

### КОВЗНИЙ І ГЛАДКИЙ КОНТАКТ ШТАМПІВ РІЗНОГО ПРОФІЛЮ З ПРУЖНОЮ СМУГОЮ

*Розглянуто контактну взаємодію з урахуванням та без урахування тертя штампів різної форми (з прямолінійною горизонтальною та похилою основою, клиноподібного та параболічного штампів) із пружною смугою. Методом Вінера – Гопфа одержано точні аналітичні розв'язки відповідних крайових задач.*

Контактні задачі теорії пружності для смуги у випадку гладкого контакту розглядалися багатьма авторами. Огляд досліджень цього напрямку міститься, наприклад, у [5]. У роботах [1, 2] отримано наближені асимптотичні розв'язки для вузької або широкої (порівняно з розміром штампа) смуги без урахування тертя між штампом та смугою.

При врахуванні тертя має місце або ковзний контакт з повним проковзуванням уздовж усієї області контакту, або контакт з частковим зчепленням всередині області контакту та проковзуванням на її краях залежно від того, дорівнює, чи є меншим, ніж коефіцієнт тертя, відношення тангенціальної і нормальної сил, які діють на штамп. Задачі ковзного контакту штампа з прямолінійною горизонтальною основою і параболічного штампа з пружною смугою розглянуто у [3]. Розв'язок інтегрального рівняння побудовано у вигляді асимптотичного ряду, який збігається у випадку відносно широких смуг, коли ширина смуги дорівнює або більша від довжини області контакту. Розв'язки, які будуються нижче, справедливі для довільних відношень довжини області контакту та ширини смуги. Із застосуванням методу Вінера – Гопфа [8] за схемою робіт [4, 7] інтегральне рівняння з різницевим ядром на скінченному проміжку зводиться до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Розв'язок алгебричної системи рівнянь знаходиться у вигляді ряду за степенями малого параметра. Точний розв'язок контактної задачі для напівнескінченного штампа з прямолінійною основою на пружній смугі без урахування сил тертя методом Вінера – Гопфа знайдено у роботі [10].

**Постановка задачі.** Розглянемо стан плоскої деформації у пружній смугі  $-\infty < x < \infty$ ,  $-h \leq y \leq h$  ширини  $2h$  з коефіцієнтом Пуассона  $\nu$  і модулем зсуву  $G$ . Нижня межа  $y = -h$ ,  $-\infty < x < \infty$  смуги закріплена, верхня межа  $y = h$ , окрім відрізка  $0 \leq x \leq \ell$ , уздовж якого вдавлюється штамп, вільна. До штампа прикладена вдавлююча вертикальна сила  $P$  і зсувна горизонтальна сила  $\mu_0 P$ , де  $\mu_0$  – коефіцієнт тертя між верхньою межею смуги та підшовою штампа (рис. 1). У такому разі має місце повне проковзування вздовж усієї області контакту  $0 \leq x \leq \ell$ ,  $y = h$  штампа та смуги, де нормальні та дотичні напруження зв'язані законом тертя Амонтона (Кулона).

Отже, в умовах плоскої деформації маємо змішану крайову задачу теорії пружності для смуги  $-\infty < x < \infty$ ,  $-h \leq y \leq h$  з такими крайовими умовами:

$$u_y|_{y=h} = f(x) - \delta, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (1)$$

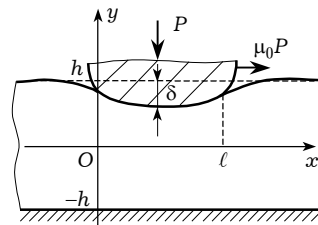


Рис. 1

$$\tau_{yx}|_{y=h} = -\mu_0 \sigma_y|_{y=h}, \quad 0 < x < \ell, \quad (2)$$

$$\sigma_y|_{y=h} = 0, \quad \tau_{yx}|_{y=h} = 0, \quad x < 0, \quad x > \ell, \quad (3)$$

$$u_x|_{y=-h} = 0, \quad u_y|_{y=-h} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (4)$$

де  $y = f(x)$  – рівняння підшови штампа;  $\delta$  – осадка під штампом. Для визначення осадки  $\delta$  маємо умову рівноваги

$$\int_0^\ell \sigma_y|_{y=h} dx = -P. \quad (5)$$

Рівняння підшови штампа задамо у вигляді

$$f(x) = \delta [\alpha_1 (2h)^{-1} x + \alpha_2 (2h)^{-1} |x - \ell_1| + \alpha_3 (2h)^{-2} (x - \ell_1)^2], \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad 0 < \ell_1 < \ell. \quad (6)$$

Фіксуємо коефіцієнти  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  у цьому рівнянні, будемо розглядати чотири різні форми штампа:

- а)  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$  – штамп з прямолінійною горизонтальною основою (рис. 2а);
- б)  $\alpha_1 = 2h\delta^{-1} \operatorname{tg} \varepsilon$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$  – штамп з прямолінійною похилою основою з кутом нахилу  $\varepsilon$  з можливими випадками повного та неповного контакту (рис. 2б);
- в)  $\alpha_2 = 2h\delta^{-1} \operatorname{tg} \varepsilon$ ,  $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$  – клиноподібний штамп (рис. 2в);
- г)  $\alpha_3 = 2h^2 R^{-1} \delta^{-1}$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  – параболічний штамп з радіусом кривини  $R$  у вершині (рис. 2г).

