловым потоком // Теорет. и прикл. механика. – 2003.– Вып. 38. – С. 63–69.
45. *Процюк Б. В.* Метод функцій Гріна в осесиметричних задачах пружності та термопружності кусково-однорідних ортотропних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43,** № 1. – С. 94–101.
46. *Процюк Б. В.* Моделювання та визначення з використанням побудованих функцій Ґріна термопружного стану шаруватих тіл: Автореф. дис. … д-ра фіз.-мат. наук: 01.02.04 / Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. – Львів, 2006. – 40 с.
47. *Процюк Б. В.* Осесиметричний статичний термопружний стан шаруватого вздовж осі гладко закріпленого скінченного циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54,** № 4. – С. 159–172.

    Те саме: *Protsyuk B. V.* Axisymmetric static thermoelastic state of a smoothly fixed finite cylinder layered along the axis // J. Math. Sci. – 2012. – **187**, No. 6. – P. 737–757.

48. *Процюк Б. В.* Побудова фундаментальної системи розв'язків звичайного лінійного диференціального рівняння з розривними і сингулярними коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42,** № 4. – С. 116–122.
49. *Процюк Б. В.* Статичні та квазістатичні осесиметричні задачі термопружності для шаруватих тіл з плоскопаралельними границями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44,** № 4. – С. 103–112.
50. *Процюк Б. В.* Термопружний стан кусково-неоднорідної термочутливої порожнистої ізотропної кулі // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2016. – Вип. 14. – С. 45–52.
51. *Процюк Б. В.* Тривимірні статичні та квазістатичні задачі термопружності для шаруватих тіл із плоскопаралельними границями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46,** № 2. – С. 96–106.
52. *Процюк Б. В.* Функції Ґріна задач статики для шаруватих тіл із плоскопаралельними межами поділу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 1. – С. 76–87.
53. *Процюк Б. В.* Функції Гріна стаціонарних задач теплопровідності для трансверсально-ізотропних багатошарових тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43,** № 3. – С. 80–88.
54. *Процюк Б. В., Горун О. П.* Квазістатичний термопружний стан термочутливого трискладового шару за конвективно-променевого теплообміну // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58,** № 2. – С. 98–108.
    Те саме: *Protsyuk B. V., Horun O. P.* Quasistatic thermoelastic state of a heat-sensitive three-component layer under the conditions of convective-radiative heat exchange // J. Math. Sci. – 2017. – **223**, No. 2. – P. 117–131.
55. *Процюк Б. В., Горун О. П.* Термопружний стан безмежного трискладового тіла за періодичної дії теплового потоку // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2013. – № 2. – С. 64–70.
56. *Процюк Б. В., Горун О. П.* Термопружний стан кусково-однорідного тіла під час остигання за різних початкових температур складових // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2013. – Вип. 11. – С. 90–100.
57. *Процюк Б. В., Драпкин Б. А.* Фундаментальний розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності кусково-однорідного простору // Доп. НАН України. – 1994. – № 2. – С. 29–34.
58. *Процюк Б. В., Процюк О. Б.* Підхід до чисельного розв'язування стаціонарних задач теплопровідності для шаруватих тіл з порожнинами паралелепіпедіальної форми // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2010. – Вип. 8. – С. 133–143.
59. *Процюк Б. В., Синюта В. М.* Визначення термопружного стану кусково-неоднорідної термочутливої кулі // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2014. – Вип. 12. – С. 78–84.
60. *Процюк Б. В., Синюта В. М.* Про побудову функцій переміщень Ґріна багатошарових тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41,** № 3. – С. 37–43.
    Те саме: *Protsyuk B. V., Synyuta V. M.* On the construction of Green displacement functions for multilayer bodies // J. Math. Sci. – 2001. – **104**, No. 5. – P. 1447–1456.
61. *Процюк Б. В., Синюта В. М.* Температурне поле багатошарового циліндра при асимптотичному тепловому режимі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40,** № 4. – С. 162–169.
    Те саме: *Protsyuk B. V., Synyuta V. M.* The temperature field state of a multilayer cylinder in asymptotic thermal mode // J. Math. Sci. – 1999. – **96**, No. 2. – P. 3077–3083.
62. *Процюк Б. В., Синюта В. М.* Точний розв'язок однієї нелінійної задачі теплопровідності для багатошарової пластини // Сучасні проблеми математики: Матеріали Міжнар. конф. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – Ч. 2. – С. 247–249.
63. *Процюк Б. В., Синюта В. М.* Тривимірна задача термопружності для рівномірно нагрітого кусково-однорідного півпростору // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44,** № 1. – С. 89–96.
64. *Процюк Б. В., Синюта В. М.* Функції Гріна тривимірних нестаціонарних задач теплопровідності для багатошарових пластин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42,** № 3. – С. 144–148.

