

### ДИНАМІКА ПРОМИСЛОВОГО РОБОТА З ПРУЖНО-ПІДДАТЛИВИМИ ПРИВОДНИМИ МЕХАНІЗМАМИ

*Розроблено математичну модель динаміки багатоланкового робота з жорсткими ланками та пружними приводними механізмами. Вона побудована на основі формалізму Лагранжа і включає систему нелінійних взаємозв'язаних звичайних диференціальних рівнянь. Сформульовано задачі динамічного й кінематичного керування роботом. Розглянуто приклад дволанкового робота-маніпулятора. Виконано аналіз впливу зміни коефіцієнтів жорсткості приводів на динаміку цього робота при динамічному керуванні.*

Можливості покращення експлуатаційних характеристик сучасних промислових роботів тісно пов'язані з вибором відповідних до технічних завдань, що виконуються ними, конструктивних схем приводних механізмів, урахуванням пружної піддатливості окремих її елементів і розробкою стратегій керування, які дозволяють уникнути виникнення небажаних пружних коливань їх робочих органів у режимах середніх навантажень або перевантажень. Конструктивна схема приводного пристрою та особливості його розміщення визначають характер впливу пружної піддатливості його елементів на точність відпрацьовування робочим органом робота поставлених програмних завдань. При цьому виділяють три варіанти розміщення приводів: безпосередньо у зчленуваннях виконавчих ланок маніпуляційного механізму, на основі робота та комбіноване розміщення у довільному місці рухомих або нерухомих ланок. Найбільш простою вважається перша схема розміщення приводів, яка дозволяє мінімізувати похибки передачі руху між сусідніми ланками і як наслідок – помилки позиціонування робочого органа маніпулятора. Проте за рахунок значного збільшення розмірів і маси рухомих ланок вона не є економічною і потребує використання спеціальних малогабаритних конструкцій приводних механізмів. Компонування приводів, при якому двигуни розміщені на основі, дозволяє зменшити маси рухомих елементів шляхом введення багатоланкових передавальних кінематичних ланцюгів, пов'язаних зі значним збільшенням пружної піддатливості та похибок позиціонування з наближенням до керованої ланки маніпулятора.

Урахування динаміки розглянутих типів приводів і пружних властивостей передавальних пристроїв, які застосовуються у них, призводить до істотного ускладнення математичних моделей виконавчих механізмів роботів і задач піддатливого керування їх рухами [1, 3, 7, 9]. До найбільш простих серед них відносять моделі, одержані нехтуванням впливу пружності виконавчих стержньових ланок на динамічні характеристики роботів. Вони дають змогу отримати деякі якісні та кількісні оцінки можливості виникнення пружно-піддатливих коливань робота, обумовлених нежорсткістю передавальних пристроїв приводів, і можуть бути корисними на першому етапі проектування цих систем. Для деяких таких моделей результати побудови алгоритмів керування положенням жорстких ланок обговорюються у роботах [3, 8, 9].

З метою дослідження впливу пружної піддатливості механічних передач руху в зчленуваннях на динаміку приводів і керованих ними ланок у цій роботі просторовий багатоланковий маніпулятор шарнірно-стержньової структури представлений як система багатьох абсолютно твердих тіл, місця з'єднання яких оснащені електроприводами. Математична модель динаміки маніпулятора, побудована на основі формалізму рівнянь Лагранжа другого роду, включає систему нелінійних взаємозв'язаних звичайних диференціальних рівнянь, порядок якої подвоюється за рахунок урахування пружних властивостей приводів керування порівняно з відповідною моделлю з жорсткими приводами.

