УДК 539.3

В. Г. Карнаухов[1], В. І. Козлов[1], Т. В. Карнаухова[2]

УТОЧНЕНА ТЕРМОМЕХАНІЧНА МОДЕЛЬ КОМПОЗИТНИХ ОБОЛОНОК ТИПУ ТИМОШЕНКА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИМИ СЕНСОРАМИ ПРИ МОНОГАРМОНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

З використанням уточнених гіпотез типу Тимошенка та адекватних їм гіпотез відносно електричних польових величин побудовано термомеханічну модель тонкостінних оболонок з розподіленими трансверсально-ізотропними сенсорами з урахуванням дисипативного розігріву внаслідок гістерезисних втрат. Розглянуто різні типи електричних крайових умов, коли електроди на сенсорі коротко замкнуті та розімкнуті. Для цих типів електричних крайових умов одержано вирази для показників сенсорів. Якщо властивості матеріалу залежать від температури, дослідження впливу температури дисипативного розігріву на ці показники зводиться до розв'язування складної нелінійної системи диференціальних рівнянь. У протилежному разі задача зводиться до розв'язування задач механіки і теплопровідності з відомими джерелами тепла. При цьому розрахунок показників сенсора значно спрощується. В обох випадках при досягненні температурою дисипативного розігріву точки Кюрі сенсор перестає виконувати своє функціональне призначення і має місце специфічний тип теплового руйнування.

Вступ. Тонкостінні композитні оболонки знаходять широке застосування у багатьох галузях сучасної науки та техніки. Часто на них діють стаціонарні та нестаціонарні механічні й теплові навантаження, які можуть викликати високий рівень напружень. Для зменшення рівня власних коливань оболонок, суттєвого зниження амплітуд при вимушених коливаннях і зменшення напружень у зонах концентрації використовують різні методи демпфування. Найчастіше для цієї мети використовуються пасивні методи, коли в структуру оболонки вводяться включення з високими гістерезисними втратами. Основні результати досліджень з цих питань відображено в монографіях [7, 24, 27, 28, 33]. В останні роки почали інтенсивно розвиватися активні методи керування термомеханічним станом тонкостінних елементів, у тому числі і демпфування з використанням п'єзоактивних матеріалів – п'єзоелектричних, п'єзомагнітних і матеріалів з пам'яттю форми. Найчастіше для вказаної мети використовують п'єзоелектричні матеріали, які мають ряд переваг порівняно з іншими матеріалами. Останні досягнення з цих питань наведено в роботах [29–32, 34–40]. Існує два основних методи активного демпфування. Перший з них полягає у використанні п'єзоелектричних включень, які називаються актуаторами. При цьому головними питаннями при їх використанні є розрахунок характеристик актуаторів, їх оптимального розміщення у структурі оболонки, розрахунок різниці потенціалів, які необхідно підвести до актуаторів для компенсації механічного навантаження з метою зменшення амплітуди коливань. Критерієм ефективності роботи актуатора при його проектуванні є величина прогину при підведенні до актуатора одиничної різниці потенціалів: той актуатор вважається більш ефективним, який викликає більший прогин. Другий метод активного демпфування полягає у додатковому використанні ще одного типу п'єзоелектричного включення, який називають сенсором. Він дає інформацію про механічний стан оболонки. Ефективність роботи сенсора при його проектуванні оцінюється за величиною його показників – різниці потенціалу або струму при підведенні до нього сили одиничної інтенсивності: той сенсор більш ефективний, з якого знімається більша різниця потенціалів або більший струм. При використанні другого методу до актуатора підводиться різниця потенціалів, пропорційна різниці потенціалів сенсора, його першій або другій похідній. Тоді відповідно змінюються жорсткісні, дисипативні та інерційні характеристики оболонки, і таким чином досягається зменшення амплітуди вимушених коливань. Ефективність активного демпфування залежить від багатьох факторів: геометричних розмірів п'єзоактивних включень, їх розміщення в структурі оболонки, електромеханічних властивостей тощо. Через суттєву залежність властивостей багатьох пасивних (без п'єзоефекту) та активних матеріалів від температури великий вплив на ефективність демпфування мають теплові ефекти. Джерелом підвищення температури може бути як теплообмін із зовнішнім середовищем, так і дисипативний розігрів, викликаний гістерезисними втратами в матеріалах. Проте в літературі відсутні роботи з дослідження впливу дисипативного розігріву на ефективність роботи сенсорів, актуаторів та на ефективність активного демпфування за їх допомогою. Перші результати з цих питань містяться у статтях [10, 11, 14–20]. У них для моделювання електромеханічної поведінки тонкостінних елементів застосовувались гіпотези Кірхгофа – Лява та адекватні їм гіпотези відносно електричних польових величин. Як відомо, для дослідження механічного стану композитних елементів необхідно використовувати уточнені моделі, зокрема моделі типу Тимошенка. Останні досягнення з цих питань наведено в монографіях [1, 2, 4, 6, 26].

Таким чином, для оцінки впливу дисипативного розігріву на ефективність роботи п'єзоелектричних сенсорів і на ефективність демпфування коливань композитних оболонок за їх допомогою необхідно розробити уточнені моделі таких оболонок з розподіленими сенсорами та актуаторами. Ця стаття присвячена розробці уточненої моделі типу Тимошенка для тонкостінних композитних оболонок з розподіленими трансверсально-ізотропними сенсорами. Розглядаються два типи електричних крайових умов, які відповідають короткому замиканню розміщених на сенсорі електродів і розімкнутим електродам. Відмітимо, що описані результати можуть використовуватись не тільки для демпфування коливань, а й при розв'язуванні багатьох інших задач з використанням п'єзоелектричних сенсорів, зокрема, при експериментальному дослідженні напружено-деформованого стану тонкостінних композитних оболонок.

1. Основні гіпотези, які застосовуються для моделювання термомеханічного стану тонкостінних оболонок з розподіленими сенсорами. Нехай пластина складена по товщині з $\bar{N}$ пакетів п'єзоактивних трансверсально-ізотропних шарів з $\bar{n}_m$ шарів у кожному пакеті і $\tilde{N}$ пакетів пасивних шарів з $\tilde{n}_k$ шарів у кожному пакеті. Вважаємо, що пакети розділені нескінченно тонкими електродами, до яких може бути підведена різниця потенціалів. Між шарами мають місце ідеальні механічний, тепловий і електричний контакти. На оболонку діє гармонічне за часом механічне або електричне навантаження. Вважається, що пасивні та п'єзоактивні матеріали шарів виготовлено з в'язкопружних матеріалів, механічні й електричні властивості яких залежать від температури. З огляду на дисипацію енергії при моногармонічному навантаженні в оболонці має місце дисипативний розігрів. При досягненні температурою точки Кюрі п'єзоактивні шари втрачають п'єзоефект, фактично тоді вони не виконують свого функціонального призначення. Це явище можна назвати тепловим руйнуванням п'єзоелемента.

Для моделювання механічної поведінки пасивного та п'єзоактивного шарів використовується модель Тимошенка, коли тангенціальні складові вектора переміщень змінюються по товщині оболонки за лінійним законом, а для деформацій зсуву задається деякий закон. Пасивний шар може бути як металічним, так і діелектричним. Вважається, що п'єзоактивні шари поляризовані по товщині. Для них приймається гіпотеза, що тангенціальні складові вектора індукції набагато менші від нормальної складової. В результаті з рівняння електростатики матимемо, що нормальна складова індукції є сталою по товщині п'єзошару. При переході через електрод вона має розрив першого роду. Для рівняння енергії приймається припущення, що нормальна складова вектора теплового потоку змінюється по товщині за степеневим законом. Використовуючи закон Фур'є, знаходимо розподіл температури по товщині кожного шару.