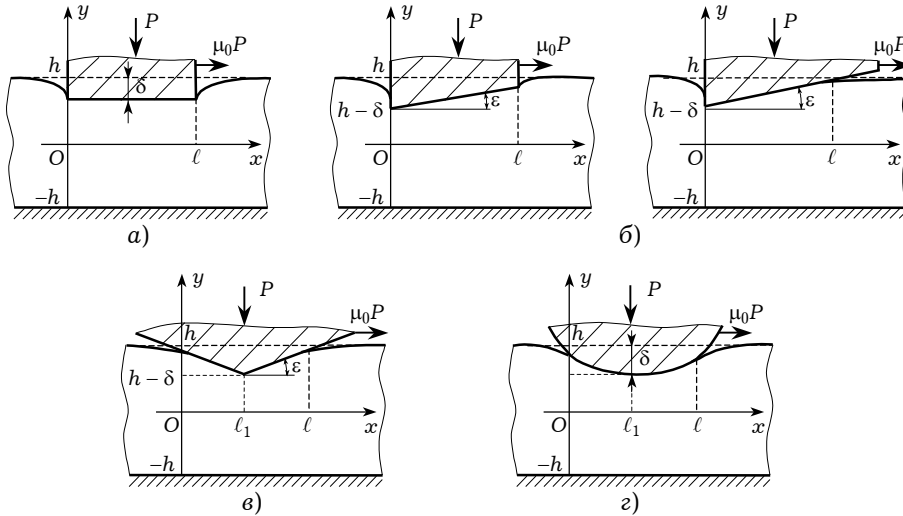


Рис. 2

**Інтегральне рівняння.** Скористаємося загальним розв'язком рівнянь Ляме для смуги [9]:

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u(\mu, y) e^{-i\mu x} d\mu, \quad u_y = \int_{-\infty}^{\infty} v(\mu, y) e^{-i\mu x} d\mu,$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2G} \sigma_y &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\mu, y) e^{-i\mu x} d\mu, & \frac{1}{2G} \tau_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(\mu, y) e^{-i\mu x} d\mu, \\
\mu^2 u(\mu, y) &= \mu A(\mu) \operatorname{ch} \mu y + \mu B(\mu) \operatorname{sh} \mu y + C(\mu) [(3 - 4\nu) \operatorname{ch} \mu y + \mu y \operatorname{sh} \mu y] - \\
&\quad - D(\mu) [(3 - 4\nu) \operatorname{sh} \mu y + \mu y \operatorname{ch} \mu y], \\
v(\mu, y) &= A(\mu) \operatorname{sh} \mu y + B(\mu) \operatorname{ch} \mu y + C(\mu) y \operatorname{ch} \mu y - D(\mu) y \operatorname{sh} \mu y, \\
\sigma(\mu, y) &= \mu A(\mu) \operatorname{ch} \mu y + \mu B(\mu) \operatorname{sh} \mu y + C(\mu) [(1 - 2\nu) \operatorname{ch} \mu y + \mu y \operatorname{sh} \mu y] - \\
&\quad - D(\mu) [(1 - 2\nu) \operatorname{sh} \mu y + \mu y \operatorname{ch} \mu y], \\
\mu \tau(\mu, y) &= \mu A(\mu) \operatorname{sh} \mu y + \mu B(\mu) \operatorname{ch} \mu y + C(\mu) [2(1 - \nu) \operatorname{sh} \mu y + \mu y \operatorname{ch} \mu y] - \\
&\quad - D(\mu) [2(1 - \nu) \operatorname{ch} \mu y + \mu y \operatorname{sh} \mu y]. \tag{7}
\end{aligned}$$

Увівши функцію нормальних контактних напружень

$$p(x) = (2G)^{-1} \sigma_y \Big|_{y=h}, \quad 0 < x < \ell, \tag{8}$$

та її трансформанту Фур'є

$$\tilde{p}(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\ell} p(r) e^{i\mu r} dr, \tag{9}$$

з крайових умов (2)–(4) одержимо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sigma(\mu, h) = \tilde{p}(\mu), \quad \tau(\mu, h) = -i\mu_0 \tilde{p}(\mu), \quad u(\mu, -h) = 0, \quad v(\mu, -h) = 0 \tag{10}$$

для визначення  $A(\mu)$ ,  $B(\mu)$ ,  $C(\mu)$ ,  $D(\mu)$ .

Після відповідних перетворень отримаємо такий вираз для нормальних переміщень верхньої межі смуги:

$$u_y \Big|_{y=h} = 2h \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(2\mu h) \tilde{p}(\mu) e^{-i\mu x} d\mu, \tag{11}$$

$$\mathcal{K}(z) = \frac{\lambda(z)}{z\Delta(z)}, \quad \Delta(z) = (3 - 4\nu)(\operatorname{ch} 2z - 1) + 2z^2 + 8(1 - \nu)^2,$$

$$\lambda(z) = 2(1 - \nu) [(3 - 4\nu) \operatorname{sh} 2z - 2z] + 2i\mu_0 [(3 - 4\nu)(1 - 2\nu) \operatorname{sh}^2 z - z^2].$$

Підставимо вираз (11) у крайову умову (1). Враховуючи вираз (9) для щільності  $\tilde{p}(\mu)$  і виконуючи заміни

$$x = 2h\xi, \quad r = 2h\eta, \quad a = \ell/(2h), \tag{12}$$

для нової невідомої функції

$$\varphi(\xi) = -\sqrt{2\pi} 2h\delta^{-1} p(2h\xi), \quad 0 < \xi < a, \tag{13}$$

отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_0^a k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = \sqrt{2\pi} [1 - \delta^{-1} f(2h\xi)], \quad 0 \leq \xi \leq a, \tag{14}$$

$$k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau.$$

**Розв'язування інтегрального рівняння.** Поклавши  $\varphi(\xi) = 0$ , якщо  $\xi < 0$  і  $\xi > a$ , розповсюдимо інтегральне рівняння (14) на всю числову вісь таким чином:

$$\int_0^a k(\xi - \eta)\varphi(\eta) d\eta - \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi \leq a, \\ \int_0^a k(\xi - \eta)\varphi(\eta) d\eta, & \xi < 0, \quad \xi > a \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{2\pi} [1 - \delta^{-1}f(2h\xi)], & 0 \leq \xi \leq a, \\ 0, & \xi < 0, \quad \xi > a. \end{cases} \quad (15)$$

До рівняння (15) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є, тобто домножимо його на  $(2\pi)^{-1/2} e^{iz\xi}$  і проінтегруємо за  $\xi$  від 0 до  $\infty$ . Увівши невідомі функції комплексної змінної

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi, & \Phi^-(z) &= e^{-iza} \Phi^+(z), \\ \Psi^+(z) &= -\frac{e^{-iza}}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{iz\xi} d\xi \int_0^a k(\xi - \eta)\varphi(\eta) d\eta, \\ \Psi^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \int_0^a k(\xi - \eta)\varphi(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (16)$$

аналітичні відповідно у верхній ( $\text{Im } z > c^+$ ,  $c^+ < 0$ ) і нижній ( $\text{Im } z < c^-$ ,  $c^- > 0$ ) півплощинах комплексної площини, і застосовуючи теорему про згортку для інтегрального перетворення Фур'є, зведемо інтегральне рівняння до системи функціональних рівнянь Вінера – Гопфа [8]

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z)\Phi^+(z) + e^{iza}\Psi^+(z) - \Psi^-(z) &= F^+(z), \\ \Phi^+(z) &= e^{iza}\Phi^-(z), & c^+ < \text{Im } z < c^-, \end{aligned} \quad (17)$$

де права частина  $F^+(z)$  є аналітичною функцією у верхній півплощині і має вигляд

$$\begin{aligned} F^+(z) &= \frac{\beta_1 e^{iza} + \beta_1'}{iz} + \frac{\beta_2 e^{iza} - 2\alpha_2 e^{izc} + \beta_2'}{(iz)^2} - 2\alpha_3 \frac{e^{iza} - 1}{(iz)^3}, \\ \beta_1 &= 1 - \alpha_1 a - \alpha_2(a - c) - \alpha_3(a - c)^2, & \beta_1' &= \alpha_2 c + \alpha_3 c^2 - 1, \\ \beta_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3(a - c), & \beta_2' &= \alpha_2 - \alpha_1 + 2\alpha_3 c, & c &= \ell_1/(2h). \end{aligned} \quad (18)$$