Розглянемо механічну модель багатоланкового робота-маніпулятора, кінематичну схему якого наведено на рис. 1. Будемо вважати, що виконавчий механізм маніпулятора складається з  $N$  прямолінійних абсолютно твердих жорстких стержнів довжин  $l_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , з'єднаних з нерухомою основою і між собою за допомогою ідеальних циліндричних шарнірів. З кожним із шарнірів пружно зв'язаний відповідний пристрій, який дозволяє здійснити керування стержнем, що примикає, за кутовим прискоренням повороту вала його двигуна або за моментом навантаження, який розвиває двигун на валу. На кінці  $N$ -го стержня жорстко прикріплено абсолютно тверде тіло (вантаж), що транспортується маніпулятором. Для тіл, що входять в розглядувану механічну систему, введемо нумерацію від 1 до  $N+1$  у порядку їх взаємного приєднання, умовно присвоїмо нульовий номер нерухомій основі. Дослідження динаміки системи будемо проводити в інерціальній системі координат  $O_1XYZ$  з ортами  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ . Для цього жорстко зв'яжемо з кожною  $n$ -ю,  $n = 1, \dots, N$ , ланкою місцеву систему координат  $O_nx_ny_nz_n$  з ортами  $\mathbf{i}_n$ ,  $\mathbf{j}_n$ ,  $\mathbf{k}_n$  так, щоб точка  $O_n$  співпадала з початком стержня, вісь  $O_nx_n$  була суміщена з його осью лінійною, а відповідні осі  $O_ny_n$  і  $O_nz_n$  усіх ланок були паралельні, коли кінематичний ланцюг маніпулятора витягнутий в одну пряму лінію й осі спрямовані вздовж однієї прямої. Для кожного з  $n$  тіл системи,  $n = 1, \dots, N+1$ , введемо також систему координат  $C_nx_ny_nz_n$ , початок якої співпадає з центром мас  $C_n$ , а відповідні осі паралельні до осей системи  $O_nx_ny_nz_n$  і є головними центральними осями інерції. Будемо вважати, що кожна з осей з'єднувальних шарнірів з ортом  $\mathbf{e}_n$  співпадає з однією з осей місцевої системи координат  $O_nx_ny_nz_n$ , отже, виконується відповідна рівність  $\mathbf{e}_n = \mathbf{i}_n$ ,  $\mathbf{e}_n = \mathbf{j}_n$  або  $\mathbf{e}_n = \mathbf{k}_n$ . Кут повороту наступної  $n$ -ї ланки стосовно до попередньої  $(n-1)$ -ї навколо будь-якої з осей  $O_nx_n$ ,  $O_ny_n$  або  $O_nz_n$  позначимо через  $\varphi_n$ ,  $\psi_n$  або  $\theta_n$  відповідно, вважаючи його додатним, якщо з кінця розглядуваної осі вказаний поворот ланки буде проти руху годинникової стрілки. Будемо вважати, що в кожному  $n$ -му,  $n = 1, \dots, N$ , шарнірі, що з'єднує кінці прилеглих  $(n-1)$ -го і  $n$ -го стержнів до  $n$ -ї ланки, прикладено зовнішній момент  $M_n^e$ , який передається від двигуна відповідного пристрою. Зовнішній момент  $M_n^e$  будемо вважати додатним, якщо він намагається повернути розглядувану ланку в додатному напрямі.

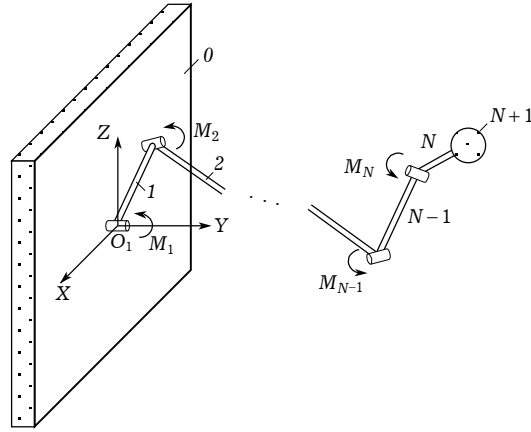


Рис. 1

Сформулюємо задачу кінематичного та динамічного керування просторовими рухами маніпулятора, здійснюючи кінематичне керування шляхом задання  $N$  функцій кутових прискорень  $\ddot{\alpha}_n = \ddot{\alpha}_n(t)$  поворотів валів двигунів приводних пристроїв і динамічне керування за допомогою задання  $N$  програмних законів зміни електромагнітних моментів  $M_n = M_n(t)$ , які розвиваються двигуном і генеруються з необхідною точністю у припущенні про можливість нехтування інерційністю електричного ланцюга двигуна  $n$ -го приводу. Тут і надалі крапкою позначено повну похідну за часом.

