

## ДОСЛІДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРІЇ R-ФУНКЦІЙ

Розглядається задача про вільні коливання композитних багатошарових пластин складної форми при різних способах закріплення. Припускається, що проковзування між шарами відсутнє, фізичні характеристики та товщина заповнювача можуть суттєво відрізнятися від відповідних характеристик зовнішніх шарів. Математичну постановку задачі виконано в рамках уточненої теорії типу Тимошенка. Наведено числові результати для багатошарових композитних пластин складної геометрії і різних видів граничних умов. Для квадратних пластин виконано порівняння з відомими результатами та встановлено добре їх узгодження, що свідчить про ефективність запропонованого методу.

Дослідження вільних коливань багатошарових пластин та оболонок є одним із актуальних розділів динаміки, оскільки багато елементів сучасних конструкцій моделюються як композитні пластини та оболонки. Суттєвий внесок у теорію і методи розрахунку багатошарових пластин та оболонок внесли А. Я. Александров, С. О. Амбарцумян, В. В. Болотін, А. Т. Василенко, А. С. Вольмір, Е. І. Григолюк, Я. М. Григоренко, А. Т. Панкратова, О. О. Расказов, J. N. Reddy, L. Librescu [1–8,12–15] та інші. Для дослідження багатошарових пластин при наявності легкого заповнювача найчастіше використовують уточнені теорії і метод скінченних елементів. Зазначимо, що визначення власних частот коливань є складовою частиною більш складної проблеми про нелінійні вільні й вимушені коливання. Для розв'язання цієї проблеми бажано знаходити власні функції в аналітичному вигляді.

У цій роботі запропоновано метод, який дозволяє одержувати власні функції в аналітичному вигляді для будь-якої геометрії пластини та різних видів граничних умов. Цей метод базується на сумісному використанні теорії R-функцій та варіаційного методу Рітца.

**Постановка задачі.** Розглядаються багатошарові пластини сталої товщини  $h$ . Припускається, що проковзування між шарами відсутнє. Таким чином, композитну багатошарову пластину можна розглядати як одношарову зі зведеними механічними характеристиками. Постановку задачі розглядаємо в рамках уточненої теорії типу моделі Тимошенка. Згідно з цією теорією переміщення довільної точки пластини визначаються як  $u^z = u + z \cdot \psi_x$ ,  $v^z = v + z \cdot \psi_y$ ,  $w^z = w$ , де  $u, v, w$  – переміщення точок координатної поверхні;  $\psi_x, \psi_y$  – кути обертання нормалі [4]. У рамках уточненої теорії рівняння руху мають вигляд [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x - \frac{\gamma h^3}{12g} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} - Q_y - \frac{\gamma h^3}{12g} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Диференціальні рівняння (1) доповнюються відповідними граничними умовами. Наведемо деякі типи граничних умов, які будуть використовуватися надалі при розв'язуванні задач:

– жорстке закріплення

$$w = 0, \quad \psi_x = 0, \quad \psi_y = 0; \quad (2)$$

– вільне опирання

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad \psi_\tau = 0 \quad \text{або} \quad w = 0, \quad \psi_\tau = 0, \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial n} = 0, \quad (3)$$

де  $n$  і  $\tau$  – нормаль і дотична до границі області  $\partial\Omega$ , а вирази для  $\psi_\tau$  і  $\psi_n$  мають вигляд

$$\begin{aligned} \psi_\tau &= \psi_y \cos \alpha - \psi_x \cos \beta, \\ \psi_n &= \psi_x \cos \alpha + \psi_y \cos \beta, \end{aligned}$$

$\alpha$  та  $\beta$  – кути, які утворює зовнішня нормаль  $n$  до границі області з осями координат  $Ox$  та  $Oy$ .

**Метод розв'язування.** Розглянемо варіаційну постановку цієї задачі, яка зводиться до знаходження точки стаціонарності функціонала [2, 4]

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ D_{11} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 + 2D_{12} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + D_{66} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 + A_{44} \left[ \psi_y^2 + 2\psi_y \frac{\partial w}{\partial y} + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + A_{55} \left[ \psi_x^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\psi_x \frac{\partial w}{\partial x} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - \lambda^2 [m_1 w^2 + m_2 (\psi_x^2 + \psi_y^2)] \right\} d\Omega, \quad (4) \end{aligned}$$

де значення  $D_{ij}$ ,  $A_{ij}$ ,  $m_1$  та  $m_2$  визначаються аналогічно, як і в [2].

