

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ ЗРОСТАЮЧОГО ШАРУ ҐРУНТУ ЗА НАЯВНОСТІ СОЛЕПЕРЕНОСУ В НЕІЗОТЕРМІЧНИХ УМОВАХ

Сформульовано математичну модель одновимірної задачі фільтраційної консолідації зростаючого в часі ґрунтового масиву з урахуванням масопереносу солей в неізотермічному режимі та отримано її числовий розв'язок з використанням стабілізаційних схем методу скінченних елементів. На основі проведених числових експериментів показано вплив масопереносу солей, неізотермічних умов і поступової зміни висоти масиву ґрунту на проходження процесу його фільтраційної консолідації.

Вступ. Зростаючий техногенний вплив людської діяльності на навколишнє середовище вимагає нових підходів та поглядів на математичне моделювання поведінки природних систем. Ґрунт є системою, яка включає тверді частинки (скелет ґрунту), порову рідину (в найпростішому випадку – вода) та газову складову. Зміни внаслідок техногенного впливу в будь-якій фазі ґрунту будуть впливати на появу змін в інших фазах пористого середовища. Неврахування таких взаємозв'язків може спотворити картину прогнозування поведінки ґрунтового середовища та призвести до непередбачуваних негативних наслідків. Тому постає актуальна задача врахування і дослідження взаємовпливу змін у фазах ґрунту при математичному моделюванні його поведінки як пористого середовища.

Донедавна при дослідженні процесів консолідації ґрунтів як порову рідину розглядали чисту воду [8, 9, 11, 16]. Однак натурні експерименти свідчать про те, що параметри ґрунтів (зокрема, коефіцієнт фільтрації) значно залежать від концентрації солей у поровій воді [4, 13]. Як показано в роботі [5], неврахування впливу переносу солей на процес консолідації ґрунту може значно спотворити картину динаміки розсіювання надлишкових напорів.

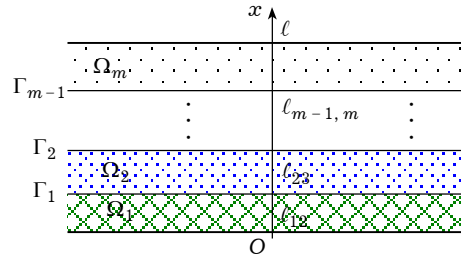
Одним із техногенних факторів впливу також є зміна температурного режиму навколишнього середовища та зведених будівель, що позначається на температурі самого ґрунту. Наприклад, неврахування цього фактору при будівництві атомних електростанцій на глинистих ґрунтах може призвести до нерівномірних осідань фундаментів споруд [1] і виникнення, внаслідок цього, критичних ситуацій.

Вплив неізотермічного режиму на процеси фільтраційної консолідації досліджено в роботах [6, 7]. Зокрема, враховано явища термодифузії, термоосмосу, а також залежність коефіцієнта фільтрації від температури.

При будівництві ґрунтова споруда зводиться не відразу, а поступово, шарами. Кожен шар може мати власні властивості, які суттєво відрізняються від властивостей інших шарів. У попередніх роботах авторів при дослідженні процесів консолідації цей факт не враховувався. Відомо багато наукових робіт з дослідження консолідації зростаючого шару ґрунту [8, 9, 16]. Однак у них чисту воду розглядали як порову рідину і не враховували впливу теплового режиму. Тому є актуальною задачею побудови математичної моделі консолідації зростаючого шару ґрунту з урахуванням впливу переносу солей в неізотермічних умовах, знаходження числового розв'язку відповідної крайової задачі та дослідження впливу змінних характеристик ґрунту на процес його фільтраційної консолідації.

Математична модель задачі. Розглянемо одновимірну задачу ущільнення зростаючого шару двофазного ґрунту, який розміщений на непроникній основі (рис. 1). Припустимо, що зростання відбувається дискретно в часі окремими шарами. При цьому кожен шар ґрунту може мати свої власні характеристики, відмінні від характеристик інших шарів.

Математична модель сформульованої задачі фільтраційної консолідації зростаючого шару ґрунту з урахуванням впливу переносу солей в неізотермічному режимі та змінності характеристик ґрунту (зокрема, коефіцієнта пористості з часом) на підставі результатів робіт [5–7, 10, 15] описується такою крайовою задачею:



$$\frac{1 + \bar{\varepsilon}}{\gamma a} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k(c, T, \varepsilon) \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(v(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial h^*}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) - u \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma_1 (c - C_m^*) = n \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho c_\rho u \frac{\partial T}{\partial x} = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3)$$

$$u = \varepsilon v - k(c, T, \varepsilon) \frac{\partial h}{\partial x} + v(c) \frac{\partial c}{\partial x} + k_T \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad h(\ell, t) = 0, \quad (5)$$

$$c(0, t) = C_m^*, \quad \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad T(\ell, t) = T_1(t), \quad (7)$$

$$[h] \Big|_{x=\ell_{i,i+1}} = 0, \quad [c] \Big|_{x=\ell_{i,i+1}} = 0, \quad [T] \Big|_{x=\ell_{i,i+1}} = 0, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (8)$$

$$[u] \Big|_{x=\ell_{i,i+1}} = 0, \quad [q_c] \Big|_{x=\ell_{i,i+1}} = 0, \quad [q_T] \Big|_{x=\ell_{i,i+1}} = 0, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (9)$$

$$q_c = uc - D \frac{\partial c}{\partial x} - D_T \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_T = \rho c_\rho u T - \lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (10)$$