Розглядувана механічна система має  $N$  степенів вільності. Для однозначного визначення її положення у просторі введемо сукупність узагальнених координат  $q_n = q_n(t)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , які є кутами повороту  $n$ -ї ланки відносно  $(n-1)$ -ї і виражаються в прийнятих позначеннях однією з рівностей  $q_n = \phi_n$ ,  $q_n = \psi_n$  або  $q_n = \theta_n$  залежно від орієнтації осі відповідного з'єднувального шарніра (рис. 1).

Для виведення рівнянь просторового руху ланок маніпулятора використаємо рівняння Лагранжа другого роду [4]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_n} = Q_n, \quad n = 1, \dots, N, \quad (1)$$

де  $\dot{q}_n$  –  $n$ -на узагальнена швидкість, яка приймає для розглядуваного варіанта орієнтації осі з'єднувального шарніра одне із значень  $\dot{q}_n = \dot{\phi}_n$ ,  $\dot{q}_n = \dot{\psi}_n$  або  $\dot{q}_n = \dot{\theta}_n$ ;  $Q_n$  – узагальнена сила, що відповідає узагальненій координаті  $q_n$ .

Нехтуючи впливом інерційних навантажень роторів двигунів приводів на динаміку ланок маніпулятора, визначимо кінетичну енергію системи за формулою

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N+1} (m_n v_n^2 + J_{xn} \omega_{xn}^2 + J_{yn} \omega_{yn}^2 + J_{zn} \omega_{zn}^2). \quad (2)$$

У цій формулі для  $n$ -го,  $n = 1, \dots, N+1$ , тіла системи прийнято позначення:  $m_n$  – маса;  $v_n$  – модуль вектора абсолютної швидкості  $\mathbf{v}_n$  центра мас  $C_n$ ;  $J_{xn}$ ,  $J_{yn}$ ,  $J_{zn}$  – моменти інерції відносно осей системи координат  $C_n x_n y_n z_n$ ;  $\omega_{xn}$ ,  $\omega_{yn}$ ,  $\omega_{zn}$  – проекції вектора абсолютної кутової швидкості  $\boldsymbol{\omega}_n$  на осі  $O_n x_n$ ,  $O_n y_n$ ,  $O_n z_n$ .

Положення центрів мас ланок маніпулятора та тіла, що ним переноситься, в інерціальній системі координат  $O_1 XYZ$  означимо радіусами-векторами:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{1}{2} \ell_1 \mathbf{i}_1, & \mathbf{r}_n &= \sum_{i=1}^{n-1} \ell_i \mathbf{i}_i + \frac{1}{2} \ell_n \mathbf{i}_n, & n &= 2, \dots, N, \\ \mathbf{r}_{N+1} &= \sum_{i=1}^{N+1} \ell_i \mathbf{i}_i + \ell_{N+1}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\ell_{N+1}$  – вектор з початком у кінці тіла  $N$  і кінцем у точці  $C_n$  тіла  $N+1$  у системі координат  $C_{N+1} x_{N+1} y_{N+1} z_{N+1}$ .

Для обчислення компонент векторів  $\mathbf{r}_n$  і швидкостей  $\mathbf{v}_n$ ,  $\boldsymbol{\omega}_n$  використаємо матричний метод. Означимо вектор  $\mathbf{r}_n$  вектором-стовпцем його координат  $\|X_n \ Y_n \ Z_n\|^T$  у системі  $O_1 XYZ$  і вектор  $\ell_{N+1}$  – вектором-стовпцем координат  $\|x_{N+1} \ y_{N+1} \ z_{N+1}\|^T$  у системі  $C_{N+1} x_{N+1} y_{N+1} z_{N+1}$ . Тоді з (3) випливає, що