2. Основні рівняння механіки та електростатики. Відповідно до вказаного зміщення змінюються по товщині оболонки за лінійним законом

$$u_1^z = u_1 + \varphi_1 z, \qquad v_1^z = v_1 + \varphi_{21} z, \qquad u_3^z = u_3 . \tag{1}$$

Тоді компоненти тензора деформацій визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11}^z = \varepsilon_1 + \varkappa_1 z, \qquad \varepsilon_{11}^z = \varepsilon_2 + \varkappa_2 z, \qquad \varepsilon_{12}^z = \varepsilon_{12} + \varkappa_{12} z ,\\
&\varepsilon_{12} = \omega_1 + \omega_2, \qquad \varkappa_{12} = \tau_1 + \tau_2 + \varkappa_1 \omega_2 + \varkappa_2 \omega_1 ,\\
&\varepsilon_{13}^z = \phi_1 + \theta_1, \qquad \varepsilon_{23}^z = \phi_2 + \theta_2 .
\end{aligned} \tag{2}$$

Вирази для всіх кінематичних характеристик через компоненти вектора переміщень u_i, $i = 1, 2, 3$, і зсуви ϕ_i наведено в монографіях [6, 26]. Відповідно до вищевказаного співвідношення (1), (2) доповнюються співвідношеннями

$$\sigma_{13} = f_1(z) \overset{0}{\sigma}_{13}, \qquad \sigma_{23} = f_1(z) \overset{0}{\sigma}_{23} . \tag{3}$$

Вирази для $\overset{0}{\sigma}_{13}$, $\overset{0}{\sigma}_{23}$ знаходяться з варіаційного принципу Рейснера або методом Бубнова – Гальоркіна з таких співвідношень:

$$\int\limits_{(\tilde h_k)} \left(\varepsilon_{i3}^z - \frac{f_1(z)}{G_{i3}(z)} \overset{0}{\sigma}_{i3} \right) f_1(z)\, dz = 0, \qquad i = 1, 2 . \tag{4}$$

Після інтегрування (4) по товщині кожного з пасивних пакетів знаходимо

$$\overset{0}{\sigma}_{i3} = \frac{I_1}{I_{2i}} \varepsilon_{i3} , \tag{5}$$

де

$$I_1 = \sum_{k=1}^{\tilde N} I_1^k, \quad I_{2i} = \sum_{k=1}^{\tilde N} I_{2i}^k, \quad I_1^k = \int\limits_{(\tilde h_k)} f_1(z)\, dz, \quad I_{2i}^k = \int\limits_{(\tilde h_k)} \frac{f_1^2(z)}{G_{i3}(z)} dz . \tag{6}$$

В результаті складові рівняння стану (зусилля, моменти, перерізувальні сили), які вносяться пакетами із пасивних ортотропних матеріалів у загальні рівняння стану, визначаються традиційними співвідношеннями [6, 26]:

$$\begin{aligned}
&\tilde T_1 = \tilde C_{11}\varepsilon_1 + \tilde C_{12}\varepsilon_2 + \tilde K_{11}\varkappa_1 + \tilde K_{12}\varkappa_2 ,\\
&\tilde T_2 = \tilde C_{12}\varepsilon_1 + \tilde C_{22}\varepsilon_2 + \tilde K_{12}\varkappa_1 + \tilde K_{22}\varkappa_2, \qquad \tilde S = \tilde C_{66}\varepsilon_{12} + \tilde K_{66}\varkappa_{12} ,\\
&\tilde M_1 = \tilde K_{11}\varepsilon_1 + \tilde K_{12}\varepsilon_2 + \tilde D_{11}\varkappa_1 + \tilde D_{12}\varkappa_2 ,\\
&\tilde M_2 = \tilde K_{12}\varepsilon_1 + \tilde K_{22}\varepsilon_2 + \tilde D_{12}\varkappa_1 + \tilde D_{22}\varkappa_2, \qquad \tilde H = \tilde K_{66}\varepsilon_{12} + \tilde D_{66}\varkappa_{12} ,\\
&\tilde Q_1 = \tilde G_{13}\varepsilon_{13}, \qquad \tilde Q_2 = \tilde G_{23}\varepsilon_{23}, \qquad \tilde G_{i3} = \frac{I_1^2}{I_{2i}} .
\end{aligned} \tag{7}$$

Для п'єзоактивного трансверсально-ізотропного шару після нехтування у визначальних рівняннях нормальною складовою тензора напружень σ_{33} і тангенціальними складовими вектора індукції спрощені визначальні рівняння набувають вигляду [5, 9, 12, 13]

$$\begin{aligned}
&\overset{k}{\sigma}_{11} = \overset{k}{B}_{11}(z)\,\varepsilon_{11}^z + \overset{k}{B}_{12}(z)\,\varepsilon_{22}^z - \overset{k}{\gamma}_{31}(z)\,\overset{k}{E}_3 ,\\
&\overset{k}{\sigma}_{22} = \overset{k}{B}_{12}(z)\,\varepsilon_{11}^z + \overset{k}{B}_{22}(z)\,\varepsilon_{22}^z - \overset{k}{\gamma}_{31}(z)\,\overset{k}{E}_3 ,\\
&\overset{k}{\sigma}_{12} = \overset{k}{B}_{66}(z)\,\varepsilon_{12}, \qquad \overset{k}{\sigma}_{13} = \overset{k}{B}_{13}(z)\,\varepsilon_{13}, \qquad \overset{k}{\sigma}_{23} = \overset{k}{B}_{23}(z)\,\varepsilon_{23} ,\\
&\overset{k}{D}_3 = \overset{k}{\gamma}_{33}(z)\,\overset{k}{E}_3 + \overset{k}{\gamma}_{31}(z)\,(\varepsilon_{11}^z + \varepsilon_{22}^z) .
\end{aligned} \tag{8}$$

Тут

$$\overset{k}{B}_{11}(z)=\overset{k}{B}_{22}(z)=\left\{\overset{k}{S}_{11}(z)\left[1-\overset{k}{\nu}{}^2(z)\right]\right\}^{-1},\qquad \overset{k}{B}_{12}(z)=\overset{k}{\nu}(z)\,\overset{k}{B}_{11}(z),$$

$$\overset{k}{B}_{66}(z)=\frac{1}{2}\left[1-\overset{k}{\nu}(z)\right]\overset{k}{B}_{11}(z),\qquad \overset{k}{B}_{13}=\overset{k}{B}_{23}=\left\{\overset{k}{S}_{44}-\overset{k}{d}{}_{15}^2\left(\overset{k}{\varepsilon}{}_{11}^T\right)^{-1}\right\}^{-1},$$

$$\overset{k}{\gamma}_{31}=\overset{k}{d}_{31}(z)\left\{\overset{k}{S}{}_{11}^E(z)\left[1-\overset{k}{\nu}{}^2(z)\right]\right\}^{-1},\qquad \overset{k}{\gamma}_{33}=\overset{k}{\varepsilon}{}_{33}^T\left[1-\overset{k}{k}{}_p^2(z)\right],$$

$$\overset{k}{k}{}_p^2=2\,\overset{k}{d}{}_{31}^2(z)\left\{\overset{k}{\varepsilon}{}_{33}^T(z)\,\overset{k}{S}{}_{11}^E\left[1-\overset{k}{\nu}(z)\right]\right\}^{-1}. \tag{9}$$

Як видно з (8), в подальшому рівняння стану для перерізувальних сил матимуть такий же вигляд, як і для пасивних шарів з модифікованими жорсткісними характеристиками. Тому їх наводити не будемо, а звернемо увагу лише на зусилля і моменти.