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad c(x, 0) = c_0(x), \quad T(x, 0) = T_0(x), \quad (11)$$

де $x \in \bar{\Omega}$, $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$, $\Omega_i = (\ell_{i-1,i}; \ell_{i,i+1})$, $i = 1, \dots, m$; $t \in (0, t_0]$; $\ell_{01} \stackrel{\text{def}}{=} 0$,

$\ell_{m,m+1} \stackrel{\text{def}}{=} \ell$; $h_0(x)$, $c_0(x)$, $T_0(x)$, $T_1(t)$ – задані функції. Тут використано такі позначення: $h(x, t) = p(x, t)/\gamma$ – надлишковий напір; $p(x, t)$ – надлишковий тиск; γ – питома вага сольового розчину; $c(x, t)$ – концентрація порового сольового розчину; $T(x, t)$ – температура ґрунтового середовища; $k(c, T, \varepsilon)$, $v(c)$, $D(c)$, D_T , k_T , λ – коефіцієнти відповідно фільтрації, хімічного осмосу, конвективної дифузії, термодифузії, термоосмосу та ефективної теплопровідності вологого ґрунту; u – швидкість фільтрації сольового розчину; ρ , c_ρ – густина та питома теплоємність порового розчину; c_T – об'ємна теплоємність ґрунту; v – швидкість руху твердих частинок ґрунту; t – час; ε , $\bar{\varepsilon}$ – коефіцієнт пористості та його осереднене значення; n – по-

ристість ґрунту; a – коефіцієнт стисливості ґрунту; γ_1 – константа швидкості масообміну; C_m^* – концентрація граничного насичення; Θ^* , h^* – сума головних напружень в скелеті ґрунту та надлишковий напір в стані повної стабілізації;

$$\begin{aligned} h(x, t) &= \{h_i(x, t), (x, t) \in \bar{Q}_{t_0}^{(i)}\}, \quad c(x, t) = \{c_i(x, t), (x, t) \in \bar{Q}_{t_0}^{(i)}\}, \\ T(x, t) &= \{T_i(x, t), (x, t) \in \bar{Q}_{t_0}^{(i)}\}, \quad k(c, T, \varepsilon) = \{k_i(c_i, T_i, \varepsilon), x \in \bar{\Omega}_i\}, \\ D(c) &= \{D_i(c_i), x \in \bar{\Omega}_i\}, \quad v(c) = \{v_i(c_i), x \in \bar{\Omega}_i\}, \\ k_T &= \{(k_T)_i, x \in \bar{\Omega}_i\}, \quad D_T = \{(D_T)_i, x \in \bar{\Omega}_i\}, \quad \lambda = \{\lambda_i, x \in \bar{\Omega}_i\}, \\ a &= \{a_i, x \in \bar{\Omega}_i\}, \quad c_T = \{(c_T)_i, x \in \bar{\Omega}_i\}, \\ [f] \Big|_{x=\ell_{i,i+1}} &= f_i^+ - f_i^-, \quad f_i^+ = f \Big|_{x=\ell_{i,i+1}+0}, \quad f_i^- = f \Big|_{x=\ell_{i,i+1}-0}, \\ Q_{t_0}^{(i)} &= \Omega_i \times (0, t_0], \quad i = 1, \dots, m, \quad Q_{t_0} = \Omega \times (0, t_0]. \end{aligned}$$

Вважається, що верхня межа масиву ґрунту дренажна, а нижня – непроникна. Причому непроникність зумовлюється заляганням пласта солі. Межа $x = \ell$ при поступовому зростанні шару ґрунту послідовно пробігає всі $\ell_{i-1,i}$, $i = 2, \dots, m$. Товщини шарів можуть відрізнятись одна від одної.

На межах контакту між ґрунтовими шарами задаються умови спряження ідеального контакту (8), (9) [10, 15].

Рівняння (1) описує динаміку зміни надлишкових напорів у часі і виводиться на основі основної розрахункової моделі В. А. Флоріна [16] при прийнятті закону фільтрації у вигляді (4) [6]. Рівняння (2), (3) описують сольовий і температурний режими масиву ґрунту, який консолидується. Відповідно шуканими є функції розподілу поля надлишкових напорів $h(x, t)$, концентрації солей у поровій воді $c(x, t)$ і температури $T(x, t)$.