Для розв'язання системи функціональних рівнянь (17) зведемо її спочатку до нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь. Факторизуємо коефіцієнт  $\mathcal{K}(z)$ , який є мероморфною функцією і визначається виразами з (11), тобто подамо його у вигляді

$$\mathcal{K}(z) = \alpha \mathcal{K}^+(z)\mathcal{K}^-(z), \quad \alpha = \mathcal{K}(0) = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}, \quad (19)$$

де  $\mathcal{K}^+(z)$  і  $\mathcal{K}^-(z)$  – функції, які не перетворюються в нуль і аналітичні в півплощинах  $\text{Im } z > c^+$  і  $\text{Im } z < c^-$  відповідно. Факторизацію коефіцієнта  $\mathcal{K}(z)$  здійснюємо у вигляді нескінченних добутків:

$$\mathcal{K}^+(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{\zeta_n'}\right) \left(1 - \frac{iz}{s_n}\right)^{-1}, \quad \mathcal{K}^-(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{\zeta_n}\right) \left(1 + \frac{iz}{s_n}\right)^{-1}, \quad (20)$$

де  $\zeta_n$ ,  $\zeta_n'$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , – корені рівняння  $\lambda(is) = 0$  з півплощин  $\text{Re } s > 0$ ,  $\text{Re } s < 0$  відповідно;  $s_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , – корені рівняння  $\Delta(is) = 0$  з півплощини  $\text{Re } s > 0$ .

На підставі виконаної факторизації систему функціональних рівнянь (17) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
& \alpha \mathcal{K}^+(z) \Phi^+(z) + \left\{ \frac{1}{\mathcal{K}^-(z)} \left[ e^{iza} \left( \Psi^+(z) - \frac{\beta_1}{iz} - \frac{\beta_2}{(iz)^2} + \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{2\alpha_2}{(iz)^2} e^{izc} \right] - \frac{a_1}{iz} - \frac{a'_1}{(iz)^2} - \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} \right\} = \frac{1}{\mathcal{K}^-(z)} \left( \Psi^-(z) + \frac{\beta'_1}{iz} + \frac{\beta'_2}{(iz)^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} \right) - \frac{a_1}{iz} - \frac{a'_1}{(iz)^2} - \frac{2\alpha_3}{(iz)^3}, \\
& \frac{1}{\mathcal{K}^+(z)} \left( \Psi^+(z) - \frac{\beta_1}{iz} - \frac{\beta_2}{(iz)^2} + \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} \right) + \frac{a_2}{iz} + \frac{a'_2}{(iz)^2} - \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} = \\
& = -\alpha \mathcal{K}^-(z) \Phi^-(z) + \left\{ \frac{1}{\mathcal{K}^+(z)} \left[ e^{-iza} \left( \Psi^-(z) + \frac{\beta'_1}{iz} + \frac{\beta'_2}{(iz)^2} + \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} \right) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{2\alpha_2}{(iz)^2} e^{-iz(a-c)} \right] + \frac{a_2}{iz} + \frac{a'_2}{(iz)^2} - \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} \right\}. \tag{21}
\end{aligned}$$

Обидві частини кожного з рівнянь (21) аналітичні у смугі  $c^+ < \text{Im } z < c^-$  за рахунок знищення трикратного полюса у точці  $z = 0$ . При цьому введені коефіцієнти  $a_1, a'_1, a_2, a'_2$  визначаються так:

$$\begin{aligned}
& a_1 = \beta'_1 + \beta'_2 b_1 + 2\alpha_3 b'_1, \quad a'_1 = \beta'_2 + 2\alpha_3 b_1, \\
& a_2 = \beta_1 + \beta_2 b_2 - 2\alpha_3 b'_2, \quad a'_2 = \beta_2 - 2\alpha_3 b_2; \\
& \frac{1}{\mathcal{K}^-(z)} = 1 + b_1 iz + b'_1 (iz)^2 + b''_1 (iz)^3 + O((iz)^4), \\
& \frac{1}{\mathcal{K}^+(z)} = 1 + b_2 iz + b'_2 (iz)^2 + b''_2 (iz)^3 + O((iz)^4), \quad z \rightarrow 0; \\
& b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} t_n, \quad b_2 = -\sum_{n=1}^{\infty} t'_n, \quad t_n = \frac{1}{s_n} - \frac{1}{\zeta_n}, \quad t'_n = \frac{1}{s_n} + \frac{1}{\zeta'_n}, \quad n = 1, 2, \dots, \\
& b'_1 = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \left( \sum_{m=n+1}^{\infty} t_m - \frac{1}{\zeta_n} \right), \quad b''_1 = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \left[ \sum_{m=n+1}^{\infty} t_m \left( \sum_{k=m+1}^{\infty} t_k - \frac{1}{\zeta_m} - \frac{1}{\zeta_n} \right) + \frac{1}{\zeta_n^2} \right], \\
& b'_2 = \sum_{n=1}^{\infty} t'_n \left( \sum_{m=n+1}^{\infty} t'_m + \frac{1}{\zeta'_n} \right), \\
& b''_2 = -\sum_{n=1}^{\infty} t'_n \left[ \sum_{m=n+1}^{\infty} t'_m \left( \sum_{k=m+1}^{\infty} t'_k + \frac{1}{\zeta'_m} + \frac{1}{\zeta'_n} \right) + \frac{1}{\zeta_n^2} \right]. \tag{22}
\end{aligned}$$

Окрім виразів, відокремлених фігурними дужками, ліві частини рівнянь (21) є аналітичними функціями у верхній, а праві частини – у нижній півплощинах. Згадані вирази факторизуємо у різницю функцій, аналітичних у півплощинах  $\text{Im } z > c^+, \text{Im } z < c^-$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mathcal{K}^-(z)} \left[ e^{iza} \left( \Psi^+(z) - \frac{\beta_1}{iz} - \frac{\beta_2}{(iz)^2} + \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} \right) + \frac{2\alpha_2}{(iz)^2} e^{izc} \right] - \\
& \quad - \frac{a_1}{iz} - \frac{a'_1}{(iz)^2} - \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} = \chi_1^+(z) - \chi_1^-(z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathcal{K}^+(z)} \left[ e^{-iza} \left( \Psi^-(z) + \frac{\beta'_1}{iz} + \frac{\beta'_2}{(iz)^2} + \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} \right) - \frac{2\alpha_2}{(iz)^2} e^{-iz(a-c)} \right] + \\ & + \frac{a_2}{iz} + \frac{a'_2}{(iz)^2} - \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} = \chi_2^+(z) - \chi_2^-(z). \end{aligned} \quad (23)$$