65. *Процюк Б.* Інтегро-алгебричні рівняння одновимірних задач термопружності для кусково-неоднорідних циліндричних тіл // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Під заг. ред. І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. – С. 146–148.
66. *Процюк Б.* Квазістатичні задачі термопружності для кусково-неоднорідних термочутливих циліндричних тіл за однакових сталих коефіцієнтів Пуассона // Нестаціонарні процеси деформування елементів конструкцій, зумовлені дією полів різної фізичної природи / Під заг. ред. В. Д. Кубенка, Р. М. Кушніра, Д. В. Тарлаковського. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2012. – С. 174–178.
67. *Процюк Б.* Квазістатичні температурні напруження в термочутливій кулі за нагрівання тепловим потоком // Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки / Під заг. ред. В. Л. Макарова, І. О. Луковського, Р. М. Кушніра. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2009. – С. 188–189.
68. *Процюк Б.* Метод інтегральних рівнянь у нестаціонарних задачах теплопровідності термочутливих тіл // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2009. – Вип. 10. – С. 96–105.
69. *Процюк Б.* Термопружний стан кусково-неоднорідних термочутливих сферичних тіл за однакових сталих коефіцієнтів Пуассона // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 76. – С. 196–208.
70. *Процюк Б.* Тривимірні функції переміщень Гріна для кусково-однорідного півпростору // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: В 2 т. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2000. – Т. 1. – С. 327–330.
71. *Процюк Б.* Функції переміщень Гріна осесиметричних задач пружності для кусково-однорідного півпростору // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 146–153.
72. *Процюк Б., Верба І.* Нестаціонарне одновимірне температурне поле тришарових тіл з плоско-паралельними межами поділу // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 1999. – Вип. 1. – С. 200–205.
73. *Процюк Б., Верба І.* Фундаментальний розв'язок стаціонарної задачі теплопровідності для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 170–175.
74. *Процюк Б., Горун О.* Квазістатичний термопружний стан безмежного трискладового термочутливого тіла за дії джерела тепла // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2014. – Вип. 19. – С. 136–145.
75. *Процюк Б., Горун О.* Термопружна поведінка безмежного термочутливого трискладового тіла за дії об'ємного джерела тепла // Вісн. Терноп. нац. техн. ун-ту. – 2014. – № 4 (76) – С. 53–63.
76. *Процюк Б., Синюта В.* Квазістатичний термопружний стан двох багатошарових циліндрів при фрикційному нагріванні // Машинознавство. – 2003. – № 1. – С. 21–26.
77. *Процюк Б., Синюта В.* Метод функцій Ґріна в одновимірних нестаціонарних задачах теплопровідності багатошарових пластин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 51. – С. 76–84.
78. *Процюк Б., Синюта В.* Напружений стан багатошарових циліндрів при фрикційному нагріві // Машинознавство. – 2002. – № 7. – С. 17–20.
79. *Процюк Ю. Б.* Статичні задачі термопружності для шаруватих термочутливих плит за кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53,** № 4. – С. 151–161.
    Те саме: *Protsyuk Yu. B.* Static thermoelasticity problems for layered thermosensitive plates with cubic dependence of the coefficients of heat conductivity on temperature // J. Math. Sci. – 2012. – **181**, No. 4. – P. 481–496.
80. *Процюк Ю. Б.* Статичні задачі термопружності для шаруватих термочутливих тіл канонічної форми: Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук: 01.02.04 / Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. – Львів, 2011. – 20 с.
81. *Синюта В., Процюк Б.* Температурне поле в півпросторі з покриттям, зумовлене кусково-сталою температурою зовнішньої поверхні // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: Матеріали VII Міжнар. наук. конф. (Львів, 20–23 вер. 2006). – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2006. – Т. 1. – С. 232–234.