Чисельне розв'язання крайової задачі (1)–(11) методом скінченних елементів. Аналогічно, як у [10, 15], позначимо через H_0 множину вектор-функцій $s(x) = (s_1(x), s_2(x), s_3(x))$, кожна із компонент яких у кожній із областей Ω_i належить простору Соболева $W_2^1(\Omega_i)$, $i = 1, \dots, m$, і приймає нульові значення на тих кінцях відрізка $[0, \ell]$, де відповідно для функцій $h(x, t)$, $c(x, t)$ і $T(x, t)$ задано граничні умови першого роду. При цьому кожна з функцій $s_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, задовольняє відповідні головні умови спряження (8).

Нехай H – простір вектор-функцій $f(x, t) = (f_1(x, t), f_2(x, t), f_3(x, t))$, кожна з компонент $f_i(x, t)$ яких інтегровна з квадратом разом зі своїми першими частинними похідними $\frac{\partial f_i}{\partial t}$, $\frac{\partial f_i}{\partial x}$ у кожній із областей Ω_j $\forall t \in (0, t_0]$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \dots, m$, причому $f_1(x, t)$, $f_2(x, t)$, $f_3(x, t)$ задовольняють граничні умови першого роду та умови спряження (8) ті, що й функції $h(x, t)$, $c(x, t)$, $T(x, t)$ відповідно.

Використавши стандартну процедуру: домноживши рівності (1), (2), (3) та кожену з початкових умов (11) відповідно на функції $s_1(x)$, $s_2(x)$, $s_3(x)$ такі, що $(s_1(x), s_2(x), s_3(x)) \in H_0$, інтегруючи їх по області Ω , застосовуючи інтегрування частинами та використовуючи для рівнянь (2), (3) збурені варіаційні рівності згідно з протипотоковою схемою Петрова – Гальоркіна [17], отримуємо

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \frac{\partial h}{\partial t} s_1 dx + \frac{1+\bar{\varepsilon}}{\gamma a} \int_0^\ell \left(k(c, T, \varepsilon) \frac{\partial h}{\partial x} - v(c) \frac{\partial c}{\partial x} - k_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{ds_1}{dx} dx = \\ = \int_0^\ell \left(\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial h^*}{\partial t} \right) s_1 dx \quad \forall t \in (0, t_0], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\ell n \frac{\partial c}{\partial t} s_2 dx + \int_0^\ell \left(D \frac{\partial c}{\partial x} + D_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{ds_2}{dx} dx + \int_0^\ell u \frac{\partial c}{\partial x} s_2 dx + \int_0^\ell \gamma_1 c s_2 dx + \\ + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_0^\ell \left[n \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) + u \frac{\partial c}{\partial x} + \right. \\ \left. + \gamma_1 (c - C_m^*) \right] u \frac{ds_2}{dx} dx = \gamma_1 C_m \int_0^\ell s_2 dx \quad \forall t \in (0, t_0], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\ell c_T \frac{\partial T}{\partial t} s_3 dx + \int_0^\ell \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \frac{ds_3}{dx} dx + \int_0^\ell \rho c_\rho u \frac{\partial T}{\partial x} s_3 dx + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_0^\ell \left[c_T \frac{\partial T}{\partial x} - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \rho c_\rho u \frac{\partial T}{\partial x} \right] \rho c_\rho u \frac{ds_3}{dx} dx = 0 \quad \forall t \in (0, t_0], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\ell h(x, 0) s_1 dx = \int_0^\ell h_0(x) s_1 dx, \quad \int_0^\ell c(x, 0) s_2 dx = \int_0^\ell c_0(x) s_2 dx, \\ \int_0^\ell T(x, 0) s_3 dx = \int_0^\ell T_0(x) s_3 dx \end{aligned} \quad (15)$$

$$\forall (s_1(x), s_2(x), s_3(x)) \in H_0,$$

$$\forall (h(x, t), c(x, t), T(x, t)) \in H,$$

$\Omega = \bigcup \Omega_e$, Ω_e – скінченні елементи; $\tau_e^{(c)}$, $\tau_e^{(T)}$ – параметри регуляризації.

Наближений розв'язок задачі (1)–(11) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} (h(x, y, t), c(x, y, t), T(x, y, t)) = \left(\sum_{i=1}^{n_1} a_i(t) N_i^{(1)}(x), \right. \\ \left. \sum_{j=1}^{n_2} b_j(t) N_j^{(2)}(x) + W_2(x, t), \sum_{s=1}^{n_3} r_s(t) N_s^{(3)}(x) + W_3(x, t) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

де $\mathbf{N}_i = (N_i^{(1)}, 0, 0)$, $i = 1, \dots, n_1$, $\mathbf{N}_j = (0, N_{j-n_1}^{(2)}, 0)$, $j = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$, $\mathbf{N}_s = (0, 0, N_{s-n_1-n_2}^{(3)})$, $s = n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3$, – базисні вектор-функції скінченновимірному підпростору $M_0 \subset H_0$; $W_2(x, t)$, $W_3(x, t)$ – відомі функції такі, що $W_2(0, t) = C_m^*$, $W_3(\ell, t) = T_1(t)$.