Дискретизацію функціонала (4) будемо виконувати за допомогою методу Рітца. У роботі послідовності координатних функцій  $\{\psi_{xi}\}$ ,  $\{\psi_{yi}\}$ ,  $\{w_i\}$  будуються за допомогою теорії  $R$ -функцій. Згідно з методом  $R$ -функцій основою для побудови послідовності координатних функцій є встановлення структури розв'язку крайової задачі, вигляд якої визначається граничними умовами.

Застосовуючи теорію  $R$ -функцій, можна побудувати нормалізоване рівняння границі області  $\omega(x, y)$  у вигляді єдиного аналітичного виразу [9]. При цьому  $\omega(x, y)$  задовольняє умови

$$\begin{aligned} \omega &= 0 & \forall M(x, y) \in \partial\Omega, \\ \frac{\partial \omega}{\partial n} &= -1 & \forall M(x, y) \in \partial\Omega, \\ \omega(x, y) &> 0 & \forall M(x, y) \in \Omega. \end{aligned} \quad (5)$$

З огляду на умови (5) напрямні косинуси нормалі до границі області співпадають із частинними похідними від  $\omega(x, y)$ , тобто

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\cos \alpha, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\cos \beta. \quad (6)$$

Якщо права частина рівнянь (6) має зміст тільки на границі області, то ліва має зміст не тільки на границі, але й усередині області, отже, формули (6) є формулами продовження напрямних косинусів у середину області.

Наприклад, для граничних умов (3) функції  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  та  $w$  виберемо таким чином:

$$\psi_x = \frac{\partial \omega}{\partial x} P_2 + \omega P_3, \quad \psi_y = \frac{\partial \omega}{\partial y} P_2 + \omega P_4, \quad w = \omega P_1, \quad (7)$$

де  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , – невизначені компоненти структури розв'язку [10].

У випадку жорсткого закріплення (2) структура розв'язку має більш просту форму:

$$w = \omega P_1, \quad \psi_x = \omega P_2, \quad \psi_y = \omega P_3. \quad (8)$$

Невизначені компоненти в структурних формулах (7), (8) подамо як

$$P_1 = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i^{(1)}, \quad P_2 = \sum_{i=1}^n b_i \varphi_i^{(2)}, \quad P_3 = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i^{(3)}, \quad P_4 = \sum_{i=1}^n d_i \varphi_i^{(4)}, \quad (9)$$

де  $\{\varphi_i^{(k)}\}$  – деяка повна система функцій, а  $a_i, b_i, c_i, d_i$  – невизначені коефіцієнти. Підставляючи (9) у формули (7) і (8), одержимо структурні вирази для невідомих функцій  $\psi_x, \psi_y$  та  $w$ :

$$W = \sum_{i=1}^{N_3} c_i w_i, \quad \Psi_x = \sum_{i=1}^{N_1} a_i \psi_{xi}, \quad \Psi_y = \sum_{i=1}^{N_2} b_i \psi_{yi}.$$

Послідовності координатних функцій  $\{\psi_{xi}\}, \{\psi_{yi}\}, \{w_i\}$  визначаються за формулами

– для умов вільного опирання

$$w_i = \omega \varphi_i^{(1)}, \quad \psi_x = \frac{\partial \omega}{\partial x} \varphi_i^{(2)} + \omega \varphi_i^{(3)}, \quad \psi_y = \frac{\partial \omega}{\partial y} \varphi_i^{(2)} + \omega \varphi_i^{(4)};$$

– для умов жорсткого закріплення

$$w_i = \omega \varphi_i^{(1)}, \quad \psi_x = \omega \varphi_i^{(2)}, \quad \psi_y = \omega \varphi_i^{(3)}.$$

Невизначені коефіцієнти  $a_i, b_i, c_i, d_i$  знаходимо з умов стаціонарності функціонала (4).

**Числові результати.** Числово реалізацію запропонованого підходу виконано в рамках системи *POLE-RL* [11] і проілюстровано як на тестових прикладах, так і на складніших задачах.