Подавши функції  $\chi_{1,2}^\pm(z)$  у вигляді інтегралів типу Коші вздовж дійсної осі і застосувавши до цих інтегралів теорію лишків, отримаємо такі вирази:

$$\begin{aligned} \chi_1^-(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+}{\zeta_k + iz} \left[ \left( \Psi^+(i\zeta_k) + \frac{\beta_1}{\zeta_k} - \frac{\beta_2}{\zeta_k^2} - \frac{2\alpha_3}{\zeta_k^3} \right) e^{-\zeta_k a} + \frac{2\alpha_2}{\zeta_k^2} e^{-\zeta_k c} \right], \\ \chi_2^+(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^-}{\zeta'_k + iz} \left[ \left( \Psi^-(i\zeta'_k) - \frac{\beta'_1}{\zeta'_k} + \frac{\beta'_2}{\zeta'^2_k} - \frac{2\alpha_3}{\zeta'^3_k} \right) e^{\zeta'_k a} - \frac{2\alpha_2}{\zeta'^2_k} e^{\zeta'_k(a-c)} \right], \\ \alpha_k^+ &= \frac{\alpha \zeta_k \Delta(i\zeta_k)}{\lambda'(i\zeta_k)} \mathcal{K}^+(i\zeta_k), \quad \alpha_k^- = -\frac{\alpha \zeta'_k \Delta(i\zeta'_k)}{\lambda'(i\zeta'_k)} \mathcal{K}^-(i\zeta'_k), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Після виконаних факторизацій система функціональних рівнянь набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \alpha \mathcal{K}^+(z) \Phi^+(z) + \chi_1^+(z) = \\ & = \frac{1}{\mathcal{K}^-(z)} \left( \Psi^-(z) + \frac{\beta'_1}{iz} + \frac{\beta'_2}{(iz)^2} + \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} \right) - \frac{a_1}{iz} - \frac{a'_1}{(iz)^2} - \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} + \chi_1^-(z), \\ & \frac{1}{\mathcal{K}^+(z)} \left( \Psi^+(z) - \frac{\beta_1}{iz} - \frac{\beta_2}{(iz)^2} + \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} \right) + \frac{a_2}{iz} + \frac{a'_2}{(iz)^2} - \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} - \chi_2^+(z) = \\ & = -\alpha \mathcal{K}^-(z) \Phi^-(z) - \chi_2^-(z). \end{aligned} \quad (25)$$

Ліві частини рівнянь (25) аналітичні у верхній півплощині, а праві – у нижній. Тобто ліва та права частини кожного рівняння (25) аналітично продовжують одна другу на всю комплексну площину і представляють собою цілу функцію, яку можна визначити з умов на нескінченності.

Використовуючи асимптотику коренів рівнянь  $\lambda(is) = 0$ ,  $\Delta(is) = 0$  з першого та другого квадрантів

$$\begin{aligned} \zeta_n^+ &= \pi(n-1/4) + i \ln(qn) + o(1), \quad \zeta_n'^+ = -\pi(n+1/4) + i \ln(qn) + o(1), \quad \mu_0 \neq 0, \\ \zeta_n^+ &= -\bar{\zeta}_n'^+ = \pi(n+1/4) + \frac{i}{2} \ln \frac{4\pi n}{3-4\nu} + o(1), \quad \mu_0 = 0, \\ s_n^+ &= \pi n + i \ln \frac{2\pi n}{\sqrt{3-4\nu}} + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$$q = 2\pi \sqrt{\mu_0 \frac{1}{(3-4\nu)[2(1-\nu) - i\mu_0(1-2\nu)]}}, \quad (26)$$

і результати роботи [6], знаходимо поведінку на нескінченності нескінченних добутків для функцій  $\mathcal{K}^+(z)$ ,  $\mathcal{K}^-(z)$  з (20), яка має такий вигляд:

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}^+(z) \sim A_1 (-iz)^{-\rho}, \quad \mathcal{K}^-(z) \sim A_2 (iz)^{\rho-1}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad \rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\mu_0(1-2\nu)}{2(1-\nu)}, \\ & A_1 = \pi^\rho e^{-C\rho} \frac{s_1}{-\zeta'_1} \prod_{n=2}^{\infty} \frac{s_n}{-\zeta'_n} e^{\frac{\rho}{2[(n-1)/2]}}, \quad A_2 = \frac{\sqrt{4(1-\nu)^2 + \mu_0^2(1-2\nu)^2}}{\alpha A_1}, \end{aligned} \quad (27)$$

де  $C = 0.57721566\dots$  – стала Ейлера – Маскероні;  $[x]$  – ціла частина числа  $x$ . У випадку гладкого контакту ( $\mu_0 = 0$ ) маємо

$$\rho = 1/2, \quad A_1 = A_2 = \sqrt{2}(1 - \nu)/\sqrt{1 - 2\nu}, \quad \mathcal{K}^-(z) \equiv \mathcal{K}^+(-z).$$

Оскільки функції  $\Phi^+(z)$ ,  $\Phi^-(z)$ ,  $\chi_1^+(z)$ ,  $\chi_2^-(z)$  зникають на нескінченності, то на підставі асимптотичних формул (27) робимо висновок, що обидві частини кожного рівняння (25) тотожно дорівнюють нулеві. Таким чином, знаходимо

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= -\frac{\chi_1^+(z)}{x\mathcal{K}^+(z)}, & \Phi^-(z) &= -\frac{\chi_2^-(z)}{x\mathcal{K}^-(z)}, \\ \Psi^+(z) &= \mathcal{K}^+(z) \left( \chi_2^+(z) - \frac{a_2}{iz} - \frac{a_2'}{(iz)^2} + \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} \right) + \frac{\beta_1}{iz} + \frac{\beta_2}{(iz)^2} - \frac{2\alpha_3}{(iz)^3}, \\ \Psi^-(z) &= -\mathcal{K}^-(z) \left( \chi_1^-(z) - \frac{a_1}{iz} - \frac{a_1'}{(iz)^2} - \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} \right) - \frac{\beta_1'}{iz} - \frac{\beta_2'}{(iz)^2} - \frac{2\alpha_3}{(iz)^3}. \end{aligned} \quad (28)$$