З рівностей (12)–(15) при $(s_1(x), s_2(x), s_3(x)) \in M_0$, враховуючи (16), отримуємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно вектора невідомих $\mathbf{U}(t) = (\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{R}(t))$:

$$\mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{F}^{(3)}, \quad (17)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{B}(t) = \mathbf{G}^{(2)} \cdot \mathbf{R}(t) + \mathbf{F}^{(2)}, \quad (18)$$

$$\mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{B}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{A}(t) = \mathbf{G}^{(1)} \cdot \mathbf{B}(t) + \mathbf{G}'^{(1)} \cdot \mathbf{R}(t) + \mathbf{F}^{(1)}, \quad (19)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \cdot \mathbf{A}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{B}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} \cdot \mathbf{R}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \quad (20)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (a_i(t))_{i=1}^{n_1}, & \mathbf{A}^{(0)} &= (a_i(0))_{i=1}^{n_1}, & \mathbf{B} &= (b_i(t))_{i=1}^{n_2}, & \mathbf{B}^{(0)} &= (b_i(0))_{i=1}^{n_2}, \\ \mathbf{R} &= (r_i(t))_{i=1}^{n_3}, & \mathbf{R}^{(0)} &= (r_i(0))_{i=1}^{n_3}, & \mathbf{M}^{(3)} &= (m_{ij}^{(3)})_{i,j=1}^{n_3}, & \mathbf{L}^{(3)} &= (l_{ij}^{(3)})_{i,j=1}^{n_3}, \\ \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} &= (\tilde{m}_{ij}^{(3)})_{i,j=1}^{n_3}, & \tilde{\mathbf{M}}^{(1)} &= (\tilde{m}_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{n_1}, & \tilde{\mathbf{F}}^{(3)} &= (\tilde{f}_i^{(3)})_{i=1}^{n_3}, & \mathbf{F}^{(3)} &= (f_i^{(3)})_{i=1}^{n_3}, \\ \mathbf{M}^{(2)} &= (m_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^{n_2}, & \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} &= (\tilde{m}_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^{n_2}, & \mathbf{L}^{(2)} &= (l_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^{n_2}, \\ \mathbf{G}^{(2)} &= (g_{ij}^{(2)})_{i=1,j=1}^{n_2,n_3}, & \mathbf{F}^{(2)} &= (f_i^{(2)})_{i=1}^{n_2}, & \tilde{\mathbf{F}}^{(2)} &= (\tilde{f}_i^{(2)})_{i=1}^{n_2}, \\ \mathbf{M}^{(1)} &= (m_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{n_1}, & \mathbf{L}^{(1)} &= (l_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{n_1}, & \mathbf{G}^{(1)} &= (g_{ij}^{(1)})_{i=1,j=1}^{n_1,n_2}, \\ \mathbf{G}'^{(1)} &= (g'_{ij}^{(1)})_{i=1,j=1}^{n_1,n_3}, & \mathbf{F}^{(1)} &= (f_i^{(1)})_{i=1}^{n_1}, & \tilde{\mathbf{F}}^{(1)} &= (\tilde{f}_i^{(1)})_{i=1}^{n_1}, \\ \tilde{m}_{ij}^{(3)} &= \int_0^\ell N_i^{(3)} N_j^{(3)} dx, & \tilde{m}_{ij}^{(2)} &= \int_0^\ell N_i^{(2)} N_j^{(2)} dx, \\ m_{ij}^{(3)} &= c_T \left(\int_0^\ell N_i^{(3)} N_j^{(3)} dx + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega_e} \rho c_\rho N_j^{(3)} u \frac{dN_i^{(3)}}{dx} dx \right), \\ \tilde{f}_i^{(3)} &= \int_0^\ell T_0 N_i^{(3)} dx - \int_0^\ell W_3(x, 0) N_i^{(3)} dx, \\ l_{ij}^{(3)} &= \int_0^\ell \left(\lambda \frac{dN_j^{(3)}}{dx} \frac{dN_i^{(3)}}{dx} + \rho c_\rho N_i^{(3)} u \frac{dN_j^{(3)}}{dx} \right) dx + \\ &\quad + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega_e} \rho c_\rho \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{dN_j^{(3)}}{dx} \right) + \rho c_\rho u \frac{dN_j^{(3)}}{dx} \right] u \frac{dN_i^{(3)}}{dx} dx, \\ f_i^{(3)} &= - \int_0^\ell \left(c_T \frac{\partial W_3}{\partial t} N_i^{(3)} + \lambda \frac{\partial W_3}{\partial x} \frac{dN_i^{(3)}}{dx} + \rho c_\rho u N_i^{(3)} \frac{\partial W_3}{\partial x} \right) dx - \\ &\quad - \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega_e} \rho c_\rho \left[c_T \frac{\partial W_3}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial W_3}{\partial x} \right) + \rho c_\rho u \frac{\partial W_3}{\partial x} \right] u \frac{dN_i^{(3)}}{dx} dx, \\ m_{ij}^{(2)} &= n \left(\int_0^\ell N_i^{(2)} N_j^{(2)} dx + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} u N_j^{(2)} \frac{dN_i^{(2)}}{dx} dx \right), \\ \tilde{f}_i^{(2)} &= \int_0^\ell c_0 N_i^{(2)} dx - \int_0^\ell W_2(x, 0) N_i^{(2)} dx, \\ g_{ij}^{(2)} &= - \int_0^\ell D_T \frac{dN_j^{(2)}}{dx} \frac{dN_i^{(2)}}{dx} dx - \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(D_T \frac{dN_j^{(2)}}{dx} \right) u \frac{dN_i^{(2)}}{dx} dx, \\ l_{ij}^{(2)} &= \int_0^\ell \left(D \frac{dN_j^{(2)}}{dx} \frac{dN_i^{(2)}}{dx} + u N_i^{(2)} \frac{dN_j^{(2)}}{dx} + \gamma_1 N_i^{(2)} N_j^{(2)} \right) dx + \\ &\quad + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{dN_j^{(2)}}{dx} \right) + u \frac{dN_j^{(2)}}{dx} + \gamma_1 N_j^{(2)} \right] u \frac{dN_i^{(2)}}{dx} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_i^{(1)} &= \int_0^\ell \left(\frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial \theta^*}{\partial t} \right) N_i^{(1)} dx + \frac{1+\bar{\varepsilon}}{\gamma a} \int_0^\ell \left(-N_i^{(1)} \frac{\partial W_1}{\partial t} - \right. \\
&\quad \left. - k \frac{\partial W_1}{\partial x} \frac{dN_i^{(1)}}{dx} + v \frac{\partial W_2}{\partial x} \frac{dN_i^{(1)}}{dx} + k_T \frac{\partial W_3}{\partial x} \frac{dN_i^{(1)}}{dx} \right) dx, \\
f_i^{(2)} &= - \int_0^\ell \left(n \frac{\partial W_2}{\partial t} N_i^{(2)} + D \frac{\partial W_2}{\partial x} \frac{dN_i^{(2)}}{dx} + D_T \frac{\partial W_3}{\partial x} \frac{dN_i^{(2)}}{dx} - \right. \\
&\quad \left. - \gamma_1 N_i^{(2)} (C_m^* - W_2) \right) dx - \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} \left[n \frac{\partial W_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial W_2}{\partial x} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_T \frac{\partial W_3}{\partial x} \right) + u \frac{\partial W_2}{\partial x} + \gamma_1 (W_2 - C_m^*) \right] u \frac{dN_i^{(2)}}{dx} dx, \\
m_{ij}^{(1)} &= \int_0^\ell N_i^{(1)} N_j^{(1)} dx, \quad \tilde{f}_i^{(1)} = \int_0^\ell h_0 N_i^{(1)} dx - \int_0^\ell W_1(x, 0) N_i^{(1)} dx, \\
l_{ij}^{(1)} &= \frac{1+\bar{\varepsilon}}{\gamma a} \int_0^\ell k \frac{dN_j^{(1)}}{dx} \frac{dN_i^{(1)}}{dx} dx, \quad g_{ij}^{(1)} = \frac{1+\bar{\varepsilon}}{\gamma a} \int_0^\ell v \frac{dN_j^{(2)}}{dx} \frac{dN_i^{(1)}}{dx} dx, \\
g_{ij}'^{(1)} &= - \frac{1+\bar{\varepsilon}}{\gamma a} \int_0^\ell k_T \frac{dN_j^{(3)}}{dx} \frac{dN_i^{(1)}}{dx} dx.
\end{aligned}$$