Потрібно мати на увазі, що відповідно до концепції комплексних характеристик при моногармонічному навантаженні коефіцієнти наведених вище визначальних рівнянь є комплексними й залежать у загальному випадку від частоти та температури [8, 9, 12, 13, 21, 22, 25].

Розглянемо випадок, коли п’єзоелектричний сенсорний шар коротко замкнутий.

Відповідно до вказаних вище гіпотез для кожного п’єзоактивного пакету

$$\overset{1}{D}_3=\overset{2}{D}_3=\ldots=\overset{\bar{n}_m}{D}_3=\overset{m}{C},\qquad m=1,2,\ldots,\bar{N}. \tag{10}$$

З останнього з рівнянь (8) матимемо

$$\overset{m}{C}\left(\overset{k}{\gamma}_{33}\right)^{-1}=\overset{k}{E}_3+\left(\overset{k}{\gamma}_{31}\right)\left(\overset{k}{\gamma}_{33}\right)^{-1}\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+z(\text{æ}_1+\text{æ}_2)\right],$$

$$m=1,2,\ldots,\bar{N},\qquad k=1,\ldots,\bar{n}_m. \tag{11}$$

Інтегруючи (11) по пакету m, $m=1,2,\ldots,\bar{N}$, знайдемо

$$\overset{m}{C}=C_{0m}C_{1m}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+C_{0m}C_{2m}(\text{æ}_1+\text{æ}_2). \tag{12}$$

Використовуючи (8)–(12), легко отримуємо вирази

$$\int\limits_{(m)}\gamma_{31}(z)E_3(z)\,dz=\overset{0}{e}_{1m}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\overset{0}{e}_{2m}(\text{æ}_1+\text{æ}_2), \tag{13}$$

$$\int\limits_{(m)}\gamma_{31}(z)E_3(z)z\,dz=\overset{1}{e}_{1m}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\overset{1}{e}_{2m}(\text{æ}_1+\text{æ}_2). \tag{14}$$

Тут введено такі позначення:

$$\overset{0}{e}_{0m}=C_{0m}C_{1m},\qquad \overset{0}{e}_{1m}=C_{0m}C_{1m}^2-C_{3m},\qquad \overset{1}{e}_{0m}=C_{0m}C_{2m},$$

$$\overset{1}{e}_{2m}=C_{0m}C_{2m}^2-C_{5m}^2,\qquad \overset{0}{e}_{2m}=\overset{1}{e}_{1m}=C_{0m}C_{1m}C_{2m}-C_{4m}; \tag{15}$$

$$C_{0m}^{-1}=\int\limits_{(m)}\left\{\varepsilon_{33}^T(z)\left[1-k_p^2(z)\right]\right\}^{-1}dz,$$

$$C_{1m}=\int\limits_{(m)}\left\{S_{11}^E(z)[1-\nu(z)]\left[1-k_p^2(z)\right]\right\}^{-1}d_{31}(z)\,dz,$$

$$C_{2m}=\int\limits_{(m)}\left\{S_{11}^E(z)[1-\nu(z)]\left[1-k_p^2(z)\right]\right\}^{-1}d_{31}(z)\,z\,dz,$$

$$C_{3m} = \int\limits_{(m)} \left\{ S_{11}^E(z)\varepsilon_{33}^T(z)[1-\nu^2(z)]\left[1-k_p^2(z)\right]\right\}^{-1} d_{31}^2(z)\,dz\,,$$

$$C_{4m} = \int\limits_{(m)} \left\{ S_{11}^E(z)[1-\nu^2(z)]\left[1-k_p^2(z)\right]\right\}^{-1} d_{31}^2(z)\,z\,dz\,,$$

$$C_{5m} = \int\limits_{(m)} \left\{ S_{11}^E(z)[1-\nu^2(z)]\left[1-k_p^2(z)\right]\right\}^{-1} d_{31}^2(z)\,z^2\,dz\,. \qquad (16)$$

В результаті складові рівняння стану для шаруватих п’єзоелектричних пластинок, які вносяться п’єзоактивними пакетами, матимуть вигляд

$$\bar{T}_1 = \bar{C}_{11}\varepsilon_1 + \bar{C}_{12}\varepsilon_2 + \bar{K}_{11}æ_1 + \bar{K}_{12}æ_2\,,$$
$$\bar{T}_2 = \bar{C}_{12}\varepsilon_1 + \bar{C}_{22}\varepsilon_2 + \bar{K}_{12}æ_1 + \bar{K}_{22}æ_2\,,$$
$$\bar{S} = \bar{C}_{66}\varepsilon_{12} + \bar{K}_{66}æ_{12}\,,$$
$$\bar{M}_1 = \bar{K}_{11}\varepsilon_1 + \bar{K}_{12}\varepsilon_2 + \bar{D}_{11}æ_1 + \bar{D}_{12}æ_2\,,$$
$$\bar{M}_2 = \bar{K}_{12}\varepsilon_1 + \bar{K}_{22}\varepsilon_2 + \bar{D}_{12}æ_1 + \bar{D}_{22}æ_2\,,$$
$$\bar{H} = \bar{K}_{66}\varepsilon_{12} + \bar{D}_{66}æ_{12}, \qquad \bar{Q}_1 = \bar{G}_{13}\varepsilon_{13}, \qquad \bar{Q}_2 = \bar{G}_{23}\varepsilon_{23}\,. \qquad (17)$$

Тут I_{2i} визначається за формулою (6), у якій слід замінити G_{13} на B_{13}, а

$$\bar{C}_{11} = \sum_m \int\limits_{(m)} \left\{ S_{11}^E(z)[1-\nu^2(z)]\right\}^{-1} dz - \sum_m \overset{0}{e}_{1m}, \qquad \bar{C}_{11} = \bar{C}_{22}\,,$$

$$\bar{C}_{12} = \sum_m \int\limits_{(m)} \left\{ S_{11}^E(z)[1-\nu^2(z)]\right\}^{-1} \nu(z)\,dz - \sum_m \overset{0}{e}_{1m}\,,$$

$$\bar{C}_{66} = \sum_m \int\limits_{(m)} \left\{ 2S_{11}^E(z)[1+\nu(z)]\right\}^{-1} dz\,,$$

$$\bar{K}_{11} = \sum_m \int\limits_{(m)} \left\{ S_{11}^E(z)[1-\nu^2(z)]\right\}^{-1} z\,dz - \sum_m \overset{0}{e}_{2m}, \qquad \bar{K}_{11} = \bar{K}_{22}\,,$$

$$\bar{K}_{12} = \sum_m \int\limits_{(m)} \left\{ S_{11}^E(z)[1-\nu^2(z)]\right\}^{-1} \nu(z)\,z\,dz - \sum_m \overset{0}{e}_{2m}\,,$$

$$\bar{K}_{66} = \sum_m \int\limits_{(m)} \left\{ 2S_{11}^E(z)[1+\nu(z)]\right\}^{-1} z\,dz\,; \qquad (18)$$

$$\bar{D}_{11} = \sum_m \int\limits_{(m)} \left\{ S_{11}^E(z)[1-\nu^2(z)]\right\}^{-1} z^2\,dz - \sum_m \overset{1}{e}_{2m}, \qquad \bar{D}_{11} = \bar{D}_{22}\,,$$

$$\bar{D}_{12} = \sum_m \int\limits_{(m)} \left\{ S_{11}^E(z)[1-\nu^2(z)]\right\}^{-1} \nu(z)\,z^2\,dz - \sum_m \overset{1}{e}_{2m}\,,$$

$$\bar{D}_{66} = \sum_m \int\limits_{(m)} \left\{ 2S_{11}^E(z)[1+\nu(z)]\right\}^{-1} z^2\,dz, \qquad \sum_m = \sum_{m=1}^{\bar{N}}\,. \qquad (19)$$