Розв'язок (28) системи функціональних рівнянь (17) виражається через невідомі значення  $\Psi^+(i\zeta_k)$ ,  $\Psi^-(i\zeta'_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , для знаходження яких покладемо у третій і четвертій із формул (28) відповідно  $z = i\zeta_n$  і  $z = i\zeta'_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \Psi^+(i\zeta_n) &= \mathcal{K}^+(i\zeta_n) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^-}{\zeta'_k - \zeta_n} \left[ \left( \Psi^-(i\zeta'_k) - \frac{\beta_1'}{\zeta'_k} + \frac{\beta_2'}{\zeta_k'^2} - \frac{2\alpha_3}{\zeta_k'^3} \right) e^{\zeta_k' a} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2\alpha_2}{\zeta_k'^2} e^{\zeta_k'(a-c)} \right] + \frac{a_2}{\zeta_n} - \frac{a_2'}{\zeta_n^2} - \frac{2\alpha_3}{\zeta_n^3} \right\} - \frac{\beta_1}{\zeta_n} + \frac{\beta_2}{\zeta_n^2} + \frac{2\alpha_3}{\zeta_n^3}, \\ \Psi^-(i\zeta'_n) &= -\mathcal{K}^-(i\zeta'_n) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+}{\zeta_k - \zeta'_n} \left[ \left( \Psi^+(i\zeta_k) + \frac{\beta_1}{\zeta_k} - \frac{\beta_2}{\zeta_k^2} - \frac{2\alpha_3}{\zeta_k^3} \right) e^{-\zeta_k a} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\alpha_2}{\zeta_k^2} e^{-\zeta_k c} \right] + \frac{a_1}{\zeta'_n} - \frac{a_1'}{\zeta_n'^2} + \frac{2\alpha_3}{\zeta_n'^3} \right\} + \frac{\beta_1'}{\zeta'_n} - \frac{\beta_2'}{\zeta_n'^2} + \frac{2\alpha_3}{\zeta_n'^3}, \\ &\quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (29)$$

З огляду на асимптотичну поведінку коренів  $\zeta_k \sim -\zeta'_k \sim \pi k/2$ ,  $k \rightarrow \infty$ , введемо у систему рівнянь (29) малий параметр

$$\lambda = e^{-\pi a/2} = e^{-\pi \ell/(4\hbar)}, \quad 0 < \lambda < 1. \quad (30)$$

Позначивши

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_k^+ &= \alpha_k^+ e^{-(\zeta_k - \pi k/2)a}, & \tilde{\alpha}_k^- &= \alpha_k^- e^{(\zeta_k' + \pi k/2)a}, \\ \beta_n^+ &= \mathcal{K}^+(i\zeta_n), & \beta_n^- &= -\mathcal{K}^-(i\zeta'_n), \\ f_n^+ &= \beta_n^+ \left( \frac{a_2}{\zeta_n} - \frac{a_2'}{\zeta_n^2} - \frac{2\alpha_3}{\zeta_n^3} - 2\alpha_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^-}{\zeta_k'^2 (\zeta_k' - \zeta_n)} e^{\zeta_k'(a-c)} \right), \\ f_n^- &= \beta_n^- \left( \frac{a_1}{\zeta'_n} - \frac{a_1'}{\zeta_n'^2} + \frac{2\alpha_3}{\zeta_n'^3} + 2\alpha_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+}{\zeta_k^2 (\zeta_k - \zeta'_n)} e^{-\zeta_k c} \right), \\ z_k^+ &= \Psi^+(i\zeta_k) + \frac{\beta_1}{\zeta_k} - \frac{\beta_2}{\zeta_k^2} - \frac{2\alpha_3}{\zeta_k^3}, & z_k^- &= \Psi^-(i\zeta'_k) - \frac{\beta_1'}{\zeta'_k} + \frac{\beta_2'}{\zeta_k'^2} - \frac{2\alpha_3}{\zeta_k'^3}, \\ && & k, n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (31)$$

з (29) отримуємо нескінченну систему алгебричних рівнянь відносно невідомих  $z_k^\pm$ ,  $k = 1, 2, \dots$ :

$$z_n^+ - \beta_n^+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{\zeta_k' - \zeta_n} z_k^- \lambda^k = f_n^+, \quad z_n^- - \beta_n^- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{\zeta_k - \zeta_n'} z_k^+ \lambda^k = f_n^-,$$

$$n = 1, 2, \dots \quad (32)$$

За відсутності тертя ( $\mu_0 = 0$ ) функція  $\lambda(z)$  із (11) є непарною:  $\lambda(-z) \equiv -\lambda(z)$ , і тому корені рівняння  $\lambda(is) = 0$  зв'язані рівністю  $\zeta_n' = -\zeta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Тоді  $\mathcal{K}^-(-z) \equiv \mathcal{K}^+(z)$ ,  $\alpha_k^- = \alpha_k^+$ ,  $\tilde{\alpha}_k^- = \tilde{\alpha}_k^+$ ,  $\beta_k^- = -\beta_k^+$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Крім того, якщо штамп симетричний, то виконуються співвідношення  $p(x) \equiv p(\ell - x)$ ,  $\varphi(\xi) \equiv \varphi(a - \xi)$ ,  $\Phi^-(-z) \equiv \Phi^+(z)$ ,  $\Psi^-(-z) \equiv -\Psi^+(z)$ ,  $\chi_2^+(-z) \equiv \chi_1^-(z)$ ,  $\chi_2^-(-z) \equiv \chi_1^+(z)$ ,  $f_n^- = -f_n^+$ ,  $z_n^- = -z_n^+$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Таким чином, у випадку гладкого контакту симетричного штампа зі смугою система рівнянь (32) спрощується: у ній залишається тільки перша група рівнянь з правими частинами  $f_n^+$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , і невідомими  $z_k^+ = -z_k^-$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Друга група рівнянь у (32) з правими частинами  $f_n^-$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , співпадає з першою.

Розв'язок системи рівнянь (32) подамо у вигляді

$$z_k^{\pm} = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_{km}^{\pm} \lambda^m, \quad k = 1, 2, \dots \quad (33)$$

Після підстановки розвинень (33) у рівняння (32) знаходимо, що

$$\xi_{n0}^{\pm} = f_n^{\pm}, \quad (34)$$

та отримуємо рекурентні співвідношення

$$\xi_{nm}^+ = \beta_n^+ \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{\zeta_k' - \zeta_n} \xi_{k,m-k}^-, \quad \xi_{nm}^- = \beta_n^- \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{\zeta_k - \zeta_n'} \xi_{k,m-k}^+ \quad (35)$$

для визначення коефіцієнтів  $\xi_{nm}^{\pm}$ ,  $n, m = 1, 2, \dots$ . У випадку гладкого контакту для симетричного штампа маємо

$$\xi_{nm}^+ = \beta_n^+ \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{\zeta_k + \zeta_n} \xi_{k,m-k}^+, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (36)$$