Параметри регуляризації $\tau_e^{(T)}$, $\tau_e^{(c)}$ у співвідношеннях (13), (14) згідно з [3, 14] вибираємо таким чином: $\tau_e^{(T)} = \frac{h_e}{a \|\rho c_p \mathbf{u}\|_{\infty, e}} \gamma(\text{Pe}_T)$, $\tau_e^{(c)} = \frac{h_e}{a \|\mathbf{u}\|_{\infty, e}} \gamma(\text{Pe}_c)$,

$$\text{де } a = 3, \quad \gamma(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq z \leq 1, \\ 1, & 1 \leq z < \infty. \end{cases}$$

Для знаходження числового розв'язку задачі Коші (17)–(20) поділимо часовий відрізок $[0, t_0]$ на M однакових частин з кроком $\tau = \frac{t_0}{M}$. Позначимо через $\mathbf{U}^{(j)} = (\mathbf{A}^{(j)}, \mathbf{B}^{(j)}, \mathbf{R}^{(j)})$ наближені розв'язки задачі Коші (17)–(20) при $t = jt$. Також введемо такі позначення:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^{(j+1/2)} &= \frac{1}{2} (\mathbf{R}^{(j+1)} + \mathbf{R}^{(j)}), & \mathbf{A}^{(j+1/2)} &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}^{(j+1)} + \mathbf{A}^{(j)}), \\
\mathbf{B}^{(j+1/2)} &= \frac{1}{2} (\mathbf{B}^{(j+1)} + \mathbf{B}^{(j)}).
\end{aligned}$$

Наближений розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь (17)–(19) можна знайти за допомогою схеми Кранка – Ніколсона [10, 15]. Однак ця схема вимагає на кожному часовому шарі розв'язання систем нелінійних рівнянь. Щоб уникнути цього, для знаходження наближених розв'язків задачі Коші можна використати схему предиктор-коректор [15].