**Приклад 1.** Розглянемо багатошарову квадратну пластину, зображену на рис. 1а, з такою укладкою шарів:  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /заповнювач/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ . Приймаємо, що вільно оперта по всьому контуру пластина виготовлена з матеріалів, пружні сталі яких мають такі значення:

а) зовнішні шари – glass polyester

$$E_1 = 24.51 \text{ Гпа}, \quad E_2 = 7.77 \text{ Гпа}, \quad G_{12} = G_{13} = 3.34 \text{ Гпа}, \quad G_{23} = 1.34 \text{ Гпа}, \\ \rho_s = 1800 \text{ кг/м}^3, \quad \nu_s = 0.078;$$

б) заповнювач – HEREX C70.130

$$E_c = 103.63 \text{ Гпа}, \quad G_c = 50 \text{ Мпа}, \quad \rho_c = 130 \text{ кг/м}^3, \quad \nu_c = 0.32.$$

Структура розв'язку цієї задачі задовольняє головні граничні умови та має такий вигляд:  $w = \omega P_1, \psi_x = \omega_2 P_2, \psi_y = \omega_1 P_3$ , де  $P_i, i = 1, 2, 3$ , – невизначені компоненти (9);  $\omega(x, y) = 0$  – рівняння границі області;  $\omega_1(x, y) = 0$  – рівняння частини області, паралельної до осі  $Oy$ ;  $\omega_2(x, y) = 0$  – рівняння частини області, паралельної до осі  $Ox$ . Для квадратної пластини  $\omega, \omega_1, \omega_2$  мають вигляд

$$\omega = \frac{F_1 + F_2}{F_1 \cdot F_2}, \quad \omega_1 = F_1, \quad \omega_2 = F_2,$$

де

$$F_1 = \left( \sigma_1 = \frac{1}{2a} (a^2 - x^2) \geq 0 \right) \quad (10)$$

– вертикальна смуга між прямими  $x = \pm a$ ;

$$F_2 = \left( \sigma_2 = \frac{1}{2b} (b^2 - y^2) \geq 0 \right) \quad (11)$$

– горизонтальна смуга між прямими  $y = \pm b$ .

Аналогічна задача розв'язана раніше в [14]. При цьому для її розв'язування використано теорію Редді. Для розрахованих нами перших двох частот проведено порівняння значень безрозмірного частотного параметра

$\Lambda_i = \frac{\lambda_i (2a)^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c}$ ,  $i = 1, 2$ , з результатами роботи [14] при  $2a/h = 10$  і  $h_c/h = 0.88$ . При цьому коефіцієнт зсуву  $k$  приймали таким:  $k = 0.19$ .

Значення частот, отриманих за допомогою методу  $R$ -функцій, дорівнюють  $\Lambda_1 = 15.14$  та  $\Lambda_2 = 27.68$ , а відповідні частоти, одержані в [14],  $\Lambda_1 = 15.22$  та  $\Lambda_2 = 27.75$ . Отже, отримані результати добре співпадають з наведеними в літературі, що свідчить про ефективність запропонованого методу.

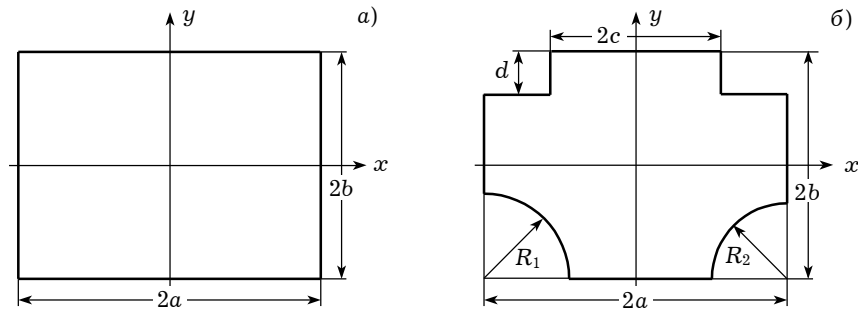


Рис. 1

**Приклад 2.** Розглянемо композитну семишарову пластину складної планформи (рис. 1б) із того ж матеріалу з такою самою укладкою шарів, що й у прикладі 1, але з двома способами закріплення: **а)** жорстке закріплення; **б)** шарнірне опирання.

Використовуючи теорію  $R$ -функцій, побудуємо рівняння границі області, зображеної на рис. 1б:

$$\omega = (F_1 \wedge_0 F_2) \wedge_0 (F_3 \vee_0 F_6) \wedge_0 F_4 \wedge_0 F_5,$$

де  $\wedge_0$ ,  $\vee_0$  – символи  $R$ -операцій:  $R$ -кон'юнкції і  $R$ -диз'юнкції, які відповідно визначаються як [9, 10]

$$X \wedge_0 Y = X + Y - \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad X \vee_0 Y = X + Y + \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