82. *Чекурін В. Ф., Процюк Б. В.* До ідентифікації параметрів багатошарових покрить за термопружними переміщеннями поверхні нагрівання // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40,** № 1. – С. 7–15.
   Те саме: *Chekurin V. F., Procyuk B. V.* Indetification of the parameters of multilayer coatings according to the thermoelastic displacements of the surface of heating // Mater. Sci. – 2004. – **40**, No. 1. – P. 1–13.
83. *Drobenko B., Hachkevych O.* Thermomechanics of electroconductive solids // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 11. – P. 6052–6063.
84. *Harmatij H., Król M., Popovych V.* Quasi-static problem of thermoelasticity for thermosensitive infinite circular cylinder of complex heat exchange // Adv. Pure Math. – 2013. – **3**, No. 4. – P. 430–437. – doi: 10.4236/apm.2013.34061.
85. *Hata T., Atsumi A.* Transient thermoelastic problem for a transversely anisotropic hollow cylinder with temperature-dependent properties // Bull. Japan Soc. Mech. Engs. – 1968. – **11,** No. 45. – P. 404–412.
86. *Hilton H. H.* Thermal stresses in bodies exhibiting temperature-dependent elastic properties // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1952. – **19**, No. 3. – P. 350–354. http://www.ae.illinois.edu/directory/profile/h-hilton.
87. *Koizumi T., Taniwaki T.* Thermal stresses in a long solid cylinder with temperature-dependent properties // Trans. Japan Soc. Mech. Engrs. – 1965. – **31-221**. – P. 9–15.
88. *Kushnir R. M., Yasinskyy A. V.* Optimal heating control of thermosensitive bodies under plastic deformation of material // J. Eng. Math. – 2013. – **78**, No. 1. – P. 83–98.
89. *Kushnir R. M., Yasinskyy A. V.* Optimal heating control of thermosensitive rectangular domain under restrictions on stresses in a plastic zone // J. Therm. Stresses. – 2010. – **33**, No. 3. – P. 251–261.
90. *Kushnir R., Protsiuk B.* Determination of the thermal fields and stresses in multilayer solids by means of the constructed Green functions // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 924–931.
91. *Kushnir R., Protsiuk B., Syniuta V.* An approach to determining temperature and displacements of inhomogeneous friction couples // Proc. 6th Int. Congr. Thermal Stresses (26–29 May 2005, Vienna, Austria) / F. Ziegler, R. Heuer, C. Adam (Eds.). – Vol. 2. – Vienna: Vienna University of Technology, 2005. – P. 733–736.
92. *Kushnir R., Protsiuk B.* A method of the Green's functions for quasistatic thermoelasticity problems in layered thermosensitive bodies under complex heat exchange // In: Modern Analysis and Applications / V. M. Adamyan et al. (eds). – Basel: Birkhäuser, 2009. – P. 143–154. – Ser. Operator Theory: Advances and Applications. – Vol. 191. – https://doi.org/10.1007/978-3-7643-9921-4_9.
93. *Kushnir R. M., Popovych V. S.* Heat conduction problems of thermosensitive solids under complex heat exchange // In: Heat conduction – Basic research / V. S. Vikhrenko (ed.). – Rijeka: InTech (Croatia), 2011. – 350 p. – (Chap. 6. – P. 131–154.) – http://www.intechopen.com/books/show/title/heat-conduction-basic-research.
94. *Kushnir R. M., Popovych V. S., Yanishevsky V. V.* Thermal and thermoelastic state of thin-walled thermosensitive structures subject to complex heat exchange // J. Therm. Stresses. – 2012. – **35**, No. 1-3. – P. 91–102.
95. *Kushnir R. M., Popovych V. S., Vovk O. M.* The thermoelastic state of a thermosensitive sphere and space with a spherical cavity subject to complex heat exchange // J. Eng. Math. – 2008. – **61**, No. 2-4. – P. 357–369.
96. *Noda N.* Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties // In: Thermal Stresses I / R. B. Hetnarski (ed.). – Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1986. – P. 391–483.
97. *Nowinski J.* Thermal stresses in a thick-walled cylinder with variable elastic properties // Arch. Mech. Stosowanej. – 1953. – **5**. – P. 629–640.
98. *Nowinski J.* Transient thermoelastic problem for an infinite medium with a spherical cavity exhibiting temperature-dependent properties // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1962. – **29,** No. 2. – P. 399–407. – doi:10.1115/1.3640561.
99. *Popovych V.* Methods for determination of the thermo-stressed state of thermosensitive solids under complex heat exchange conditions // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 6. – P. 2997–3008.

100. *Rakocha I., Popovych V.* The mathematical modeling and investigation of the stress-strain state of the three-layer thermosensitive hollow cylinder // Acta mechanica et automatica. – 2016. – **10**, No. 3. – P. 181–188. https://doi.org/10.1515/ama-2016-0027.
101. *Trostel R.* Wärmespannungen in Hohlzylindern mit temperaturabhängingen Stoffwerten // Ingenieur-Archiv (Archive of applied mechanics) https://link.springer.com/journal/419. – 1958. – **26**, No. 3. – P. 134–142. https://doi.org/10.1007/BF00535731.
102. *Yasinskyy A.* Determination and optimization of stresses state of bodies on the basis of inverse thermoelasticity problems // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 916–924.

О РАЗВИТИИ ИССЛЕДОВАНИЙ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ТЕЛ

Приведен краткий анализ исследований, выполненных в последние годы в Львовской научной школе по механике связанных полей, применительно к термомеханическому поведению термочувствительных тел.

ON THE DEVELOPMENT OF INVESTIGATIONS OF THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF THERMOSENSITIVE SOLIDS

A brief analysis of the investigations, carried out in recent years at the Lviv scientific school in mechanics of coupled fields, in relation to the thermomechanical behavior of thermosensitive solids is given.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
12.07.16