Якщо кінцеві точки  $x = 0$ ,  $x = \ell$  області контакту не є кутовими точками поверхні штампа (обидві точки для клиноподібного та параболічного штампів, точка  $x = \ell$  для похилого штампа при неповному контакті його основи), то в цих точках контактні напруження повинні дорівнювати нулеві. Проте згідно з першою асимптотичною формулою (27) на підставі перших із рівностей (28), (16) контактні напруження (8), (13) мають на кінцях області контакту степеневу особливість. Тому у випадку клиноподібного або параболічного штампів необхідно вимагати виконання умов обмеженості (перетворення у нуль) контактних напружень у точках  $x = 0$ ,  $x = \ell$ :

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} iz \chi_1^+(z) = 0, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} iz \chi_2^-(z) = 0. \quad (37)$$

На підставі формул (23), (24), (31) умови (37) запишемо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k^+ z_k^+ \lambda^k = a_1 - 2\alpha_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+}{\zeta_k^2} e^{-\zeta_k c},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k^- z_k^- \lambda^k = a_2 + 2\alpha_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^-}{\zeta_k'^2} e^{\zeta_k'(a-c)}. \quad (38)$$

У випадку похилого штампа при неповному контакті його підшви необхідно виконати тільки другу з умов (37) або (38).



Перетворимо умову рівноваги (5). Маємо

$$\int_0^{\ell} \frac{\sigma_y}{2G} \Big|_{y=h} dx = -\frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \varphi(t) dt = -\delta \Phi^+(0),$$

$$\Phi^+(0) = -\frac{1}{\alpha} [\chi_1^-(0) + \chi_2^-(0) + \gamma_1 + \gamma_2],$$

$$\gamma_1 = \left\{ \frac{1}{\mathcal{K}^-(z)} \left[ e^{iza} \left( \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} - \frac{\beta_2}{(iz)^2} - \frac{\beta_1}{iz} \right) + \frac{2\alpha_2}{(iz)^2} e^{izc} \right] - \frac{a_1}{iz} - \frac{a'_1}{(iz)^2} - \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} \right\} \Big|_{z=0} =$$

$$= b_1(\alpha_3 a^2 - \beta_2 a - \beta_1 + 2\alpha_2 c) + b'_1(2\alpha_3 a - \beta_2 + 2\alpha_2) +$$

$$+ 2b''_1 \alpha_3 + \frac{1}{3} \alpha_3 a^3 - \frac{1}{2} \beta_2 a^2 - \beta_1 a + \alpha_2 c^2,$$

$$\gamma_2 = \left[ \mathcal{K}^+(z) \left( \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} - \frac{a'_2}{(iz)^2} - \frac{a_2}{iz} \right) + \frac{\beta_1}{iz} + \frac{\beta_2}{(iz)^2} - \frac{2\alpha_3}{(iz)^3} \right] \Big|_{z=0} =$$

$$= a_2 b_2 - a'_2 (b_2^2 - b'_2) - 2\alpha_3 (b_2^3 - 2b_2 b'_2 + b''_2). \quad (39)$$

Отже, за допомогою виразів (39), (24) з умови рівноваги (5) знаходимо

$$\delta = -\frac{\alpha P}{2G\gamma},$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{\zeta_k} z_k^+ + \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{\zeta_k'} z_k^- \right) \lambda^k + 2\alpha_2 \left( \frac{\alpha_k^+}{\zeta_k^3} e^{-\zeta_k c} - \frac{\alpha_k^-}{\zeta_k'^3} e^{\zeta_k (a-c)} \right) \right]. \quad (40)$$

У випадку штампа з прямолінійною горизонтальною основою після визначення  $z_k^{\pm}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , із системи рівнянь (32) осадку  $\delta$  знаходимо за формулою (40). Додаткові умови (38) виключаються.

У випадках клиноподібного та параболічного штампів із нескінченної системи алгебричних рівнянь (32) з приєднанням до неї суми додаткових умов (38) при заданому значенні  $a = \ell/(2h)$  знаходимо значення  $c = \ell_1/(2h)$  і  $z_k^{\pm}/\alpha_j$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $j = 2, 3$ . Із різниці рівностей (38) визначаємо сталі  $\alpha_j$ , а, отже, і відносну осадку  $\delta/(2h)$ , а з рівності (40) – величину безрозмірної сили  $P/(Gh\alpha_j)$ ,  $j = 2, 3$ .

Для штампа з похилою основою при повному контакті при заданому значенні відносної осадки  $\delta/(2h)$ , тобто  $\alpha_1$ , із системи рівнянь (32) знаходимо значення  $z_k^{\pm}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Рівність (40) служить для визначення сили  $P$ .

Для штампа з похилою основою при неповному контакті при заданому значенні  $a$  із системи рівнянь (32) і другої з рівностей (38) (перша з рівностей (38) виключається) знаходимо значення  $z_k^{\pm}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , і  $\alpha_1$ , а, значить, і відносну осадку  $\delta/(2h)$ . Значення безрозмірної сили  $P/(Gh \operatorname{tg} \varepsilon)$  знаходимо з рівності (40).

Розв'язок інтегрального рівняння (14) знаходимо оберненням першого зі співвідношень (16) з урахуванням рівностей (28), (23):

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(t) e^{-it\xi} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_1^+(t)}{\alpha \mathcal{K}^+(t)} e^{-it\xi} dt =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{K}^-(t)}{\mathcal{K}(t)} \left( \chi_1^-(t) - \frac{a_1}{it} - \frac{a'_1}{(it)^2} - \frac{2\alpha_3}{(it)^3} \right) e^{-it\xi} dt - \frac{2\alpha_2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(c-\xi)}}{t^2 \mathcal{K}(t)} dt -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{K}^+(t)}{\mathcal{K}(t)} \left( \chi_2^+(t) - \frac{a_2}{it} - \frac{a'_2}{(it)^2} + \frac{2\alpha_3}{(it)^3} \right) e^{it(a-\xi)} dt, \quad 0 < \xi < a. \quad (41)$$

**Контактні напруження і переміщення вільної межі смуги.** Обчисливши інтеграли в (41) за теорією лишків і використовуючи заміни (8), (13), отримуємо контактні напруження

$$\begin{aligned} \frac{2h}{\delta} \frac{\sigma_y}{2G} \Big|_{y=h} &= \frac{1}{x} [\alpha_3 (\xi - b_1 - b_2 - c)^2 + \alpha_1 (\xi - b_1 - b_2) - 1 + \\ &+ \alpha_3 (2b_1' + 2b_2' - b_1^2 - b_2^2) - \alpha_2 (b_1 + b_2 + c - \xi) \operatorname{sign}(\xi - c)] - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\zeta_k \Delta(i\zeta_k)}{\lambda'(i\zeta_k)} z_k^+ e^{-\zeta_k(a-\xi)} + \frac{\zeta_k' \Delta(i\zeta_k')}{\lambda'(i\zeta_k')} z_k^- e^{\zeta_k' \xi} \right) + \\ &+ 2\alpha_2 \operatorname{sign}(\xi - c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(i\zeta_k^*)}{\zeta_k^* \lambda'(i\zeta_k^*)} e^{\zeta_k^* (\xi - c)}, \quad 0 < x < \ell, \\ \xi = \frac{x}{2h}, \quad \zeta_k^* &= \begin{cases} \zeta_k, & \xi < c, \\ \zeta_k', & \xi > c, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (42)$$