При цьому  $F_1$  і  $F_2$  мають вигляд (10), (11), а  $F_i$ ,  $i = 3, 4, 5, 6$ , визначаються як:

$$F_3 = \left( \sigma_3 = \frac{c^2 - x^2}{2c} \geq 0 \right) - \text{вертикальна смуга між прямими } x = \pm c;$$

$$F_4 = \left( \sigma_4 = \frac{(x+a)^2 + (y+b)^2 - R_1}{2R_1} \geq 0 \right) - \text{область, яка розташована поза колом радіуса } R_1 \text{ з центром у точці } (-a, -b);$$

$$F_5 = \left( \sigma_5 = \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 - R_2}{2R_2} \geq 0 \right) - \text{область, яка розташована поза колом радіуса } R_2 \text{ з центром у точці } (a, b);$$

$$F_6 = (\sigma_6 = y - (b-d) \geq 0) - \text{півплощина, яка розміщена над прямою } y = b - d.$$

Слід зазначити, що побудована таким чином функція  $\omega(x, y)$  перетворюється у нуль тільки на межі області, додатна всередині області, а її похідна за зовнішньою нормаллю до межі області дорівнює  $-1$ . Тобто виконуються умови (5).

Структура розв'язку задачі у випадку жорсткого закріплення має вигляд (8), для шарнірного опирання – (7).

Таблиця 1

$R_1/2a$	$R_2/2a$	$d/2a$	$c/2a$	Вільне опирання		Жорстке закріплення	
				$\Lambda_1$	$\Lambda_2$	$\Lambda_1$	$\Lambda_2$
0.35	0.35	0.35	0.2	18.934	35.299	27.853	44.678
	0.3	0.3	0.3	15.797	30.065	22.347	36.780
	0.2	0.2	0.4	14.078	27.789	19.700	32.416
	0.01	0.1	0.49	13.567	27.402	19.244	31.463
0.3	0.35	0.35	0.2	18.870	35.871	27.854	44.682
	0.3	0.3	0.3	15.720	30.014	22.341	36.771
	0.2	0.2	0.4	14.001	27.743	19.685	32.397
	0.01	0.1	0.49	13.450	27.346	19.216	31.430
0.2	0.35	0.35	0.2	18.868	35.865	27.864	44.699
	0.3	0.3	0.3	15.723	29.998	22.343	36.775
	0.2	0.2	0.4	14.001	27.728	19.681	32.391
	0.01	0.1	0.49	13.380	27.323	19.200	31.412
0.01	0.35	0.35	0.2	19.542	35.940	27.880	44.723
	0.3	0.3	0.3	16.760	30.171	22.353	36.789
	0.2	0.2	0.4	15.367	27.975	19.686	32.396
	0.01	0.1	0.49	15.140	27.683	19.195	31.406

У табл. 1 наведено результати дослідження впливу глибини вирізу на величину безрозмірного частотного параметра  $\Lambda_i$ . Зауважимо, що, якщо  $c \rightarrow a$ , а  $d \rightarrow 0$ ,  $R_1 \rightarrow 0$ ,  $R_2 \rightarrow 0$ , то планформа розглянутої пластини прямує до квадратної. Отже, отримані значення власних частот повинні прямувати до відповідних значень квадратної пластини. Цей факт у роботі використано для контролю достовірності отриманих результатів.

Зазначимо, що змінюючи значення параметрів  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $c/2a$ ,  $d/2a$ , одержуємо різні варіанти геометричних форм пластини. Наприклад, якщо покласти  $R_1 = R_2 = 0$ , то форма пластини набуде вигляду, зображеного на рис. 2а. Якщо покласти  $c/2a = 1$ ,  $d/2a = 0$ , то форма співпадає із зображеною на рис. 2б. Якщо  $R_1 = 0$ ,  $c/2a = 1$ ,  $d/2a = 0$ , то пластинка має вигляд, як на рис. 2в, і т. д. Для описаних форм пластини в табл. 2 наведено результати дослідження впливу глибини одного з вирізів на величину безрозмірного частотного параметра для вільно опертої пластини. Як і передбачалось, при значеннях  $c/2a = 0.4$ ,  $d/2a = 0.1$ ,  $R_1/2a = R_2/2a = 0.1$  значення частот прямують до відповідних частот квадратної пластини.

