УДК 539.30

І. Б. Прокопович

ВИРАЗИ ДЛЯ ЕФЕКТИВНОЇ ДІЕЛЕКТРИЧНОЇ ПРОНИКНОСТІ НАПРУЖЕНОГО ІЗОТРОПНОГО МАТЕРІАЛУ

За допомогою методу вільної дисторсії загальне (нелінійне) потенціальне діелектричне рівняння стану в початково напруженому ізотропному матеріалі зведено до формули через ефективну проникність. Побудовано два різних тензори проникності: один – безпосередньо залежний від поточних напружень, але не співвісний з ними, а інший – залежний від поточної накопиченої пружної деформації і співвісний з нею. Показано, що, коли вектор діелектричної напруженості збігається з головним напрямком тензора поточної пружної деформації, тоді цей тензор і тензори проникності та напружень стають співвісними. Для динамічної проникності побудовано вираз, який залежить від тензора початкової пружної деформації і співвісний з ним, а також – відповідно з тензором початкових напружень. Таким чином, доведено, що нелінійні ефекти, які супроводжують поширення електромагнітних хвиль у напруженому ізотропному діелектрику, не впливають на їх поляризацію уздовж головних напрямків тензора початкових напружень.

Для комп'ютерної томографії тримірних неоднорідних полів напружень (наприклад, залишкових) у прозорих матеріалах потрібні математичні моделі, які разом з рівняннями електромагнетизму включають матеріальне рівняння, яке, пов'язуючи спряжені параметри електричного стану – напруженість $\mathbf{e}$ та індукцію $\mathbf{d}$, разом з тим враховує вплив початкових напружень. Оскільки константи фотопружності залежать від частоти світла, то в напруженому тілі зв'язок між спряженими параметрами електричного поля, взагалі кажучи, нелінійний.

У загальному випадку рівняння стану для питомої по об'єму індукції в напруженому тілі має такий вигляд [4]:

$$\mathbf{d} = -\rho \mathsf{W}_{,[\mathbf{e}]} = -\rho \tilde{\mathsf{W}}_{,\mathbf{e}} + \hat{c}^{-1}\big[(\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{C}} - \underline{\mathsf{U}\mathbf{I}}) : \tilde{\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbf{e}} - \underline{\underline{\mathsf{U}_{,<\mathbf{e}>}}}\big]. \tag{1}$$

Тут ρ – густина тіла; $\mathsf{W} = \mathsf{W}(\mathbf{C}, \mathbf{e})$ – віднесена до маси електрична ентальпія; $\mathbf{C}$, $\hat{\mathbf{C}}$ – міри Коші для накопиченої повної та пружної деформацій відповідно; $\hat{c} = \sqrt{\det \hat{\mathbf{C}}}$ – міра накопиченої пружної об'ємної деформації; $\tilde{\mathsf{W}} = \tilde{\mathsf{W}}(\mathbf{e}) \equiv \mathsf{W}(\hat{\mathbf{C}}, \mathbf{e})\big|_{\hat{\mathbf{C}}=\mathbf{I}}$ – електрична ентальпія вільного від напружень тіла; $\mathsf{U}(\hat{\mathbf{C}}, \mathbf{e}) \equiv \rho\hat{c}\big[\mathsf{W}(\hat{\mathbf{C}}, \mathbf{e}) - \tilde{\mathsf{W}}(\mathbf{e})\big]$ – потенціал пружності; $\hat{\mathbf{S}} \equiv 2\mathsf{U}_{,<\hat{\mathbf{C}}>}$ – симетричний тензор напружень Піоли, віднесений до натуральної конфігурації; $\mathbf{I}$ – одиничний тензор другого рангу; $\tilde{\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbf{e}}(\mathbf{e})$ – модуль вільної електричної дисторсії. Нижній індекс після коми означає відповідну похідну. У квадратних дужках він означає похідну за сталої повної деформації, а в кутових – за сталої пружної деформації, без дужок – похідну від функції вільного стану, незалежної від деформації. У порівнянні з напруженнями член, підкреслений однією рискою у рівнянні (1), є на порядок $O(\hat{\mathbf{E}})$ меншим (тут $\hat{\mathbf{E}} \equiv (\hat{\mathbf{C}} - \mathbf{I})/2$ – тензор накопиченої пружної деформації). Тому ним можна знехтувати в межах точності теорії малої пружної деформації: $\hat{\mathbf{C}} \approx \mathbf{I} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{E}} << \mathbf{I}$, а також покласти $\hat{c} \approx 1$. Член, підкреслений двома рисками, також на порядок $O(\hat{\mathbf{E}})$ менший від напружень. Він характеризує залежність модулів пружності від напруженості електричного поля і, якщо вона несуттєва, то й цим членом можна знехтувати. Надалі в усіх формулах члени, якими можна знехтувати в рамках лінійної теорії пружності, підкреслюватимемо однією рискою, а члени, що характеризують залежність пружності від електричного поля, − двома.