Результати числових експериментів. З'ясування впливу масопереносу солей та неізотермічного режиму на процес фільтраційної консолідації зростаючого шару ґрунту проведено на тестовому прикладі. У зв'язку з цим розглянуто одновимірну задачу фільтраційної консолідації масиву ґрунту загальною товщиною $\ell = 24$ м з такими вихідними даними:

$$v(c) = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / (\text{кг} \cdot \text{доба}), \quad \varepsilon_0 = 0.62, \quad D = 0.002 \text{ м}^2 / \text{доба},$$

$$D_T = 0.002 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / (\text{град} \cdot \text{доба} \cdot \text{л}), \quad k = k(c, T, \varepsilon), \quad k(0, 20, \varepsilon_0) = 0.001 \text{ м} / \text{доба},$$

$$k_T = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / (\text{град} \cdot \text{доба}), \quad \gamma_1 = 0 \text{ доба}^{-1}, \quad \rho = 1100 \text{ кг} / \text{м}^3,$$

$$\lambda = 108 \text{ кДж}/(\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}), \quad c_p = 4.2 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{град}), \quad C_m^* = 350 \text{ г}/\text{л},$$

$$c_T = 2137 \text{ кДж}/(\text{м}^3 \cdot \text{град}), \quad T_1 = 17 + 13 \cos \frac{\pi t}{180}, \quad c_0(x) = 8 \text{ г}/\text{л}, \quad T_0 = 30^\circ\text{C}.$$

У початковий момент часу $\ell = \ell_{12} = 2 \text{ м}$ і $H_0(x) = (\ell - x) \cdot \frac{\gamma_n - \gamma}{\gamma}$, де $\gamma_n = 2.16 \cdot 10^4 \text{ Н}/\text{м}^3$ – питома вага ґрунту, $\gamma = 1.1 \cdot 10^4 \text{ Н}/\text{м}^3$ – питома вага порового розчину.

У рівнянні (1) $\frac{\partial h^*}{\partial t} = 0$ оскільки остаточний розподіл надлишкових напорів у стабілізованому стані є незмінним у часі. При рівномірному дискретному зростанні висоти шару ґрунту $\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = \frac{1}{n} \Theta^*$, де n – кількість проміжків часу, протягом яких відбувається збільшення товщини масиву ґрунту. Також у законі (4) знехтувано швидкістю руху твердих частинок ґрунту. Функція T_1 визначається з умови сезонних коливань температури, причому $T_{\max} = 30^\circ\text{C}$, $T_{\min} = 4^\circ\text{C}$.

Залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації сольового розчину $k = k(c)$ вибрали такою [5]:

$$k(c) = a_5 c^5 + a_4 c^4 + a_3 c^3 + a_2 c^2 + a_1 c + a_0,$$

де $a_5 = 5.9404 \cdot 10^{-2}$, $a_4 = -1.6703 \cdot 10^{-1}$, $a_3 = 1.7051 \cdot 10^{-1}$, $a_2 = -7.4311 \cdot 10^{-2}$, $a_1 = 1.0563 \cdot 10^{-2}$, $a_0 = 1.0054 \cdot 10^{-3}$, $c \in [0, 1]$ – безрозмірна величина.

Залежність коефіцієнта фільтрації від температури визначали, апроксимуючи за допомогою методу найменших квадратів результати експериментів, наведені в [2]:

$$k(T) = b_5 T^5 + b_4 T^4 + b_3 T^3 + b_2 T^2 + b_1 T + b_0,$$

де $b_5 = 1.4154 \cdot 10^{-2}$, $b_4 = -2.6097 \cdot 10^{-2}$, $b_3 = 1.0819 \cdot 10^{-2}$, $b_2 = 1.2844 \cdot 10^{-4}$, $b_1 = 1.0404 \cdot 10^{-2}$, $b_0 = 3.0925 \cdot 10^{-3}$, $T \in [0, 1]$ – безрозмірна величина.

Залежність коефіцієнта фільтрації від пористості ґрунту вибрано, як у роботі [9]

$$k(\varepsilon) = A e^{\beta \varepsilon},$$

де $\varepsilon = \varepsilon_0 - c \ln(1 + b\Theta)$, $\Theta = \gamma_n(\ell - x) - \gamma_n h$, $A = 5.87 \cdot 10^{-7} \text{ м}/\text{доба}$, $\beta = 12$, $c = 62 \cdot 10^{-3}$, $b = 6.5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{Н}$.