Рівняння стану для пластини, яка складається з пасивних і п’єзоактивних пакетів, мають вигляд

$$T_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + K_{12}æ_1 + K_{22}æ_2\,,$$
$$T_2 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + K_{12}æ_1 + K_{22}æ_2\,,$$
$$S = C_{66}\varepsilon_{12} + K_{66}æ_{12}\,,$$
$$M_1 = K_{11}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_2 + D_{11}æ_1 + D_{12}æ_2\,,$$
$$M_2 = K_{12}\varepsilon_1 + K_{22}\varepsilon_2 + D_{12}æ_1 + D_{22}æ_2\,,$$
$$H = K_{66}\varepsilon_{12} + D_{66}æ_{12}, \qquad Q_1 = G_{13}\varepsilon_{13}, \qquad Q_2 = G_{23}\varepsilon_{23}\,, \qquad (20)$$

де

$$\{C_{kl}, K_{kl}, D_{kl}, G_{kl}\} = \{\tilde{C}_{kl} + \bar{C}_{kl}, \tilde{K}_{kl} + \bar{K}_{kl}, \tilde{D}_{kl} + \bar{D}_{kl}, \tilde{G}_{kl} + \bar{G}_{kl}\}. \qquad (21)$$

Заряд на кожному електроді знаходиться шляхом інтегрування виразу (12) по площі електрода:

$$Q_m = -\iint_{(\mathcal{S}_m)} \left[C_{0m}C_{1m}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + C_{0m}C_{2m}(æ_1 + æ_2)\right] AB\, d\alpha\, d\beta. \qquad (22)$$

Струм визначається шляхом диференціювання (22) за часом. Для моногармонічного процесу

$$I_m = i\omega Q_m. \qquad (23)$$

Розглянемо другий випадок електричних крайових умов, коли електроди розімкнуті. При цьому замість (12) матимемо

$$\overset{m}{C} = C_{0m}V_m + C_{0m}C_{1m}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + C_{0m}C_{2m}(æ_1 + æ_2). \qquad (24)$$

Проте тут різниця потенціалів на електродах поки що невідома. Вона визначається з рівності нулю струму на розімкнутих електродах:

$$V_m = \\ = -\frac{1}{\iint\limits_{(\mathcal{S}_m)} \frac{AB}{C_{0m}}\, d\alpha\, d\beta} \iint\limits_{(\mathcal{S}_m)} [C_{0m}C_{1m}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + C_{0m}C_{2m}(æ_1 + æ_2)]\, AB\, d\alpha\, d\beta. \qquad (25)$$

Рівняння стану для розімкнутих електродів матимемо після виключення E_3 з останнього зі співвідношень (8) і використання (24), (25). У багатьох випадках впливом сенсора на жорсткісні характеристики оболонки можна знехтувати з огляду на його малу товщину порівняно з товщиною пасивної оболонки. При цьому різниця потенціалів на сенсорному шарі визначається за формулою (25).

До записаних вище рівнянь потрібно додати стандартні рівняння руху, наведені, наприклад, у [26]. У них враховується інерція повороту. Для періодичних за часом процесів необхідно замінити другі похідні $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ на $-\omega^2 f$.

Крайові й початкові умови мають стандартний для уточнених моделей оболонок вигляд і наведені для моделі типу Тимошенка в [6, 26].

Кінематичні співвідношення також наведено в [6, 26]. Тому всі названі рівняння не будемо виписувати.

3. Основні співвідношення для тришарової оболонки. При демпфуванні коливань тонких оболонок за допомогою сенсорів типовою структурою по товщині є така структура, коли середній пасивний шар лежить між двома п'єзоактивними шарами. При цьому між пасивним і п'єзоактивними шарами можуть бути розміщені внутрішні електроди або вони можуть бути відсутніми. Розглянемо спочатку перший випадок, коли внутрішні електроди присутні. Цей випадок завжди має місце, коли пасивний шар − металічний. Тоді на внутрішніх електродах різниця потенціалів задається рівною нулеві. Якщо ж пасивний шар виготовлено з діелектрика, також будемо вважати, що на внутрішніх електродах різниця потенціалів дорівнює нулеві.

Нехай товщина пасивного шару дорівнює h_0, а верхній та нижній п'єзоактивні шари мають відповідно товщини h_1 та h_2. Загальна товщина оболонки $h = h_0 + h_1 + h_2$.

Для верхнього та нижнього п'єзоактивних шарів $D_3 = C_1(\alpha, \beta)$ та $D_3 = C_2(\alpha, \beta)$ відповідно. Розглянемо випадок, коли електроди коротко замкнуті й присутні внутрішні електроди. Якщо при цьому на внутрішніх електродах різниця потенціалів нульова, то одержані нижче формули мають місце і для металічного, і для діелектричного середнього шару. Після інтегрування (8) по товщині верхнього та нижнього п'єзоактивних шарів матимемо

$$C_1(\alpha,\beta) = \frac{v_{11}}{v_{10}}\,\varepsilon_1 + \frac{v_{12}}{v_{10}}\,\varepsilon_2 + \frac{w_{11}}{v_{10}}\,\text{æ}_1 + \frac{w_{12}}{v_{10}}\,\text{æ}_2\,,$$

$$C_2(\alpha,\beta) = \frac{v_{21}}{v_{20}}\,\varepsilon_1 + \frac{v_{22}}{v_{20}}\,\varepsilon_2 + \frac{w_{21}}{v_{20}}\,\text{æ}_1 + \frac{w_{22}}{v_{20}}\,\text{æ}_2\,. \qquad (26)$$

В подальшому будемо вважати, що пасивний шар досить тонкий, а тому можна вважати температуру сталою по його товщині. Тому при врахуванні залежності властивостей матеріалів від температури характеристики будуть незалежними від товщинної координати. При цьому введені в (26) величини розраховуються за формулами

$$v_{(10,20)} = \int\limits_{(h_1,h_2)} \frac{1}{\overset{(1,2)}{\gamma}_{33}}\,dz = \frac{(h_1,h_2)}{\overset{(1,2)}{\gamma}_{33}}, \qquad v_{11} = v_{12} = \int\limits_{(h_1)} \frac{\overset{1}{\gamma}_{31}}{\overset{1}{\gamma}_{33}}\,dz = \frac{\overset{1}{\gamma}_{31}}{\overset{1}{\gamma}_{33}}\,h_1\,,$$

$$w_{11} = w_{12} = \int\limits_{(h_1)} \frac{\overset{1}{\gamma}_{31}}{\overset{1}{\gamma}_{33}}\,z\,dz = \frac{\overset{1}{\gamma}_{31}}{2\overset{1}{\gamma}_{33}}\,h_1(h_1 + h_0)\,,$$

$$v_{21} = v_{22} = \int\limits_{(h_2)} \frac{\overset{2}{\gamma}_{31}}{\overset{2}{\gamma}_{33}}\,dz = \frac{\overset{2}{\gamma}_{31}}{\overset{2}{\gamma}_{33}}\,h_1\,,$$

$$w_{21} = w_{22} = \int\limits_{(h_2)} \frac{\overset{2}{\gamma}_{31}}{\overset{2}{\gamma}_{33}}\,z\,dz = -\frac{\overset{2}{\gamma}_{31}}{2\overset{2}{\gamma}_{33}}\,h_2(h_2 + h_0)\,. \qquad (27)$$

Якщо ж температуру не вважати сталою по товщині, то у виразах (27) потрібно залишити інтеграли.