Наявність електричного поля, взагалі кажучи, наводить в ізотропному матеріалі трансверсальну ізотропію. Відповідно потенціал пружності в цьому випадку має такий самий вигляд, як і для трансверсально ізотропного матеріалу:

$$\mathrm{U}(\hat{\mathbf{E}},\mathbf{e}) = \mathrm{U}(\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3, e_1, e_2, e_3)\,, \tag{2}$$

де

$$\hat{E}_i = \hat{\mathbf{E}}^i : \mathbf{I}/i, \qquad e_i = \mathbf{e}\cdot\hat{\mathbf{E}}^{i-1}\cdot\mathbf{e}/2, \qquad i = 1,2,3\,, \tag{3}$$

− скаляри, що утворюють повну систему незалежних інваріантів, породжених тензором другого рангу $\hat{\mathbf{E}}$ та вектором $\mathbf{e}$. З формул (2), (3) випливає таке рівняння пружності:

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathrm{U}_{,\hat{\mathbf{E}}} = \hat{\mathbf{S}}_a + \underline{\underline{\hat{\mathbf{S}}_n}}\,. \tag{4}$$

Тут

$$\hat{\mathbf{S}}_a \equiv \Lambda_1\mathbf{I} + \Lambda_2\hat{\mathbf{E}} + \underline{\Lambda_3\hat{\mathbf{E}}^2}, \qquad \hat{\mathbf{S}}_n \equiv \chi_2\mathbf{ee} + \chi_3(\mathbf{e}\cdot\hat{\mathbf{E}}\mathbf{e} + \mathbf{e}\hat{\mathbf{E}}\cdot\mathbf{e})\,, \tag{5}$$

де $\Lambda_i \equiv \partial\mathrm{U}/\partial\hat{E}_i$, $\chi_i \equiv \partial\mathrm{U}/\partial e_i$, $i = 1,2,3$. Доданок $\underline{\underline{\hat{\mathbf{S}}_n}}$ у виразі (4) дорівнює нулеві, якщо пружні властивості не залежать від напруженості. Власне він враховує наведену електричним полем трансверсальну ізотропію, оскільки головні осі першого доданка у формулі (4) збігаються з головними осями пружної деформації $\hat{\mathbf{E}}$ (чи міри $\hat{\mathbf{C}}$). Вирази (2), (4) задовольняють умову відсутності напружень і потенціальної енергії пружної деформації за відсутності останньої:

$$\forall\mathbf{e} \qquad \mathrm{U}\big|_{\hat{\mathbf{E}}=0} = 0, \qquad \hat{\mathbf{S}}\big|_{\hat{\mathbf{E}}=0} = 0\,. \tag{6}$$

З другої умови та з виразів (4) і (5) випливає, що $(\Lambda_1\mathbf{I} + \chi_2\mathbf{ee})\big|_{\hat{\mathbf{E}}=0} = 0$, звідки отримуємо, що $\Lambda_1 = \chi_2 = 0$, якщо $\hat{\mathbf{E}} = 0$.