Тоді коефіцієнт стисливості ґрунту визначиться як

$$a = \frac{cb}{1 + b\Theta},$$

і

$$k(c, T, \varepsilon) = \frac{1}{k_0^2} k(c) \cdot k(T) \cdot k(\varepsilon),$$

де k_0 – коефіцієнт фільтрації для чистої води при температурі 20°C та $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Обчислення проведено на рівномірній сітці при лінійних і квадратичних розривних поліноміальних базисних функціях [10, 15]. Попередньо математична модель (1)–(11) зведена до безрозміреного вигляду. Для дискретизації в часі використано схему предиктор-коректор із рівномірним кроком за часом. Величина кроку за часом в безрозміреній моделі $\bar{\tau} = 0.00125$, що

відповідає кроку в реальному часі $\tau = 30$ діб. Інтеграли для відшукування елементів відповідних матриць у задачі Коші (17)–(20) обчислено з використанням квадратурних формул Гауса [12].

На рис. 2 наведено графіки розподілу поля надлишкових напорів у масиві ґрунту для різних значень часу від початку процесу фільтраційної консолідації без урахування (штрихові криві) та з урахуванням поступового зростання шару ґрунту – з урахуванням впливу осмотичних явищ і залежності $k = k(c, T, \varepsilon)$ (суцільні криві). Як бачимо на рис. 2, за припущення миттєвого зведення шару ґрунту надлишкові напори є меншими, ніж при поступовому зведенні шару ґрунту. Причина цього явища полягає в тому, що за час зростання шару ґрунту, коли надлишкові напори за рахунок прикладеного навантаження збільшуються, у миттєво зведеному масиві ґрунту напори на певний рівень розсіюються.

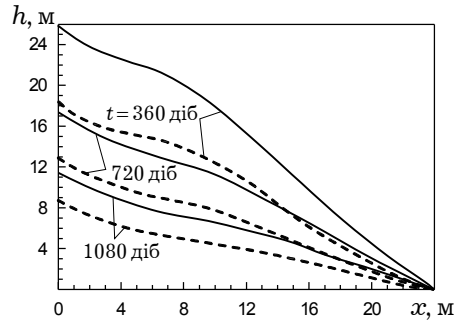


Рис. 2

На рис. 3–5 наведено графіки розподілу надлишкових напорів, концентрації солей та температури в зростаючому шарі ґрунту. При урахуванні впливу осмотичних явищ, залежності $k = k(c, T, \varepsilon)$ і змінних характеристик ґрунту (суцільні криві) надлишкові напори розсіюються повільніше, ніж у випадку неврахування впливу температури, концентрації солей і змінних характеристик ґрунту (штрихові криві). Це пояснюється тим, що при $c > 60$ г/л (див. рис. 4) і при зменшенні коефіцієнта пористості біля нижньої непроникувальної основи значно зменшується коефіцієнт фільтрації, що призводить до уповільненого розсіювання надлишкових напорів. Уповільненню розсіювання напорів в околі нижньої межі також сприяє урахування нормальної осмотичної фільтрації.

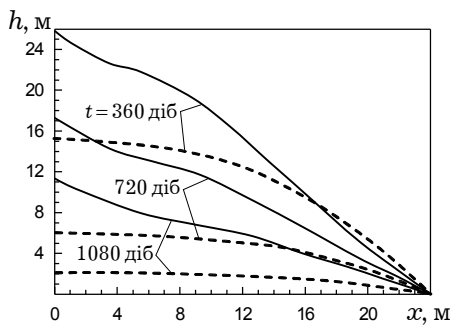


Рис. 3

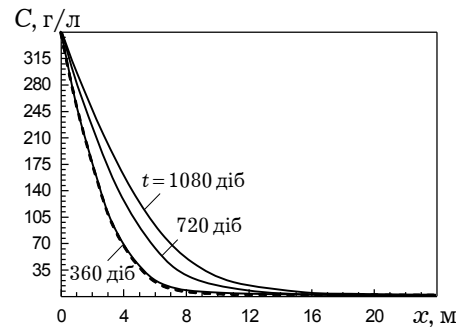


Рис. 4

Температура практично не впливає на розподіл надлишкових напорів поблизу нижньої межі, оскільки, як бачимо на рис. 5, температурне поле в околі цієї межі практично не змінюється. Однак такий вплив прослідковується в околі верхньої межі.

Отже, урахування поступового зростання шару ґрунту призводить до відмінностей в розподілі полів надлишкових напорів порівняно з миттєвим зведенням шару ґрунту. Ураху-

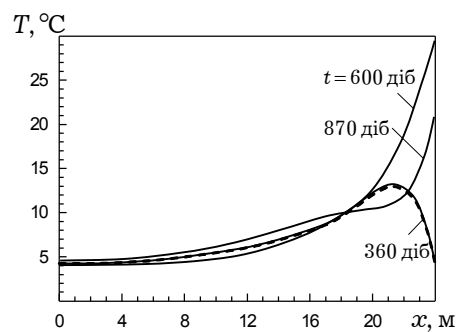


Рис. 5

вання змінних характеристик ґрунту, температури та наявності концентрації солей у поровій воді порушує очікуване співвідношення напорів в масиві ґрунту.