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} A_{0,1} \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^{n-1} A_{0,i} \begin{Bmatrix} \ell_i \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} A_{0,n} \begin{Bmatrix} \ell_n \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \\ & & n &= 2, \dots, N, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_{N+1} \\ \dot{Y}_{N+1} \\ \dot{Z}_{N+1} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N A_{0,i} \begin{pmatrix} \ell_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{0,N+1} \begin{pmatrix} x_{N+1} \\ y_{N+1} \\ z_{N+1} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Тут  $A_{0,n} = B_{0,1} \cdot B_{1,2} \cdot \dots \cdot B_{n-1,n}$  – матриця напрямних косинусів кутів  $\alpha_{11}^{0,n} = \cos(X, x_n)$ ,  $\alpha_{12}^{0,n} = \cos(X, y_n)$ , ...,  $\alpha_{33}^{0,n} = \cos(Z, z_n)$  між ортами базисів  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  та  $\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n, \mathbf{k}_n$ ;  $B_{i-1,i} = A_{0,i}^T \cdot A_{0,i-1}$  – матриця переходу від базису  $\mathbf{i}_{i-1}, \mathbf{j}_{i-1}, \mathbf{k}_{i-1}$  до базису  $\mathbf{i}_i, \mathbf{j}_i, \mathbf{k}_i$ ,  $i = 1, \dots, N+1$  [5]. Символом «Т» позначено операцію транспонування.

Проекції швидкостей  $\mathbf{v}_n$ ,  $n = 1, \dots, N+1$ , на осі інерціальної системи координат  $O_1XYZ$  знайдемо диференціюванням лівої і правої частин (4):

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \\ \dot{Z}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \dot{A}_{0,1} \begin{pmatrix} \ell_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{X}_n \\ \dot{Y}_n \\ \dot{Z}_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} \dot{A}_{0,i} \begin{pmatrix} \ell_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \dot{A}_{0,n} \begin{pmatrix} \ell_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = 2, \dots, N,$$

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_{N+1} \\ \dot{Y}_{N+1} \\ \dot{Z}_{N+1} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \dot{A}_{0,i} \begin{pmatrix} \ell_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{A}_{0,N+1} \begin{pmatrix} x_{N+1} \\ y_{N+1} \\ z_{N+1} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Для визначення вектора  $\boldsymbol{\omega}_n$ ,  $n = 1, \dots, N+1$ , використаємо правило додавання обертальних рухів твердого тіла навколо осей, що перетинаються [4]:

$$\boldsymbol{\omega}_n = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}, \quad n = 1, \dots, N, \quad \boldsymbol{\omega}_{N+1} = \boldsymbol{\omega}_N, \quad (6)$$

де  $\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = \dot{q}_i \mathbf{e}_i$  – вектор кутової швидкості обертання  $i$ -го тіла відносно  $(i-1)$ -го,  $i = 1, \dots, N$ , який у системі  $O_i x_i y_i z_i$  означимо одним із векторів-стовпців проєкцій  $\|\dot{q}_i \ 0 \ 0\|^T$ ,  $\|0 \ \dot{q}_i \ 0\|^T$  або  $\|0 \ 0 \ \dot{q}_i\|^T$  залежно від орієнтації осі циліндричного шарніра. Прийmemo для означеності, не обмежуючи загальності подальшого викладу, що вісь з'єднувального шарніра  $O_i$  співпадає з віссю  $O_i y_i$ . У цьому випадку матричні вирази для проєкцій вектора  $\boldsymbol{\omega}_n$  на осі системи координат  $O_n x_n y_n z_n$  аналогічно до (4) подамо у вигляді

$$\begin{pmatrix} \omega_{xn} \\ \omega_{yn} \\ \omega_{zn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n A_{n,i} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{q}_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = 1, \dots, N, \quad \begin{pmatrix} \omega_{xN+1} \\ \omega_{yN+1} \\ \omega_{zN+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{xN} \\ \omega_{yN} \\ \omega_{zN} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

де  $A_{n,i} = B_{n,n-1} \cdot B_{n-1,n-2} \cdot \dots \cdot B_{i+1,i}$  – матриця напрямних косинусів кутів між осями систем координат  $O_n x_n y_n z_n$  і  $O_i x_i y_i z_i$  з компонентами  $\alpha_{11}^{n,i} = \cos(x_n, x_i)$ ,  $\alpha_{12}^{n,i} = \cos(x_n, y_i)$ , ...,  $\alpha_{33}^{n,i} = \cos(z_n, z_i)$ ;  $B_{i+1,i}$  – матриця переходу від базису  $\mathbf{i}_{i+1}, \mathbf{j}_{i+1}, \mathbf{k}_{i+1}$  до базису  $\mathbf{i}_i, \mathbf{j}_i, \mathbf{k}_i$  [5].