Використовуючи (26), виключимо E_3 з останнього зі співвідношень (8), підставимо одержаний результат у спрощені відповідно до прийнятих гіпотез рівняння стану та проінтегруємо їх по товщині оболонки. В результаті одержимо визначальні рівняння вигляду (20).

Для визначення величини заряду, який знімається з електродів, проінтегруємо (26) по площі електрода. В результаті матимемо

$$Q = -\frac{1}{2}\iint\limits_{(S)} (\overset{1}{C} + \overset{2}{C})AB\,d\alpha\,d\beta = -\frac{1}{2}\iint\limits_{(S)} \left[\left(\frac{v_{11}}{v_{10}} + \frac{v_{21}}{v_{20}}\right)\varepsilon_1 + \left(\frac{v_{12}}{v_{10}} + \frac{v_{22}}{v_{20}}\right)\varepsilon_2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{w_{11}}{v_{10}} + \frac{w_{21}}{v_{20}}\right)\text{æ}_1 + \left(\frac{w_{12}}{v_{10}} + \frac{w_{22}}{v_{20}}\right)\text{æ}_2\right]AB\,d\alpha\,d\beta\,. \qquad (28)$$

Якщо верхній і нижній сенсори мають однакові властивості, за винятком того, що вони протилежно поляризовані, то заряд розраховується за формулою

$$Q = -\iint\limits_{(S)} \left[\left(\frac{w_{11}}{v_{10}} + \frac{w_{12}}{v_{20}}\right)\text{æ}_1 + \left(\frac{w_{11}}{v_{10}} + \frac{w_{22}}{v_{20}}\right)\text{æ}_2\right]AB\,d\alpha\,d\beta\,. \qquad (29)$$

Розглянемо випадок розімкнутих електродів. При цьому для кожного з шарів матимемо співвідношення

$$\frac{\overset{i}{C}}{\overset{i}{\gamma}_{33}} = \overset{i}{E}_3 + \frac{\overset{i}{\gamma}_{31}}{\overset{i}{\gamma}_{33}}(\varepsilon_1 + z\,\text{æ}_1) + \frac{\overset{i}{\gamma}_{32}}{\overset{i}{\gamma}_{33}}(\varepsilon_2 + z\,\text{æ}_2), \qquad i = 1, 2\,. \qquad (30)$$

Інтегруючи по товщині кожного із сенсорів, матимемо

$$C_1(\alpha,\beta) = -\frac{V_1}{v_{10}} + \frac{v_{11}}{v_{10}}\varepsilon_1 + \frac{v_{12}}{v_{10}}\varepsilon_2 + \frac{w_{11}}{v_{10}}æ_1 + \frac{w_{12}}{v_{10}}æ_2,$$

$$C_2(\alpha,\beta) = \frac{V_2}{v_{20}} + \frac{v_{21}}{v_{20}}\varepsilon_1 + \frac{v_{22}}{v_{20}}\varepsilon_2 + \frac{w_{21}}{v_{20}}æ_1 + \frac{w_{22}}{v_{20}}æ_2. \qquad (31)$$

Підставляючи (31) у (30), визначимо напруженість електричного поля в кожному з сенсорів:

$$\overset{i}{E}_3 = \frac{\overset{i}{C}}{\overset{i}{\gamma}_{33}} - \frac{\overset{i}{\gamma}_{31}}{\overset{i}{\gamma}_{33}}(\varepsilon_1 + zæ_1) - \frac{\overset{i}{\gamma}_{32}}{\overset{i}{\gamma}_{33}}(\varepsilon_2 + zæ_2), \qquad i = 1,2. \qquad (32)$$

Підставивши (32) у спрощені відповідно до вказаного визначальні рівняння (8) і проінтегрувавши їх по товщині сенсора, одержимо визначальні рівняння

$$\bar{T}_{(1,2)} = \bar{C}_{11,21}\varepsilon_1 + \bar{C}_{12,22}\varepsilon_2 + \bar{K}_{11,21}æ_1 + \bar{K}_{12,22}æ_2 - \overset{0}{T}_{(1,2)},$$

$$\bar{M}_{(1,2)} = \bar{K}_{11,21}\varepsilon_1 + \bar{K}_{12,22}\varepsilon_2 + \bar{D}_{11,21}æ_1 + \bar{D}_{12,22}æ_2 - \overset{0}{M}_{(1,2)},$$

$$\bar{S} = \bar{C}_{66}\varepsilon_{12} + \bar{K}_{66}æ_{12}, \qquad \bar{H} = \bar{K}_{66}\varepsilon_{12} + \bar{D}_{66}æ_{12}. \qquad (33)$$

Тут введено такі позначення:

$$\bar{C}_{11} = \int_{(h)}\left(B_{11} + \frac{\gamma_{31}^2}{\gamma_{33}}\right)dz - \frac{v_{11}^2}{v_{10}} - \frac{v_{21}^2}{v_{20}},$$

$$\bar{C}_{12} = \bar{C}_{21} = \int_{(h)}\left(B_{12} + \frac{\gamma_{31}\gamma_{32}}{\gamma_{33}}\right)dz - \frac{v_{11}v_{12}}{v_{10}} - \frac{v_{21}v_{22}}{v_{20}},$$

$$\bar{K}_{11} = \int_{(h)}\left(B_{11} + \frac{\gamma_{31}^2}{\gamma_{33}}\right)z\,dz - \frac{v_{11}w_{11}}{v_{10}} - \frac{v_{21}w_{21}}{v_{20}},$$

$$\bar{K}_{12} = \int_{(h)}\left(B_{12} + \frac{\gamma_{31}\gamma_{32}}{\gamma_{33}}\right)z\,dz - \frac{v_{11}w_{12}}{v_{10}} - \frac{v_{21}w_{22}}{v_{20}},$$

$$\bar{K}_{21} = \int_{(h)}\left(B_{12} + \frac{\gamma_{31}\gamma_{32}}{\gamma_{33}}\right)z\,dz - \frac{v_{12}w_{11}}{v_{10}} - \frac{v_{22}w_{21}}{v_{20}},$$

$$\bar{K}_{22} = \int_{(h)}\left(B_{22} + \frac{\gamma_{32}^2}{\gamma_{33}}\right)z\,dz - \frac{v_{12}w_{12}}{v_{10}} - \frac{v_{22}w_{22}}{v_{20}},$$

$$\bar{D}_{11} = \int_{(h)}\left(B_{11} + \frac{\gamma_{31}^2}{\gamma_{33}}\right)z^2dz - \frac{w_{11}^2}{v_{10}} - \frac{w_{21}^2}{v_{20}},$$

$$\bar{D}_{12} = \bar{D}_{21} = \int_{(h)}\left(B_{12} + \frac{\gamma_{31}\gamma_{32}}{\gamma_{33}} + \frac{\gamma_{32}^2}{\gamma_{33}}\right)z^2dz - \frac{w_{11}w_{12}}{v_{10}} - \frac{w_{21}w_{22}}{v_{20}},$$

$$\bar{D}_{22} = \int_{(h)}\left(B_{22} + \frac{\gamma_{32}^2}{\gamma_{33}}\right)z^2dz - \frac{w_{12}^2}{v_{10}} - \frac{w_{22}^2}{v_{20}}; \qquad (34)$$

$$\overset{0}{T}_{(1,2)} = -\frac{v_{(11,12)}}{v_{10}}V_1 + \frac{v_{(21,22)}}{v_{20}}V_2, \qquad \overset{0}{M}_{(1,2)} = -\frac{w_{(11,12)}}{v_{10}}V_1 + \frac{w_{(21,22)}}{v_{20}}V_2. \qquad (35)$$