Диференціюючи потенціал пружності (2) за напруженістю, дістанемо такий вираз для підкресленого двома рисками члена у формулі (1):

$$\mathrm{U}_{,\mathbf{e}} = \hat{\boldsymbol{\chi}}_a\cdot\mathbf{e}\,,$$

де

$$\hat{\boldsymbol{\chi}}_a \equiv \chi_1\mathbf{I} + \chi_2\hat{\mathbf{E}} + \chi_3\hat{\mathbf{E}}^2 \tag{7}$$

− тензорний многочлен, подібний до $\hat{\mathbf{S}}_a$. Але $O(\hat{\mathbf{S}}_a) = O(\hat{\mathbf{E}})$, тоді як $O(\hat{\boldsymbol{\chi}}_a) = O(\hat{\mathbf{E}}^2)$, оскільки з умов (6) випливає, що

$$\hat{\chi}_a\big|_{\hat{\mathbf{E}}=0} = 0, \qquad \hat{\chi}_{a,\mathbf{e}}\big|_{\hat{\mathbf{E}}=0} = 0 \;\Rightarrow\; \chi_1\big|_{\hat{\mathbf{E}}=0} = 0\,.$$

Крім потенціалу пружності, у рівнянні (1) симетрію матеріалу характеризує головно модуль вільної дисторсії $\tilde{\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}) \equiv \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}^{-1}\cdot\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{e},\mathbf{e}}$, де $\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}$ − міра вільної дисторсії, зумовленої зміною напруженості від нульового значення до власне поточного $\mathbf{e}$. Для ізотропного матеріалу [3]

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}) = F(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})[\mathbf{I} + f(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})\mathbf{ee}]. \tag{8}$$

Скалярний коефіцієнт F має зміст відносного видовження матеріальних елементів у площині, перпендикулярній до вектора напруженості. Коефіцієнт видовження уздовж вектора напруженості дорівнює $F(1 + f\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})$. З умови малої вільної дисторсії $\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}) \approx \mathbf{I}$ випливає, що $F \approx 1$, $|f\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}| \ll 1$. Обернена міра дисторсії має такий вигляд [3]:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}^{-1}(\mathbf{e}) = F^{-1}(\mathbf{I} - g\,\mathbf{ee}), \tag{9}$$

де $g \equiv f/(1 + f\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})$. З формул (8), (9) отримаємо такий вираз для модуля вільної дисторсії:

$$\tilde{\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{e}, \tag{10}$$

де тензор четвертого рангу

$$\tilde{\mathbf{K}} \equiv 2(\ln F)'\mathbf{II} + f\left[(1 - g\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})\mathbf{J}_2 + f\mathbf{I}_2 + (2f' - fg)\mathbf{eeI}\right] \approx$$
$$\approx 2\left[F'\mathbf{II} + f(\mathbf{J}_2 + \mathbf{I}_2) + 2f'\mathbf{eeI}\right]. \tag{11}$$

Тут $\mathbf{I}_2$ − тензор-інвертор, $\mathbf{J}_2 = \mathbf{I}_2 : \mathbf{I}_2$ − одиничний тензор, обидва є четвертого рангу [2]. Наближену рівність отримано на підставі умови малої вільної дисторсії. Підставляючи вираз (10) у рівняння стану (1) і враховуючи, що для ізотропного матеріалу $\tilde{\mathsf{W}} = \tilde{\mathsf{W}}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})$, отримаємо

$$\hat{c}\mathbf{d} = \tilde{\varepsilon}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e} + \hat{\mathbf{X}}(\hat{\mathbf{E}},\mathbf{e})\cdot\mathbf{e}, \tag{12}$$

де $\tilde{\varepsilon} = -2\tilde{\rho}\tilde{\mathsf{W}}'$ − ефективна проникність вільного від напружень тіла, а $\tilde{\rho}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}) = \hat{\rho}\hat{c}$ − його густина,

$$\hat{\mathbf{X}} \equiv (\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{C}} - \underline{\mathrm{U}\mathbf{I}}) : \tilde{\mathbf{K}} - \underline{\underline{\boldsymbol{\chi}_a}} \tag{13}$$