Кожну з узагальнених сил  $Q_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , подамо у вигляді суми двох доданків:

$$Q_n = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_n} + Q_n^*, \quad (8)$$

перший із яких пов'язаний з наявністю потенціальних сил (сил тяжіння),

які діють на ланки маніпулятора та вантаж, що переноситься; другий доданок стосується непотенціальних сил (зовнішніх моментів у шарнірах).

Потенціальну енергію системи визначаємо на основі співвідношення

$$\Pi = g \sum_{n=1}^{N+1} m_n Z_n, \quad (9)$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння.

Для обчислення узагальнених сил  $Q_n^*$ , що дорівнюють зовнішнім моментам  $M_n^e$ , запишемо рівняння динаміки  $n$ -го електроприводу [1, 3], який керує рухом  $n$ -ї ланки:

$$I_n \ddot{\alpha}_n = M_n - M_n^e i_n^{-1}, \quad (10)$$

де  $I_n$  – сумарний момент інерції ротора двигуна та ланок електроприводу, приведений до осі ротора;  $\alpha_n$  – кут повороту вала двигуна;  $i_n$  – коефіцієнт передачі механізму передачі обертового руху (редуктора).

При визначенні моменту  $M_n^e = M_n^e(t)$ , який передається від двигуна  $n$ -го шарніра, будемо нехтувати інерційністю передавального механізму та будемо вважати, що вказаний момент залежить тільки від пружної піддатливості механізму передачі руху. Вважаючи надалі, як і вище, що вісь  $n$ -го шарніра співпадає, наприклад, з віссю  $O_n y_n$ , запишемо

$$M_n^e = k_n (\alpha_n i_n^{-1} - \psi_n), \quad (11)$$

де  $k_n$  – зведений коефіцієнт жорсткості  $n$ -го передавального механізму.

Підставляючи співвідношення (11) у вираз (10), одержимо додаткове диференціальне рівняння динаміки  $n$ -го пружного приводу

$$I_n \ddot{\alpha}_n + k_n (\alpha_n i_n^{-1} - \psi_n) i_n^{-1} = M_n, \quad n = 1, \dots, N, \quad (12)$$

яке використовується для знаходження залежної змінної  $\alpha_n = \alpha_n(t)$ .

Виконуючи підстановку рівностей (2), (8) у рівняння (1) і необхідні операції диференціювання, одержимо систему  $2N$  взаємозв'язаних нелінійних звичайних диференціальних рівнянь для визначення змінних  $\alpha_n$ ,  $q_n$  (або, інакше, для вибраної орієнтації осі  $n$ -го з'єднувального шарніра  $\alpha_n$ ,  $\psi_n$ ), яка з відповідними початковими умовами при заданому законі кінематичного або динамічного керування однозначно описує динаміку маніпулятора.

Задачу кінематичного керування системою сформулюємо таким чином. За заданим програмним законом зміни в часі кутів  $\alpha_n = \alpha_n(t)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , поворотів валів двигунів приводних пристроїв потрібно визначити керуючі моменти  $M_n^e(t)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , двигунів, які забезпечують реалізацію заданих залежностей  $\alpha_n = \alpha_n(t)$ . При такому режимі керування рівняння (10) втрачає силу, а узагальнена сила  $Q_n^*$  визначається за формулою  $Q_n^* = k_n (\alpha_n i_n^{-1} - \psi_n)$ , яка містить задану функцію  $\alpha_n = \alpha_n(t)$ . У цьому випадку керована механічна система має  $N$  степенів вільності, і порядок системи диференціальних рівнянь, які описують її рух і включають тільки рівняння вигляду (1), знижується до  $N$ .

Сформулюємо тепер задачу динамічного керування системою. Нехай заданий програмний закон зміни за часом  $N$  електромагнітних моментів  $M_n(t) = M_n(t)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , двигунів приводних пристроїв. Необхідно знайти  $N$  функцій кутових переміщень ланок і  $N$  кутів  $\alpha_n(t)$  поворотів валів двигунів.