Висновки. Отже, на підставі результатів робіт [5, 6, 10, 15] сформульовано математичну модель одновимірної задачі фільтраційної консолідації зростаючого шару ґрунту з урахуванням впливу переносу солей і температури. Числовий розв'язок відповідної крайової задачі знайдено методом скінченних елементів. Як приклад наведено результати числових експериментів з дослідження фільтраційної консолідації масиву ґрунту обмеженої товщини.

У розглянутій статті питання обґрунтування стійкості та оцінки збіжності отриманих числових розв'язків крайової задачі при різних скінченноелементних поділах області та часових проміжках не обговорювалось. Ці питання плануються як окреме теоретичне дослідження наступного етапу подальших робіт авторів у цьому напрямку.

1. *Архангельский И. В.* Изменение геологической среды при строительстве и эксплуатации атомных станций // Геоэкология. – 1999. – № 4. – С. 310–313.
2. *Брилинг И. А.* Влияние давления и температуры на фильтрационные свойства глин // Связанная вода в дисперсных системах. – 1977. – Вып. 4. – С. 82–89.
3. *Вагін П., Ямелинець А.* Розв'язування початково-крайових задач міграції домішок // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2002. – Вип. 5. – С. 61–67.
4. *Власюк А. П., Кузюк М. Т.* Експериментальні дослідження деяких параметрів фільтрації сольових розчинів у піщаних ґрунтах // Меліорація та водне госп-во. – 2000. – Вип. 87. – С. 43–46.
5. *Власюк А. П., Мартинюк П. М.* Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів. – Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004. – 211 с.
6. *Власюк А. П., Мартинюк П. М.* Фільтраційна консолідація ґрунтового масиву за наявності перенесення солей у неізотермічному режимі // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2003. – Вип. 7. – С. 138–147.
7. *Власюк А. П., Мартинюк П. М.* Числове моделювання стабілізованими схемами МСЕ фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі з урахуванням тепломасопереносу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 2. – С. 59–70.
8. *Гольдин А. Л.* Анализ консолидации растущего слоя грунта // Изв. ВНИИГ. – 1972. – 99. – С. 119–126.
9. *Горелик Л. В., Нуллер Б. М.* Консолидация растущего слоя трехфазного грунта с учётом изменений его свойств в процессе уплотнения // Изв. ВНИИГ. – 1968. – 86. – С. 223–227.
10. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – Киев: Наук. думка, 1998. – 614 с.
11. *Костерин А. В., Павлова М. Ф., Шемуранова Е. В.* Численное исследование фильтрационной консолидации // Мат. моделирование. – 2001. – 13, № 9. – С. 63–70.
12. *Крылов В. И., Шульгина Л. Т.* Справочная книга по численному интегрированию. – Москва: Наука, 1966. – 372 с.
13. *Кульчицкий Л. И., Гольдберг В. М.* Влияние минерализации воды на фильтрационные свойства песчано-глинистых пород // Гидрогеолог. вопросы подземного захоронения пром. стоков. – 1969. – Вып. 14. – С. 6–22.
14. *Савула Я. Г., Шинкаренко О. Г.* Стабілізація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: протипотокова схема // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 46. – С. 3–9.
15. *Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
16. *Флорин В. А.* Основы механики грунтов. – Москва: Госстройиздат, 1961. – 544 с. – Т. 2.
17. *Sandra M. C., Abimael F. D., Eduardo L. M.* Numerical analysis of a stabilized finite element method for tracer injection simulations // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2000. – 187. – P. 119–136.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ
КОНСОЛИДАЦИИ РАСТУЩЕГО СЛОЯ ГРУНТА С УЧЕТОМ СОЛЕПЕРЕНОСА
В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ**

Сформулирована математическая модель одномерной задачи фильтрационной консолидации растущего слоя грунта с учётом массопереноса солей в неизотермическом режиме и получено её численное решение с использованием стабилизированных схем метода конечных элементов. На основании проведенных числовых экспериментов показано влияние массопереноса солей, неизотермических условий и постепенного увеличения толщины массива грунта на процесс его фильтрационной консолидации.

**MATHEMATICAL MODELING OF FILTRATION CONSOLIDATION
PROBLEM FOR INCREASING SOIL LAYER TAKING INTO ACCOUNT SALT
TRANSFER UNDER NON-ISOTHERMAL CONDITIONS**

A mathematical model of filtration consolidation problem for increasing soil layer, taking into account non-isothermal salt transfer, has been formulated. The numerical solution of the corresponding one-dimensional boundary-value problem has been found by the stabilized finite element method. The influence of mass transfer of salt, non-isothermal conditions and progressive change of soil layer height on the filtration consolidation process has been numerically investigated.

Нац. ун-т водного госп-ва
та природокористування, Рівне

Одержано
29.11.05