− ефективна п’єзосприйнятливість, що визначається напруженим станом тіла і дорівнює нулеві за відсутності напружень. Підставляючи сюди модуль вільної дисторсії (11), отримаємо такі вирази для перших двох доданків:

$$\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{C}} : \tilde{\mathbf{K}} = \left[2(\ln F)'\hat{\mathbf{S}} : \hat{\mathbf{C}} + (2f' - fg)\mathbf{e}\cdot\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{e}\right]\mathbf{I} +$$
$$+ f(1 - g\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{C}} + f\hat{\mathbf{C}}\cdot\hat{\mathbf{S}}, \tag{14}$$

$$\mathrm{U}\,\tilde{\mathbf{K}} : \mathbf{I} \equiv 2\,\mathrm{U}\left[3(\ln F)' + f(1 - g\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}) + f'\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}\right]\mathbf{I}. \tag{15}$$

Відкидаючи у цих формулах усі нелінійні члени та покладаючи, що поточні напруження тотожні початковим: $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}_0 \equiv \hat{\mathbf{S}}\big|_{\mathbf{e}=0}$, отримаємо наближений вираз для п’єзосприйнятливості, що лежить в основі лінійної теорії фотопружності − $\hat{\mathbf{X}} \approx 2\left[(\ln F)'\hat{\mathbf{S}} : \mathbf{II} + f\hat{\mathbf{S}}\right]$, де скалярні коефіцієнти відіграють роль «констант» фотопружності [1].

Поляризація світлового променя можлива лише в тих площинах, у яких напрямки векторів напруженості та індукції паралельні, тобто за умови $\mathbf{e}\times\mathbf{d} = \mathbf{e}\times(\hat{\mathbf{X}}\cdot\mathbf{e}) = 0$, яка показує, що вказані вектори паралельні лише вздовж головних осей тензора п’єзосприйнятливості (13). Напрямок головних осей довільного тензора другого рангу $\mathbf{A}$ визначається його девіаторною частиною $\mathbf{DevA} \equiv \mathbf{A} - \mathbf{A} : \mathbf{II}/3$. З формул (13)−(15) і (7) отримаємо такий вираз для девіатора проникності:

$$\mathbf{Dev}\hat{\mathbf{X}} \equiv \mathbf{Dev}\left(f(2 - g\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})\hat{\mathbf{S}} + \underline{f(1 - g\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{E}} + f\hat{\mathbf{E}}\cdot\hat{\mathbf{S}}} - \underline{\underline{(\chi_2\hat{\mathbf{E}} + \chi_3\hat{\mathbf{E}}^2)}}\right). \tag{16}$$

Якщо тут знехтувати підкресленими членами (що на порядок $O(\hat{\mathbf{E}})$ менші від напружень), то отримаємо наближений вираз для п’єзосприйнятливості, який показує, що її головні напрямки близькі до головних напрямків тензора напружень.

З виразу (16) видно, що тензор п'єзосприйнятливості співвісний з напруженнями лише тоді, коли вони, в свою чергу, співвісні з пружною деформацією. А ці два тензори, взагалі кажучи, не є співвісні за рахунок останнього доданка у рівнянні пружності (4), який характеризує наведену електричним полем анізотропію пружних властивостей, що власне і є причиною розбіжності між головними осями пружної деформації і напружень. Покажемо, що, якщо вектор напруженості спрямований уздовж головної осі тензора пружної деформації чи тензора напружень, тоді ці тензори співвісні. Враховуючи вирази (5), з рівняння пружності (4) отримаємо

$$\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{e} = \left[(\chi_2\mathbf{e}\cdot\mathbf{e} + \chi_3\mathbf{e}\cdot\hat{\mathbf{E}}\cdot\mathbf{e})\mathbf{I} + (\hat{\mathbf{S}}_a + \chi_3\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}\hat{\mathbf{E}})\right]\cdot\mathbf{e}, \quad \hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{h} = (\hat{\mathbf{S}}_a + \chi_3\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}\hat{\mathbf{E}})\cdot\mathbf{h},$$

де $\mathbf{h}$ − вектор, перпендикулярний до $\mathbf{e}$, так що $\mathbf{e}\cdot\mathbf{h} = 0$. Тензори в правих частинах цих рівностей співвісні з тензором пружної деформації. Тому, якщо вектор $\mathbf{e}$ є головним напрямком напружень, то він одночасно є і головним напрямком пружної деформації і, навпаки. Це ж саме стосується і вектора $\mathbf{h}$. Таким чином, доведено, що тензори напружень і пружної деформації співвісні, якщо вектор електричної напруженості спрямований уздовж довільного головного напрямку одного з цих тензорів.