Як приклад реалізації викладеного вище підходу розглянемо рівняння динаміки дволанкового маніпулятора при перенесенні ним вантажу кулеподібної форми радіуса  $r$  для випадку, коли осі його з'єднувальних шарнірів  $O_1, O_2$  співпадають відповідно з осями  $O_1y_1, O_2z_2$  місцевих систем координат:

$$\begin{aligned} & \ddot{\psi}_1(b_1\ell_1^2 + (b_2\ell_2^2 + b_5)\cos^2\theta_2 + b_4\sin^2\theta_2 + 2b_3\ell_1\ell_2\cos\theta_2) + \\ & + \dot{\psi}_1\dot{\theta}_2((b_4 - b_5 - b_2\ell_2^2)\sin 2\theta_2 - 2b_3\ell_1\ell_2\sin\theta_2) = \\ & = g\cos\psi_1(b_7\ell_1 + b_3\ell_2\cos\theta_2) + M_1^e, \\ & \ddot{\theta}_2(b_2\ell_2^2 + b_6) - \frac{1}{2}\dot{\psi}_1^2((b_4 - b_5 - b_2\ell_2^2)\sin 2\theta_2 + 2b_3\ell_1\ell_2\sin\theta_2) = \\ & = -gb_3\ell_2\sin\psi_1\sin\theta_2 + M_2^e, \end{aligned} \quad (13)$$

де 
$$b_1 = \frac{J_{y1}}{\ell_1^2} + m_2 + m_3, \quad b_2 = \frac{1}{4}m_2 + \left(1 + \frac{r}{\ell_2}\right)^2 m_3, \quad b_3 = \frac{1}{2}m_2 + \left(1 + \frac{r}{\ell_2}\right)m_3,$$

$$b_4 = J_{x2} + J_{x3}, \quad b_5 = J_{y2} + J_{y3}, \quad b_6 = J_{z2} + J_{z3}, \quad b_7 = \frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3.$$

Розв'язання сформульованої задачі кінематичного керування маніпулятором зводиться до необхідності визначення невідомих електромагнітних моментів із системи алгебраїчних рівнянь (13), (12) (або в загальному випадку – з (1), (12)).

Побудову розв'язків сформульованої задачі динамічного керування маніпулятором з жорсткими ланками можна провести шляхом інтегрування рівнянь вигляду (13), (12) (або в загальному випадку – вигляду (1), (12)) з відповідними початковими умовами одним із методів числового інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь, які забезпечують потрібну точність обчислень. Належить відмітити, що при дослідженні динаміки розглядуваних маніпуляційних систем шарнірно-стержньової структури на великих інтервалах часу зі збільшенням кількості ланок системи диференціальні рівняння їх рухів можуть виявляти властивості жорсткості [2, 6], які виникають в результаті накладання компонент розв'язків, що повільно змінюються і швидко затухають. Такі властивості притаманні поведінці систем багатьох тіл. Цей факт істотно ускладнює процес побудови збіжних розв'язків і потребує залучення у вказаних випадках спеціальних методів числового інтегрування жорстких систем звичайних диференціальних рівнянь. До найбільш ефективних з обчислювальної точки зору для розглядуваного класу задач на сьогодні відносять напівявні методи Рунге – Кутта – Розенброка, які включають процедуру ренормалізації розв'язків на кожному кроці дискретизації рівнянь. У цій роботі при виявленні ознак жорсткості системи замість явного методу Рунге – Кутта 4-го порядку, який використовували поза вказаними критичними областями параметрів системи, застосовували напівявний метод Рунге – Кутта – Розенброка 4-го порядку.

Розглянемо результати виконаного на основі (13) числового моделювання динаміки робота, маніпуляційний механізм якого складається з двох ланок, при транспортуванні ним у просторі тіла скінченних розмірів. Для оцінки впливу на цей процес пружної піддатливості механічних передач приводу було виконано розрахунки для таких груп значень зведених коефіцієнтів їх жорсткості  $k_1 = k_2 = 400; 500; 600; 700; 800; 900; 1000 \text{ Н} \cdot \text{м/рад}$ . Моменти інерції частин приводів, що рухаються, і передавальні коефіцієнти вибрано рівними  $I_1 = I_2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $i_1 = i_2 = 10$ . Ланки маніпулятора довжин  $\ell_1 = 1 \text{ м}$ ,  $\ell_2 = 0.8 \text{ м}$  розглядали як сталі трубочасті стержні, внутрішні та зовнішні діаметри яких приймали рівними  $d_1 = d_2 = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,