Для штамп з прямолінійною горизонтальною або похилою основою (при повному контакті підшви штамп з пружною смугою) напруження (42) на краях штамп необмежені. Їх асимптотичну поведінку отримуємо з використанням леми Ватсона [11] для першого інтеграла з (16):

$$\begin{aligned} \sigma_y \Big|_{y=h} &\sim -\frac{\omega_1 G \delta}{x A_1 \Gamma(1-\rho) h \xi^\rho}, \quad \xi = \frac{x}{2h}, \quad x \rightarrow +0, \\ \sigma_y \Big|_{y=h} &\sim \frac{\omega_2 G \delta}{x A_2 \Gamma(\rho) h (a-\xi)^\rho}, \quad \xi = \frac{x}{2h}, \quad x \rightarrow \ell - 0, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\omega_1 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} iz \chi_1^+(z) = -a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k^+ z_k^+ \lambda^k,$$

$$\omega_2 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} iz \chi_2^-(z) = -a_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k^- z_k^- \lambda^k.$$

У випадку гладкого контакту для штамп з прямолінійною основою

$$\sigma_y \Big|_{y=h} \sim -\frac{\omega_1 G \delta}{h \sqrt{2\pi(1-2\nu)} \xi}, \quad \xi = \frac{x}{2h}, \quad x \rightarrow +0. \quad (44)$$

Контактні напруження також необмежені у вершині клиноподібного штамп. Їх асимптотична поведінка визначається передостаннім інтегралом із (41) і має вигляд

$$\frac{\sigma_y}{2G} \Big|_{y=h} \sim \frac{4(1-\nu)}{4(1-\nu)^2 + \mu_0^2(1-2\nu)^2} \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\pi} \ln |\ell_1 - x|, \quad x \rightarrow l_1. \quad (45)$$

Визначимо нормальні переміщення (11) вільної від навантажень межі смуги. Маємо

$$\begin{aligned} u_y \Big|_{y=h} &= -\frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(t) \Phi^+(t) e^{-it\xi} dt = \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}^-(t) \chi_1^+(t) e^{-it\xi} dt = \\ &= \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}^-(t) \left( \chi_1^-(t) - \frac{a_1}{it} - \frac{a_1'}{(it)^2} - \frac{2\alpha_3}{(it)^3} \right) e^{-it\xi} dt + \frac{\alpha_2 \delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(c-\xi)}}{t^2} dt + \\ &+ \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}^+(t) \left( \chi_2^+(t) - \frac{a_2}{it} - \frac{a_2'}{(it)^2} + \frac{2\alpha_3}{(it)^3} \right) e^{it(a-\xi)} dt. \end{aligned} \quad (46)$$

Після перетворень інтегралів за теорією лишків отримуємо

$$\begin{aligned}
 u_y|_{y=h} &= \\
 &= -\frac{\delta}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(-is_k)}{s_k \Delta'(is_k) \mathcal{K}^-(is_k)} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta'_m + s_k} \left( \tilde{\alpha}_m^- z_m^- \lambda^m - 2\alpha_2 \frac{\alpha_m^-}{\zeta_m'^2} e^{\zeta'_m(a-c)} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{a_2}{s_k} - \frac{a_2'}{s_k^2} + \frac{2\alpha_3}{s_k^3} \right] e^{s_k(a-\xi)}, \quad \xi = \frac{x}{2h}, \quad x > \ell, \\
 u_y|_{y=h} &= \\
 &= \frac{\delta}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(is_k)}{s_k \Delta'(is_k) \mathcal{K}^+(is_k)} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta'_m - s_k} \left( \tilde{\alpha}_m^+ z_m^+ \lambda^m + 2\alpha_2 \frac{\alpha_m^+}{\zeta_m'^2} e^{-\zeta'_m c} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a_1}{s_k} - \frac{a_1'}{s_k^2} + \frac{2\alpha_3}{s_k^3} \right] e^{s_k \xi}, \quad \xi = \frac{x}{2h}, \quad x < 0. \tag{47}
 \end{aligned}$$

Нормальні контактні напруження і нормальні переміщення вільної межі смуги обчислено для значень коефіцієнта Пуассона  $\nu = 1/3$  і коефіцієнта тертя  $\mu_0 = 0.0, 0.25$ . На рис. 3 (а – штамп з прямолінійною горизонтальною основою, б – штамп з похилою прямолінійною основою, в – клиноподібний штамп, г – параболічний штамп) зображено розподіл безрозмірних контактних напружень  $\bar{\sigma} = \frac{\ell}{P} \sigma_y|_{y=h}$ ,  $0 < x < \ell$ , а на рис. 4 (для штампів з горизонтальною прямолінійною основою) – розподіл безрозмірних нормальних переміщень  $\bar{u} = \frac{1}{\delta} u_y|_{y=h}$  вільної від навантажень межі смуги ( $x \leq 0, x \geq \ell$ ).