Якщо рівняння пружності (4) і вирази (5) підставити замість напружень у формулу (12), то її можна записати у вигляді

$$\hat{c}\mathbf{d} = \tilde{\varepsilon}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e} + \hat{\mathbf{X}}_a(\hat{\mathbf{E}},\mathbf{e})\cdot\mathbf{e}, \tag{17}$$

де $\hat{\mathbf{X}}_a$ − ефективна проникність, співвісна з пружною деформацією, Дійсно, для неспіввісних з нею членів у виразі (14) отримаємо

$$\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{e} = (\boldsymbol{\Sigma}_a + \underline{2\chi_3\mathbf{e}\cdot\hat{\mathbf{E}}^2\cdot\mathbf{e}\mathbf{I}})\cdot\mathbf{e}, \qquad \hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{e} = (\boldsymbol{\Sigma}_a + \underline{2\chi_3\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}\hat{\mathbf{E}}^2})\cdot\mathbf{e},$$

де тензор

$$\boldsymbol{\Sigma}_a \equiv \hat{\mathbf{S}}_a\cdot\hat{\mathbf{C}} + \mathbf{e}\cdot\hat{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{e}(\chi_2\mathbf{I} + \chi_3\hat{\mathbf{E}}) + \chi_3\mathbf{e}\cdot\hat{\mathbf{E}}\cdot\mathbf{e}\mathbf{I} \approx$$
$$\approx \hat{\mathbf{S}}_a + \mathbf{e}\cdot\mathbf{e}(\chi_2\mathbf{I} + \chi_3\hat{\mathbf{E}}) + \chi_3\mathbf{e}\cdot\hat{\mathbf{E}}\cdot\mathbf{e}\mathbf{I} \tag{18}$$

є співвісний з пружною деформацією. Підставляючи ці вирази у формули (14) і (13), отримаємо вираз для деформаційно співвісної проникності

$$\hat{\mathbf{X}}_a \equiv \{2(\ln F)'(\hat{\mathbf{S}}:\hat{\mathbf{C}} - \underline{3\mathrm{U}}) + (2f' - fg)(\mathbf{e}\cdot\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{e} - \underline{\mathrm{U}\,\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}}) -$$
$$- \underline{f[\mathrm{U} + (1 - g\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})(\mathrm{U} - 2\chi_3\mathbf{e}\cdot\hat{\mathbf{E}}^2\cdot\mathbf{e})]}\}\mathbf{I} + f(2 - g\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})\boldsymbol{\Sigma}_a + \underline{2f\chi_3\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}\hat{\mathbf{E}}^2} \approx$$
$$\approx [2F'\hat{\mathbf{S}}:\mathbf{I} + (2f' - f^2)\mathbf{e}\cdot\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{e}]\mathbf{I} + 2f\boldsymbol{\Sigma}_a. \tag{19}$$

Отримані вище формули враховують змінні поточні напруження $\hat{\mathbf{S}}$ і пружну деформацію $\hat{\mathbf{E}}$, а не їх сталі початкові значення $\hat{\mathbf{S}}_0$, $\hat{\mathbf{E}}_0 \equiv \hat{\mathbf{E}}|_{\mathbf{e}=0}$. Можна з певністю стверджувати, що поточні значення цих величин відрізнятимуться від початкових, оскільки вплив напружень (чи пружної деформації) на проникність спряжений із збуренням натуральної конфігурації, яке, взагалі кажучи, призводить до зміни накопиченої пружної деформації та відповідно напружень [4]. Для виділення початкової пружної деформації скористаємося формулами суперпозиції дисторсії [5]

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}\cdot\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_0\cdot\mathbf{F}_{\mathbf{e}}, \qquad \mathbf{F}_0 = \tilde{\mathbf{F}}_0\cdot\hat{\mathbf{F}}_0, \qquad \tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}_0\cdot\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}, \qquad \hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{F}}_0\cdot\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}. \tag{20}$$