Проте різниці потенціалів у (35) поки що невідомі. Вони визначаються з умови рівності нулеві струму:

$$V_1 = \frac{1}{v_{01}} \iint\limits_{(S)} \left(\frac{v_{11}}{v_{10}} \varepsilon_1 + \frac{v_{12}}{v_{10}} \varepsilon_2 + \frac{w_{11}}{v_{10}} æ_1 + \frac{w_{12}}{v_{10}} æ_2 \right) AB \, d\alpha \, d\beta \,,$$

$$V_2 = -\frac{1}{v_{02}} \iint\limits_{(S)} \left(\frac{v_{21}}{v_{20}} \varepsilon_1 + \frac{v_{22}}{v_{20}} \varepsilon_2 + \frac{w_{21}}{v_{20}} æ_1 + \frac{w_{22}}{v_{20}} æ_2 \right) AB \, d\alpha \, d\beta \,. \qquad (36)$$

Тут

$$v_{(01,02)} = \iint\limits_{(S)} \frac{AB}{v_{(10,20)}} d\alpha \, d\beta \,. \qquad (37)$$

Тепер розглянемо випадок, коли внутрішні електроди відсутні. Тоді відповідно до прийнятих гіпотез

$$D_3 = C(\alpha, \beta) = \gamma_{33} E_3 + \gamma_{31} (\varepsilon_{11}^z + \varepsilon_{22}^z) \,. \qquad (38)$$

Для розімкнутих електродів з (38) матимемо

$$C(\alpha, \beta) = \frac{v_{11}}{v_{10}} \varepsilon_1 + \frac{v_{12}}{v_{10}} \varepsilon_2 + \frac{w_{11}}{v_{10}} æ_1 + \frac{w_{12}}{v_{10}} æ_2 \,. \qquad (39)$$

Величини v_{ij}, w_{ij} розраховуються за формулами (27), де інтегрування виконується по всій товщині пластини і для пасивного шару покладається $\gamma_{31} = 0$. При цьому

$$E_3 = \frac{C(\alpha, \beta)}{\gamma_{33}(z)} - \frac{\gamma_{31}(z)}{\gamma_{33}(z)} (\varepsilon_1 + z æ_1) - \frac{\gamma_{31}(z)}{\gamma_{33}(z)} (\varepsilon_2 + z æ_2) \,. \qquad (40)$$

Підставляючи (40) у (8), одержимо спрощені рівняння для напружень. Після їх інтегрування по товщині одержимо рівняння стану вигляду (33), коефіцієнти яких розраховуються за формулами, аналогічними до (34), (35), у яких інтеграли беруться по всій товщині оболонки з урахуванням умови, що для пасивного шару $\gamma_{km} = 0$. При цьому, наприклад,

$$\bar{C}_{11} = \int\limits_{(h)} \left(B_{11} + \frac{\gamma_{31}^2}{\gamma_{33}} \right) dz - \frac{v_{11}^2}{v_{10}}, \quad \bar{C}_{12} = \int\limits_{(h)} \left(B_{12} + \frac{\gamma_{31}^2}{\gamma_{33}} \right) dz - \frac{v_{11}^2}{v_{10}}, \, \ldots \qquad (41)$$

При активному демпфуванні коливань за допомогою сенсорів у більшості випадків можна знехтувати їх впливом на жорсткі характеристики оболонки. При цьому величини C_{ij}, B_{ij} розраховуються за класичними формулами, наведеними, наприклад, у [26], тобто за наведеними вище формулами (41), в яких слід покласти $\gamma_{ij} = 0$. Таке припущення робиться у більшості робіт, що стосуються активного демпфування коливань тонких пластин за допомогою сенсорів, зокрема, в роботах [39, 40].

Наведені вище формули дають більш точні результати. Слід відмітити, що ці формули стосуються лише тих областей пластини, які мають п'єзоелектричні включення. В областях, у яких такі включення відсутні, слід використовувати класичні формули теорії шаруватих пластин з пасивних матеріалів. Звичайно, при врахуванні впливу п'єзоелектричних включень на жорсткісні характеристики пластин задача суттєво ускладнюється навіть у найпростішому ізотермічному випадку, бо тоді маємо структурно неоднорідну в серединній площині пластину, яка складається з областей з різними механічними характеристиками. При нехтуванні таким впливом задача зводиться до класичних задач механіки тонких пластин, навантажених механічними зусиллями й моментами.

Покладаючи товщини п'єзоактивних шарів рівними нулеві, матимемо визначальні рівняння для пасивного діелектричного шару, до якого підведена задана різниця потенціалів.

Враховуючи (39), для коротко замкнутих електродів матимемо такий вираз для заряду:

$$Q = \iint\limits_{(\mathcal{S})} \left(\frac{v_{11}}{v_{10}} \varepsilon_1 + \frac{v_{12}}{v_{10}} \varepsilon_2 + \frac{w_{11}}{v_{10}} æ_1 + \frac{w_{12}}{v_{10}} æ_2 \right) AB\, d\alpha\, d\beta\,. \qquad (42)$$

Для розрахунку струму слід взяти похідну за часом від заряду. Для моногармонічних процесів

$$I = i\omega Q(\alpha, \beta)\,. \qquad (43)$$

Для розімкнутих електродів різниця потенціалів визначається з рівності нулеві струму, так що

$$V_{\mathcal{S}} = \frac{1}{\int\limits_{(\mathcal{S})} \frac{d\mathcal{S}}{v_{10}}} \iint\limits_{(\mathcal{S})} \left(\frac{v_{11}}{v_{10}} \varepsilon_1 + \frac{v_{12}}{v_{10}} \varepsilon_2 + \frac{w_{11}}{v_{10}} æ_1 + \frac{w_{12}}{v_{10}} æ_2 \right) AB\, d\alpha\, d\mathcal{S}\,. \qquad (44)$$

У випадку, коли зовнішні шари відрізняються лише напрямком поляризації, в останньому виразі під інтегралом залишаються лише згинальні деформації:

$$V_{\mathcal{S}} = \frac{1}{\int\limits_{(\mathcal{S})} \frac{d\mathcal{S}}{v_{10}}} \iint\limits_{(\mathcal{S})} \left(\frac{w_{11}}{v_{10}} æ_1 + \frac{w_{12}}{v_{10}} æ_2 \right) AB\, d\alpha\, d\mathcal{S}\,. \qquad (45)$$

4. Рівняння енергії. Для того щоб одержати двовимірні рівняння енергії для шаруватої оболонки, приймаємо, що нормальна складова теплового потоку змінюється по товщині за заданим законом, наприклад, за степеневим

$$q_3 = \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu(x, y, t) z^{\nu-1}\,. \qquad (46)$$