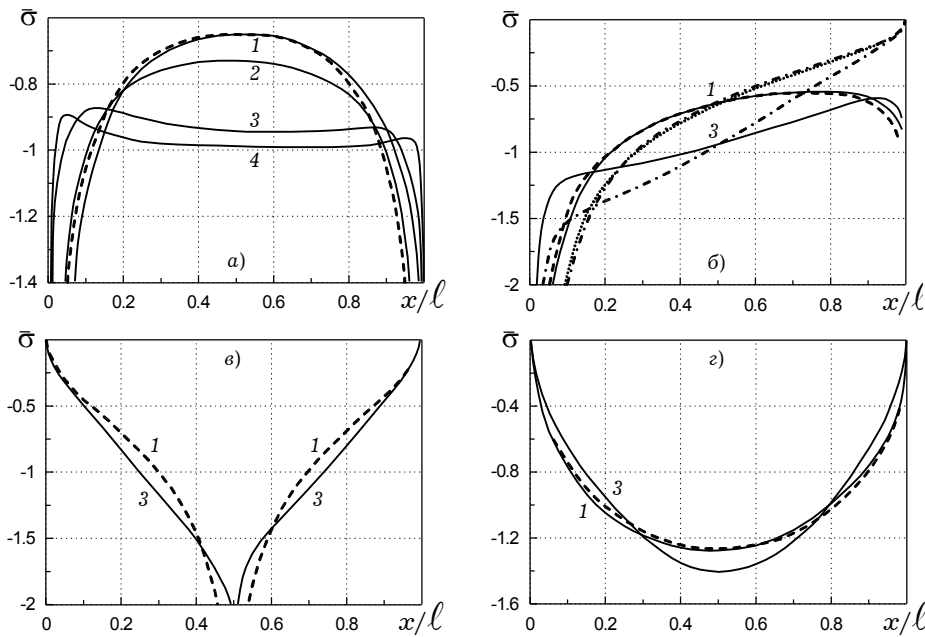


Рис. 3

Криві 1–4 відповідають відносним розмірам області контакту  $a = \ell/(2h) = 0.25, 1.0, 4.0, 10.0$ ; суцільні криві – фрикційному контакту ( $\mu_0 = 0.25$ ), пунктирні – гладкому контакту ( $\mu_0 = 0$ ). На рис. 3б суцільні криві 1, 3 і пунктирна крива 1 відносяться до випадку повного контакту похилого

штампа з пружною смугою, а штрих-пунктирні криві 1, 3 (для  $\mu_0 = 0.25$ ) та точкова крива 1 (для  $\mu_0 = 0$ ) – до випадку неповного контакту, коли значення нормальної сили  $P$  у два рази менше, ніж у випадку повного контакту. Для штампів з прямолінійною горизонтальною основою відносної ширини  $a = 0.25, 1.0, 4.0, 10.0$  нормалізована осадка  $\bar{\delta} = \delta G \ell / (Ph)$  відповідно дорівнює 0.235, 0.412, 0.481, 0.492; для параболічних штампів з відносним розміром області контакту  $a = 0.25, 4.0$  – відповідно  $\bar{\delta} = 0.287, 0.727$ ;  $\bar{P} = PR / (4Gh^2) = 0.037, 24.6$ ;  $c = \ell_1 / (2h) = 0.1288, 1.981$ .

Як видно на рис. 4, при вдавлюванні штампів у пружну смугу з жорстко закріпленою нижньою межею верхня, вільна від навантажень, межа смуги припіднімається, утворюючи пагорбки на відстані, що приблизно дорівнює ширині смуги від обох країв штампів. Окрім наведених на рис. 4 розподілів переміщень  $u_y|_{y=h}$  для штампів з прямолінійною горизонтальною основою, зазначена властивість переміщень вільної межі смуги спостерігається і для інших профілів штампів.

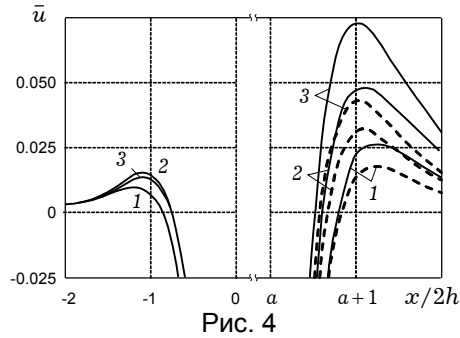


Рис. 4

У табл. 1 наведено значення максимальних відносних значень нормальних переміщень вільної межі смуги  $\bar{u}_1 = \max_{x>\ell} \bar{u}$ ,  $\bar{u}_2 = \max_{x<0} \bar{u}$  та їх відносні відстані  $\bar{d}_1 = (x_1 - \ell) / (2h)$ ,  $\bar{d}_2 = -x_2 / (2h)$  від країв штампів при дії на пружну смугу ( $\nu = 1/3$ ) штампів з прямолінійною горизонтальною основою як залежності від відносної ширини штампів  $a = \ell / (2h)$ . Значення в дужках відповідають гладкому контакту ( $\mu_0 = 0$ ), всі інші значення – ковзному контакту ( $\mu_0 = 0.25$ ).

Таблиця 1

$a$	0.1	0.25	1	4	10	15
$\bar{u}_1$	0.0191 (0.0130)	0.0266 (0.0181)	0.0492 (0.0318)	0.0727 (0.0424)	0.0752 (0.0433)	0.0752 (0.0433)
$\bar{d}_1$	1.30 (1.275)	1.25 (1.23)	1.09 (1.075)	1.005 (1.03)	1.005 (1.03)	1.00 (1.03)
$\bar{u}_2$	0.0071	0.0097	0.0145	0.0131	0.0129	0.0129
$\bar{d}_2$	1.26	1.205	1.08	1.07	1.07	1.07

1. Александров В. М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости // Прикл. математика и механика. – 1968. – **32**, № 4. – С. 672–683.
2. Александров В. М. Асимптотическое решение контактной задачи для тонкого упругого слоя // Прикл. математика и механика. – 1969. – **33**, № 1. – С. 61–73.
3. Александров В. М., Чебаков М. И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. – Москва: Физматлит, 2004. – 304 с.
4. Антипов Ю. А. Точное решение задачи о вдавливании кольцевого штампа в полупространство // Докл. АН УССР. – 1987. – № 7. – С. 29–33.
5. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
6. Зражевський Г. М., Острик В. І. Асимптотика канонічних добутоків // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 69–77.
7. Игнатенко М. М., Кириллов В. Х. О решении некоторых задач математической физики // Дифференц. уравнения. – 1969. – **5**, № 7. – С. 1296–1302.

8. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
9. Улитко А. Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости. – Киев: Академперіодика, 2002. – 342 с.
10. Улитко А. Ф., Острик В. И. Смешанная задача теории упругости для полосы на жестком основании // Тр. III Всерос конф. по теории упругости с междунар. участием. – Ростов-на-Дону: Новая книга, 2004. – С. 372–375.
11. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – Москва: Наука, 1987. – 544 с.

#### **СКОЛЬЗЯЩИЙ И ГЛАДКИЙ КОНТАКТ ШТАМПОВ РАЗНОГО ПРОФИЛЯ С УПРУГОЙ ПОЛОСОЙ**

*Рассмотрено контактное взаимодействие с учетом и без учета трения штампов разной формы (с прямолинейным горизонтальным и наклонным основанием, клиновидного и параболического штампа) с упругой полосой. Методом Винера – Хопфа получены точные аналитические решения соответствующих граничных задач.*

#### **SLIPPING AND SMOOTH CONTACT OF STAMPS OF VARIOUS PROFILE WITH ELASTIC STRIP**

*Contact interaction in the presence and in the absence of friction between stamps of various form (with rectilinear horizontal and inclined basis, wedge-shaped and parabolic stamp) and elastic strip is studied. Using the Wiener – Hopf method, the exact analytic solutions to the corresponding boundary-value problems is obtained.*

Ін-т прикл. фізики НАН України, Суми

Одержано  
02.03.06