$D_1 = D_2 = 7 \cdot 10^{-2}$  м. Маса стержнів становлять  $m_1 = 2.752$  кг,  $m_2 = 2.205$  кг. Їхні моменти інерції відповідно дорівнювали  $J_{x_1} = 2.929 \cdot 10^{-3}$  кг  $\cdot$  м<sup>2</sup>,  $J_{y_1} = J_{z_1} = 2.312 \cdot 10^{-1}$  кг  $\cdot$  м<sup>2</sup>,  $J_{x_2} = 2.343 \cdot 10^{-3}$  кг  $\cdot$  м<sup>2</sup>,  $J_{y_2} = J_{z_2} = 1.118 \cdot 10^{-1}$  кг  $\cdot$  м<sup>2</sup>. Вантаж, що транспортується маніпулятором, розглядали як однорідне кулеподібне тіло радіуса  $r = 0.1$  м і маси  $m_3 = 32.86$  кг. У вихідному нерухомому стані при  $t = 0$  кінематичний ланцюг маніпулятора витягнутий в одну пряму лінію, уздовж якої спрямовані осі  $O_1x_1$ ,  $O_2x_2$  ланок, і повернутий на кут  $\psi_1(0) = 90^\circ$  відносно осі  $O_1y_1$  першого з'єднувального шарніра. При цьому кут повороту відносно осі  $O_2z_2$  другого шарніра складає  $\theta_2(0) = 0^\circ$ . Дослідимо випадок динамічного керування просторовими рухами маніпулятора, яке здійснювалось шляхом зміни електромагнітних моментів, що розвиваються двигунами приводів за гармонічним законам  $M_1 = 15(1 - \cos 4t)$  [Н  $\cdot$  м],  $M_2 = 15(1 - \cos 8t)$  [Н  $\cdot$  м] на інтервалі часу  $0 \leq t \leq 12$  с.