При такому виборі автоматично задовольняються умови неперервності теплового потоку між шарами пластини. Будемо вважати, що крайові на зовнішніх поверхнях $z = h_1$, $z = h_M$ та на контурі L і початкові умови мають вигляд

$$\lambda_{33} \frac{\partial\theta}{\partial z} + \alpha_3(\theta - \theta^-) = 0, \quad z = h_1; \qquad \lambda_{33} \frac{\partial\theta}{\partial z} + \alpha_4(\theta - \theta^+) = 0, \quad z = h_M\,,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial n} + \frac{\alpha_L}{\lambda_n}(\theta - \theta_L) = 0 \quad \text{на} \quad L; \qquad \theta = \theta_0, \quad t = 0\,. \qquad (47)$$

Інтегруючи за z вираз $q_3 = -\lambda_{33}(z) \frac{\partial\theta}{\partial z}$, матимемо

$$\theta = \sum_{\nu=0}^{N} P_\nu(z) \theta_\nu\,, \qquad (48)$$

де $\theta_\nu(x, y, t)$ – невідомі функції, а $P_\nu(z)$ – функції розподілу температури по товщині пакету шарів:

$$\theta_0 = \theta_0(x, y, t), \qquad \theta_\nu(x, y, t) = -\, a_\nu \frac{H^{\nu+1}}{\overline{\overline{\lambda_{33}}}}\,,$$

$$P_0(z) = 1, \qquad P_\nu(z) = \frac{\overline{\overline{\lambda_{33}}}}{H^{\nu+1}} \int\limits_{h_1}^{z} \lambda_{33}^{-1}(z)\, z^{\nu-1}\, dz\,.$$

Тут вираз із рискою над ним є позначенням інтегральної характеристики цього виразу:

$$\overline{\lambda_{33}} = \int_{h_1}^{z} \lambda_{33}(z) z^{\nu-1}\, dz\,.$$

Вираз (48) автоматично задовольняє умову неперервності температури по пакету шарів.

Двовимірні рівняння енергії одержимо множенням рівняння теплопровідності з джерелом тепла W на $P_\nu(z)\,dz$, $\nu = 0, 1, 2, \dots, N$, та інтегруванням знайденого виразу по товщині оболонки. В результаті матимемо систему диференціальних рівнянь порядку $2(N+1)$ відносно $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N)^\top$:

$$K\theta = R\theta^* - W^*.$$

Матриці K, R диференціальних операторів наведені, наприклад, у роботі [3];

$$\theta^* = (\theta^-, \theta^+), \qquad W^* = (W_0, W_1, \dots, W_N)^\top,$$

при цьому $W_\nu = \int_{h_1}^{h_{m+1}} W P_{\nu+1}(z)\, dz$. Крайові умови для $\theta_\nu(x, y, t)$ одержано в [3], вони мають вигляд

$$\sum_{j=0}^{N} \left(\lambda_n P_\nu P_j \frac{\partial}{\partial n} + a_n P_\nu P_j \right) \theta_j - a_n P_\nu \theta_L = 0\,.$$

Їх кількість дорівнює $N+1$, що відповідає порядку системи диференціальних рівнянь. Початкові умови для $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N)$ знаходяться шляхом множення останнього зі співвідношень (47) на $P_\nu\, dz$ та інтегрування по товщині пакету. Такі ж двовимірні рівняння можна одержати і з варіаційного принципу для рівняння теплопровідності.

Двовимірні рівняння енергії для різних варіантів розподілу температури по товщині оболонки наведено в [28]. Найпростіший варіант маємо, припускаючи, що $q_3 = 0$. При цьому температура буде сталою по товщині оболонки і для стаціонарного випадку визначається рівнянням [23, 28]

$$\frac{1}{AB}\left[\lambda_{11} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(B \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \lambda_{22} \frac{\partial}{\partial \beta}\left(B \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right] \theta - \frac{2\delta}{h}\theta + \frac{W}{h} = 0\,, \tag{49}$$

де $\theta = T - T^0$; $\delta = \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4)$; $T^0 = \frac{\alpha_3\theta_3 + \alpha_4\theta_4}{\alpha_3 + \alpha_4}$; α_3, α_4 – коефіцієнти теплообміну на поверхнях $z = \pm\frac{h}{2}$ із зовнішнім середовищем з температурами θ_3, θ_4; λ_{ij} – коефіцієнти теплопровідності ортотропного матеріалу. Дисипативна функція W для пасивного шару у рівнянні (49) розраховується за формулою

$$\begin{aligned} W = \frac{\omega}{2}\big[&(T_1''\varepsilon_1' - T_1'\varepsilon_1'') + (T_2''\varepsilon_2' - T_2'\varepsilon_2'') + 2(S''\varepsilon_{12}'' - S'\varepsilon_{12}'') + \\ &+ (M_1''\chi_1' - M_1'\chi_1'') + (M_2''\chi_2' - M_2'\chi_2'') + 2(H_1''\chi_{12}' - H_1'\chi_{12}'') + \\ &+ (Q_1''\varepsilon_{13}' - Q_1'\varepsilon_{13}'') + (Q_2''\varepsilon_{23}' - Q_2'\varepsilon_{23}'') \big]. \end{aligned} \tag{50}$$

При врахуванні залежності властивостей матеріалів від температури матимемо складну нелінійну систему диференціальних рівнянь із частинними похідними.

Якщо ж властивості матеріалів можна вважати незалежними від температури, то задача розпадається на три окремі задачі: ***1***) задачу механіки для в'язкопружного матеріалу; ***2***) задачу теплопровідності з відомими джерелами тепла; ***3***) розрахунок за наведеними вище формулами показників сенсора.

В обох випадках при досягненні температурою дисипативного розігріву точки Кюрі сенсор перестає виконувати своє функціональне призначення, тобто має місце специфічний тип теплового руйнування п'єзоелемента.

Наведена в цій статті уточнена термомеханічна модель оболонок з розподіленими трансверсально-ізотропними сенсорами є теоретичною основою для дослідження сумісного впливу температури дисипативного розігріву та ефектів зсуву на ефективність роботи сенсорів і на ефективність активного демпфування резонансних коливань композитних оболонок за їх допомогою.