Тут $\mathbf{F}$, $\tilde{\mathbf{F}}$, $\hat{\mathbf{F}}$ − тензори повної, вільної та пружної дисторсії відповідно. Нижнім індексом «0» позначено їх початкові значення, а індексом «$\mathbf{e}$» − додаткову дисторсію, зумовлену полем напруженості та іншими можливими факторами. Зокрема, додаткова повна дисторсія визначається накладеним полем зміщень $\mathbf{w}$: $\mathbf{F_e} = \mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{w}$, ∇_0 − початковий (матеріальний) градієнт. Якщо динамічний механічний вплив на тіло відсутній, то здійснюється умова жорсткого защемлення його елементів: $\mathbf{w} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{F_e} = \mathbf{I}$. Можна припустити, що швидкозмінне електромагнітне поле не призводить до деформування тіла, а тому в умовах неруйнівного фотопружного контролю $\mathbf{F_e} = \mathbf{I}$ (хоча, з іншого боку, не можна виключати стороннього механічного впливу, наприклад, вібрації вимірювальної установки). Зі співвідношень (20) отримаємо такий вираз для поточної пружної дисторсії через початкову та додаткові повну й вільну дисторсії:

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{F}}_\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{F_e} = \tilde{\mathbf{F}}_0 \cdot \hat{\mathbf{F}}_0 \cdot \mathbf{F_e} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}_\mathbf{e}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{F}}_0 \cdot \mathbf{F_e} .$$

Звідси випливає такий вираз для міри пружної дисторсії:

$$\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{F}}^\mathsf{T} = \tilde{\mathbf{F}}_\mathbf{e}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{F}}_0 \cdot \mathbf{C_e} \cdot \hat{\mathbf{F}}_0^\mathsf{T} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_\mathbf{e}^{-1} , \tag{21}$$

де $\mathbf{C_e} = \mathbf{F_e} \cdot \mathbf{F_e^\mathsf{T}}$ − міра додаткової повної деформації. Якщо $\mathbf{C_e} = \mathbf{I}$, то з формул (21) і (9) отримаємо співвідношення, що пов’язують поточну та початкову пружну деформацію через міру додаткової вільної дисторсії:

$$\mathbf{C_e} = \mathbf{I} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\mathbf{E}} = F^{-2}(\hat{\mathbf{E}}_0 + \hat{\mathbf{E}}_\mathbf{e}) , \tag{22}$$

де

$$\hat{\mathbf{E}}_\mathbf{e} = -\{g[\mathbf{ee} \cdot \hat{\mathbf{C}}_0 + \hat{\mathbf{C}}_0 \cdot \mathbf{ee} - \underline{(g\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{C}}_0 \cdot \mathbf{e})\mathbf{ee}}] + (F^2 - 1)\mathbf{I}\}/2 \approx 1 - \tilde{\mathbf{F}}_\mathbf{e} \tag{23}$$

− пружна деформація, зумовлена електричним полем. Вона не співвісна з початковою за рахунок членів у квадратних дужках, пропорційних до модуля f, що характеризує електричну вільну деформацію вздовж вектора напруженості. Таким чином, причина неспіввісності між початковою і поточною пружною деформацією відмінна від причини неспіввісності між поточними деформацією і напруженнями. Натомість з рівняння пружності (4) і виразів (5) випливає, що початкові напруження $\hat{\mathbf{S}}_0 \equiv \hat{\mathbf{S}}|_{\mathbf{e}=0} = \hat{\mathbf{S}}_{a0} \equiv \hat{\mathbf{S}}_a|_{\mathbf{e}=0}$ співвісні з початковою пружною деформацією.