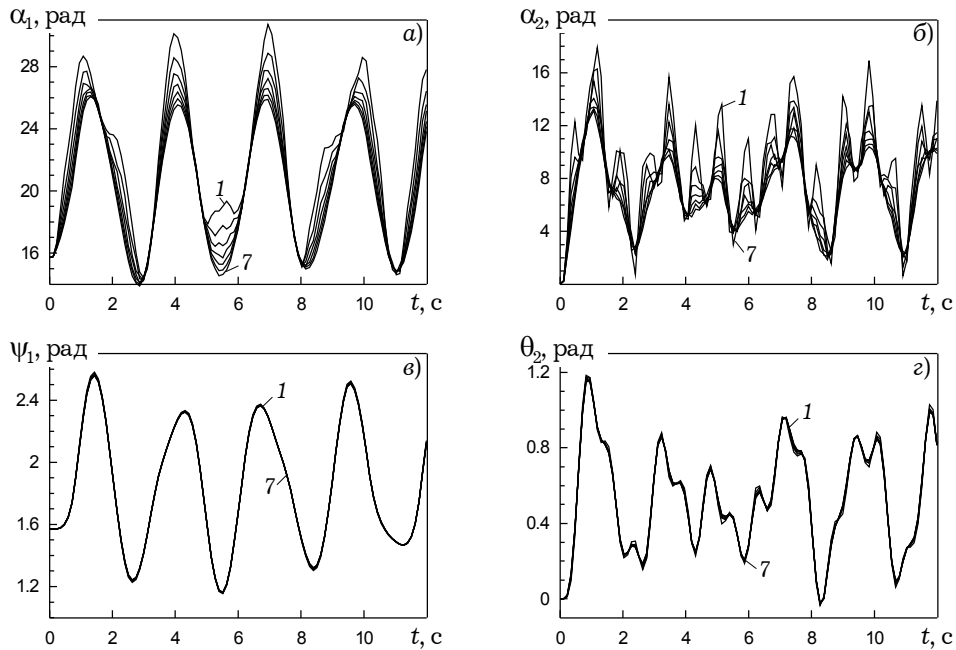


Рис. 2

Обчислені при цьому кути  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  поворотів валів двигунів для семи вказаних груп значень коефіцієнтів жорсткості  $k_1$ ,  $k_2$  передач приводів зображено на рис. 2а, б (криві 1–7). Відповідні їм функції  $\psi_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  кутів взаємних поворотів ланок зображено на рис. 2в, г. У цілому всі розглянуті функції зберігають гармонічний характер. Проте наявність пружності механічних передач приводів найбільший вплив здійснює на динамічні характеристики самих приводів (рис. 2а, б) та обумовлює появу в них ділянок височастотних коливань з періодами порядку 0.2–0.3 с, які виникають на етапах розгону та гальмування двигунів. Цей ефект проявляється тим сильніше, чим вища частота керуючої дії (рис. 2б). Нежорсткість передач впливає значно менше на динаміку ланок маніпулятора, і хоча на етапах розгону і гальмування спостерігаються деякі відмінності функцій  $\psi_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  (рис. 2в, г), вони виявляються неістотними порівняно з амплітудними значеннями цих функцій. Відмітимо, що збільшення значень коефіцієнтів

$k_1$ ,  $k_2$  можна добитися не тільки зменшення максимальних значень кутів  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  поворотів валів двигунів, а й деякого гасіння описаних вище високочастотних коливань. Для функцій  $\psi_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  зростання коефіцієнтів  $k_1$ ,  $k_2$  призводять до незначного зниження амплітудних значень цих функцій.

Таким чином, на підставі виконаних числових розрахунків можна зробити такі висновки. Пружна піддатливість елементів приводних пристроїв у фазах розгону та гальмування їх двигунів може призводити до виникнення таких несприятливих факторів, як високочастотні коливання, для повного гасіння яких потрібними є залучення різних демпфуючих пристроїв і розробка спеціальних алгоритмів керування. У зв'язку з цим для вибору оптимальних конструкційних параметрів роботів належить проводити побудову їх розрахункових моделей з урахуванням динаміки пружно-піддатливих приводів.

1. Гуляев В. И., Завражина Т. В. Влияние упругой податливости элементов приводов на динамику работа // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 2. – С. 135–144.
2. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1988. – 334 с.
3. Крутько П. Д. Управление исполнительными системами роботов. – Москва: Наука, 1991. – 336 с.
4. Лойцянский Л. Г., Лурье Л. И. Курс теоретической механики: В 2 т. – Москва: Дрофа, 2006. – Т. 1. – 352 с.; Т. 2. – 720 с.
5. Накано Э. Введение в робототехнику. – Москва: Мир, 1988. – 334 с.
6. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – Москва: Мир, 1990. – 512 с.
7. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г. Манипуляционные роботы. – Москва: Наука, 1989. – 368 с.
8. De Queiroz M. S., Donopudi S., Burg T., Dawson D. M. Model-based control of rigid-link flexible-joint robots: An experimental evaluation // Robotica. – 1998. – **16**, No. 1. – P. 11–21.
9. Vukobratovic M., Matijevic V., Potkonjak V. Control of robots with elastic joints interacting with dynamic environment // J. Intell. and Rob. Syst. – 1998. – **23**, No. 1. – P. 87–100.

#### ДИНАМИКА ПРОМЫШЛЕННОГО РОБОТА С УПРУГО-ПОДАТЛИВЫМИ ПРИВОДНЫМИ МЕХАНИЗМАМИ

Разработана математическая модель динамики многосвязного промышленного робота с жесткими звеньями и упругими приводными механизмами. Она построена на основе формализма Лагранжа и включает систему нелинейных взаимосвязанных обыкновенных дифференциальных уравнений. Сформулированы задачи динамического и кинематического управления роботом. Рассмотрен пример двухзвенного робота-манипулятора. Выполнен анализ влияния изменения коэффициентов жесткости приводов на динамику робота при динамическом управлении.

#### DYNAMICS OF INDUSTRIAL ROBOT WITH ELASTIC COMPLIANT ACTUATING DEVICES

A mathematical model of the multi-link industrial robot with rigid links and elastic actuating devices is developed. It is constructed on the basis of the Lagrange formalism and includes a system of nonlinear interconnected ordinary differential equations. The problems of dynamic and kinematical control of the robot are put. An example of the two-link robot-manipulator is considered. The analysis of influence of change of rigidity coefficients of actuators on dynamics of this robot at dynamic control is made.

Міжнар. наук.-навч. центр  
інформ. технологій та систем, Київ

Одержано  
05.04.05