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. – Москва: Наука, 1987. – 360 с.
3. *Бондарь А. Г., Рассказов А. О., Козлов В. И., Бондарский А. Г.* Термоупругое равновесие многослойных составных оболочек // Проблемы прочности. – 1989. – № 6. – С. 68–72.
4. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с.
5. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 5.)
6. *Гузь А. Н., Шнеренко К. И.* Линейные задачи для оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига // Механика композитов: В 12 т. – Т. 7: Концентрация напряжений / А. Н. Гузь, А. С. Космодамианский, В. П. Шевченко и др. – Киев: А.С.К., 1998. – С. 288–328.
7. *Дубенец В. Г., Хильчевский В. В.* Колебания демпфированных композитных конструкций. – Київ: Вища шк., 1995. – Т. 1. – 226 с.
8. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – Москва: Наука, 1970. – 280 с.
9. *Карнаухов В. Г.* Связанные задачи термовязкоупругости. – Киев: Наук. думка, 1982. – 260 с.
10. *Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В., П'ятецька О. В.* Вплив температури дисипативного розігріву на активне демпфірування вимушених осесиметричних коливань круглої пластини за допомогою п'єзоелектричного актуатора // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2004. – № 3. – С. 107–114.
11. *Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В., П'ятецька О. В.* Вплив температури дисипативного розігріву на показники п'єзоелектичного сенсора при вимушених осесиметричних коливаннях круглої пластини // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2004. – № 1. – С. 107–113.
12. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 222 с.
13. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Электротермовязкоупругость. – Киев: Наук. думка, 1988. – 320 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 4.)
14. *Карнаухов В. Г., Козлов А. В., Пятецкая Е. В.* Активное демпфирование колебаний тонкостенных элементов при помощи распределенных пьезоэлектрических включений // Друга всеукр. наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки». – Дніпропетровськ, 2002. – С. 14.
15. *Карнаухов В. Г., Козлов А. В., Пятецкая Е. В.* Активное демпфирование осесимметричных колебаний круглой пластины при помощи распределенных сенсоров и актуаторов // Системні технології: Вип. «Математичні проблеми технічної механіки». – Дніпропетровськ, 2003. – С. 145–151.
16. *Карнаухов В. Г., Козлов А. В., Пятецкая Е. В.* Демпфирование колебаний вязкоупругих пластин при помощи распределенных пьезоэлектрических включений // Акуст. вісн. – 2002. – **5**, № 4. – С. 15–32.
17. *Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Пятецкая Е. В.* Активное демпфирование колебаний прямоугольной пластины при помощи распределенных сенсоров и актуаторов // Теорет. и прикл. механика. – 2003. – 37. – С. 136–140.

18. *Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Пятецкая Е. В.* Активно-пассивное демпфирование колебаний тонкостенных элементов при помощи распределенных сенсоров и актуаторов // Тез. докл. акуст. симп. (Киев, 1–3 окт. 2003 г.) – Киев, 2003. – С. 36.
19. *Карнаухов В. Г., Козлов В. І., П'ятецька О. В.* Активне демпфірування осесиметричних резонансних коливань круглої пластини за допомогою п'єзоелектричних включень // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2003. – № 2. – С. 81–85.
20. *Карнаухов В. Г., Козлов В. І., П'ятецька О. В.* Вплив граничних умов на активне демпфірування коливань в'язкопружної прямокутної пластини за допомогою розподілених п'єзоелектричних включень // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2003. – № 1. – С. 75–85.
21. *Карнаухов В. Г., Михайленко В. В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428 с.
22. *Карнаухов В. Г., Михайленко В. В.* Нелинейные одночастотные колебания и диссипативный разогрев неупругих пьезоэлектрических тел // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 5. – С. 13–45.
23. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 307 с.
24. *Коренев Б. Г., Резников Л. М.* Динамические гасители колебаний. Теория и приложения. – Москва: Наука, 1988. – 304 с.
25. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. – Москва: Мир, 1974. – 338 с.
26. *Луговой П. З., Мейш В. Ф., Штанцель Э. А.* Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – Київ: Вид.-поліграф. центр «Київ. ун-т», 2005. – 536 с.
27. *Матвеев В. В.* Демпфирование колебаний деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 264 с.
28. *Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж.* Демпфирование колебаний. – Москва: Мир, 1988. – 448 с.
29. *Bank H. T., Rosario R., Smith R. C.* Reduced – order model feedback control design: numerical implication in a thin shell model // IEEE Trans. Automatic Control. – 2000. – **36**, No. 2. – P. 39–63.
30. *Gabbert U., Koppe H., Laugwitz F.* Numerical and experimental investigations of adaptive plate and shell structures // Smart Structures / Eds J. Holnicki-Szulk, J. Rodellar). – Dordrecht–Boston–London: Kluver Acad. Publ., 1999. – P. 71–78.
31. *Gabbert U., Tzou H. S.* Smart structures and structronic systems. – Dordrecht–Boston–London: Kluver Acad. Publ., 2001. – 384 p.
32. *Gopinathan S., Varadan V. V., Varadan V. K.* A review and critique of theories for piezoelectric laminates // Smart Mater. Struct. – 2000. – **9**. – P. 24–48.
33. *Lazan B.* Damping of materials and members in structural mechanics. – Oxford etc.: Pergamon Press, 1968. – 318 p.
34. *Lee C. K.* Theory of laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensor/actuators. Part I: Governing equations and reciprovel relations// J. Acoust. Soc. Amer. – 1990. – **87**, No. 3. – P. 1144–1158.
35. *Lee C. K., Moon F. C.* Laminated piezopolymer plates for torsion and bending sensors and actuators // J. Acoust. Soc. Amer. – 1989. – **85**, No. 6. – P. 2432–2439.
36. *Liu G. R., Peng X. Q., Lam K. Y.* Vibration control simulation of laminated composite plates with integrated piezoelectrics // J. Sound and Vibr. – 1999. – **220**. – P. 827–846.
37. *Rao S. S., Sunar M.* Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of structure: A survey // Appl. Mech. Rev. – 1994. – **47**, No. 44. – P. 113–123.
38. *Tani J., Takagi T., Qiu J.* Intelligent material systems: Applications of functional materials // Appl. Mech. Rev. – 1998. – **51**, No. 8. – P. 505–521.
39. *Tzou H. S.* Piezoelectric shells (Distributed sensing and control of continua). – Dordrecht–Boston–London: Kluver Acad. Publ., 1993. – 400 p.
40. *Tzou H. S., Bergman L. A.* Dynamics and control of distributed systems. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 400 p.

УТОЧНЕННАЯ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМИ СЕНСОРАМИ ПРИ МОНОГАРМОНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

С использованием уточненных гипотез типа Тимошенко и адекватных им гипотез относительно электрических полевых величин построена термомеханическая модель тонкостенных оболочек с распределенными трансверсально-изотропными сенсорами с учетом диссипативного разогрева в результате гистерезисных потерь в материалах. Рассмотрены разные типы электрических граничных условий, когда электроды на сенсоре коротко замкнуты или разомкнуты. Для этих типов электрических граничных условий получены выражения для показателей сенсоров. Если свойства материалов зависят от температуры, исследование влияния температуры диссипативного разогрева на эти показатели сводится к решению сложной нелинейной системы дифференциальных уравнений. В противном случае, задача сводится к решению линейных задач механики и теплопроводности с известным источником тепла. В этом случае расчет показателей сенсора упрощается. В обоих случаях при достижении температурой диссипативного разогрева точки Кюри сенсор перестает выполнять свое функциональное назначение и имеет место специфический тип теплового разрушения.

REFINED THERMOMECHANICAL TIMOSHENKO-TYPE MODEL OF COMPOSITE SHELLS WITH DISTRIBUTED TRANSVERSALLY ISOTROPIC SENSORS UNDER MONOHARMONIC LOADING

Using the refined Timoshenko-type hypotheses and adequate to them hypotheses about electric field quantities, the thermomechanical model of thin-walled shells with distributed transversally isotropic sensors is presented with taking into account dissipative heating as a result of hysteresis in materials. Different types of electric boundary conditions are considered, when electrodes on the sensor are short-circuited or open. For these types of boundary conditions the formulas for sensor indices are obtained. If the material characteristics depend on temperature, investigation of the influence of temperature of dissipative heating on the indices is reduced to solution of complicated non-linear systems of differential equations. Otherwise the problem is reduced to solution of linear problems of mechanics and heat conductivity with a certain heat source. In such a case calculation of sensor indices is simplified. If temperature of dissipative heating exceeds the Curie point, the sensor becomes passive and specific type of thermal destruction takes place.

[1] Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ,
[2] Нац. техн. ун-т (КПІ), Київ

Одержано
18.07.06