З рівностей (22), (23) випливає, що у згортці з вектором напруженості поточну пружну деформацію можна замінити тензором, співвісним з початковою пружною деформацією:

$$\hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{e} = [F_2^{-1}(\hat{\mathbf{E}}_0 - E\mathbf{I})] \cdot \mathbf{e}, \qquad \hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{e} = [F_2^{-1}F^{-2}(\hat{\mathbf{E}}_0^2 - E_1\hat{\mathbf{E}}_0 - E_2\mathbf{I})] \cdot \mathbf{e} , \tag{24}$$

де

$$F_2 \equiv F^2(1 + \underline{f\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}}) \approx 1, \qquad E \equiv (F_2 - 1 + g\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{C}}_0 \cdot \mathbf{e})/2 \approx (F - 1 + f\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) ,$$

$$E_1 \equiv F^2 - 1 + g\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{C}}_0 \cdot \mathbf{e}(1 - g\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}/2) \approx 2(F - 1) + f\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} ,$$

$$E_2 \equiv g[\mathbf{e} \cdot (\hat{\mathbf{C}}_0 + \mathbf{I}) \cdot \hat{\mathbf{E}}_0 \cdot \mathbf{e} - \underline{(g\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{C}}_0 \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{E}}_0 \cdot \mathbf{e}}]/2 - (1 - g\mathbf{e} \cdot \mathbf{e})E^2 \approx$$

$$\approx f\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{E}}_0 \cdot \mathbf{e} - E^2 .$$

Підставляючи у вирази (17)−(19) замість згорток тензора поточної накопиченої пружної деформації та його квадрата з вектором напруженості відповідні праві частини рівностей (24), отримаємо замість (17) рівняння стану, в якому тензор п’єзосприйнятливості явно залежить від початкової пружної деформації та співвісний з нею, а, отже, і з початковими напруженнями. Якщо початкова пружна деформація об’ємна (зокрема, нульова), то така п’єзосприйнятливість є кульовим (ізотропним) тензором внаслідок рівностей (24). Таким чином, строго (без будь-яких допущень) доведено, що в ізотропному матеріалі лише головні осі девіатора початкової пружної деформації (чи початкових напружень) є сталими (стабільними), незалежними від поточного стану напрямками, вздовж яких можлива поляризація світлового променя.

1. *Абен Н. К.* Интегральная фотоупругость. – Таллинн: Валгус, 1975. – 218 с.
2. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. – Москва: Наука, 1980. – 512 с.
3. *Прокопович І. Б.* Визначальне рівняння електричної чи магнетної деформації в ізотропному матеріалі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – **41,** № 6. – С. 37–41.
4. *Прокопович І. Б.* Загальні вирази впливу напружень на діелектричну або магнетну проникність // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – **41,** № 4. – С. 77–85.
5. *Прокопович І. Б.* Загальні властивості нелінійних рівнянь вільної від напружень деформації // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 3. – С. 87–94.

ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НАПРЯЖЕННОГО ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

С помощью метода свободной дисторсии общее (нелинейное) потенциальное диэлектрическое уравнение состояния в начально напряженном изотропном материале сведено к формуле через эффективную проницаемость. Построены два различных тензора проницаемости: один – непосредственно зависит от текущих напряжений, но не соосный с ними, а второй – зависит от тензора текущей упругой деформации и соосный с ним. Показано, что, когда вектор диэлектрической напряженности совпадает с главным направлением тензора текущей накопленной упругой деформации, тогда этот тензор и тензоры проницаемости и текущих напряжений становятся соосными. Для динамической проницаемости построено выражение, зависящее от тензора начальной упругой деформации и соосное с ним и соответственно – с тензором начальных напряжений. Таким образом, доказано, что нелинейные эффекты, сопровождающие распространение электромагнитных волн в напряженном изотропном диэлектрике, не влияют на их поляризацию вдоль главных направлений тензора начальных напряжений.

EXPRESSIONS FOR EFFECTIVE DIELECTRIC PERMITTIVITY OF STRESSED ISOTROPIC MATERIAL

By the method of free distortion, the general (non-linear) dielectric equation of the state of isotropic material is reduced to formulas with effective permittivity. Two different tensors of permittivity are constructed. The first of them depends directly on the actual stress tensor but is not coaxial to it. The second one depends on the tensor of actual accumulated elastic deformation and is coaxial to it. It is shown that the tensors of permittivity, elastic deformation and stresses are coaxial when vector of electric intensity is directed along the principal axis of the deformation tensor. For the tensor of dynamic permittivity, the expression depending on the initial elastic deformation and coaxial to it is constructed. So it is proved that non-linear effects of electromagnetic waves propagation in initially stressed isotropic material do not influence their polarization along the principal axes of tensor of initial stresses.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
27.05.05