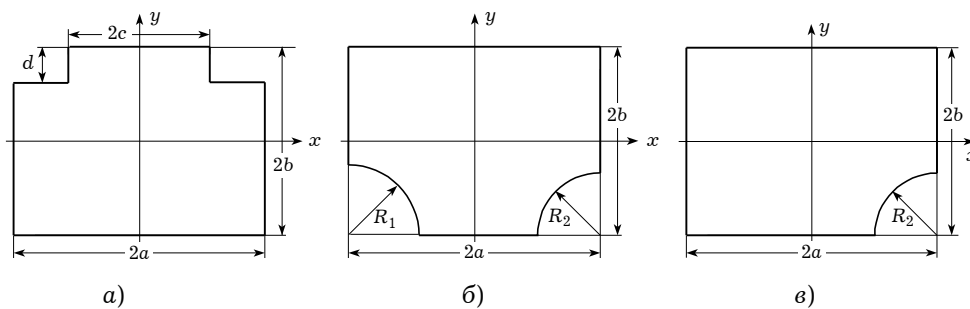


Рис. 2

Таблиця 2

	$R_1 = R_2 = 0$ (рис. 2а)			$c/2a = 1, d/2a = 0$ (рис. 2б)			$R_1 = 0, c/2a = 1, d/2a = 0$ (рис. 2в)		
	$(c/2a; d/2a)$			$(R_1/2a; R_2/2a)$			$R_2/2a$		
	(0.2; 0.4)	(0.3; 0.3)	(0.4; 0.1)	(0.4; 0.4)	(0.3; 0.3)	(0.1; 0.1)	0.4	0.3	0.1
$\Lambda_1$	19.537	16.758	15.368	18.690	17.131	15.141	16.684	16.159	15.142
$\Lambda_2$	35.927	30.183	27.979	33.942	31.266	27.683	28.998	28.678	27.685

Кількість координатних функцій визначали в результаті числового експерименту. Практичну збіжність результатів до 3-го знаку отримано при урахуванні 155 координатних функцій ( $N_1 = 45, N_2 = 55, N_3 = 55$ ).

**Приклад 3.** Дослідимо вільні коливання вільно опертої семишарової пластини, зображеної на рис. 1б, з укладкою шарів такою самою, що й у прикладі 2. Будемо вважати, що зовнішні шари виготовлені з матеріалу glass polyester, а пружні характеристики заповнювача HEREX C70.40 приймаємо такими:  $E_c = 22.69$  МПа,  $G_c = 14$  Мпа,  $\rho_c = 40$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu_c = 0.32$ .

На рис. 3 зображено залежності перших двох безрозмірних частотних параметрів  $\Lambda_i = \frac{\lambda_i(2a)^2}{h} \sqrt{\rho_c/E_c}$ ,  $i = 1, 2$ ,

при  $2a/h = 10$  від товщини середнього шару та фізичних характеристик заповнювача: криві, позначені  $\Lambda_2, \Lambda_4$ , відповідають заповнювачу HEREX C70.130, а  $\Lambda_1, \Lambda_3$  – HEREX C70.40.

З аналізу проведених розрахунків випливає, що значення частот пластини при збільшенні товщини заповнювача не завжди змінюються лінійно. Криві  $\Lambda_2, \Lambda_4$  розміщені вище від  $\Lambda_1, \Lambda_3$ , що відповідає фізичному змісту задачі.

**Приклад 4.** Розглянемо вільно оперту  $n$ -шарову пластину зображену на рис. 4, з такою укладкою шарів:  $0^\circ/90^\circ/\dots/0^\circ$ ,  $n = 3, 5$ . Зауважимо, що форма цієї пластини є також частковим випадком форми, зображеної на рис. 1б, коли відсутні деякі вирізи. Шари виготовлені з ортотропного матеріалу, мають однакову товщину та такі характеристики:

$$E_1/E_2 = 3, 10, 20, 30, 40,$$

$$G_{23}/E_2 = 0.5, \quad G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.6, \quad \nu_{12} = 0.2.$$

Геометричні параметри пластини такі:  $b/a = 1, h/2a = 0.2$ . У табл. 3 наведено результати дослідження впливу анізотропії матеріалу шарів, а також глибини вирізів на значення безрозмірного частотного параметра  $\Lambda_1 = 10\lambda h\sqrt{\rho/E_2}$ , що відповідає основній частоті. Слід зазначити, що при мінімальній глибині вирізу значення частот прямують до відповідних значень квадратної пластини. Цей факт також підтверджує достовірність отриманих результатів.

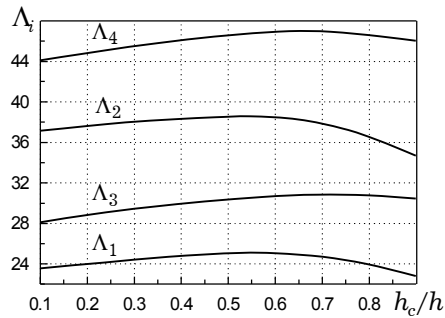


Рис. 3

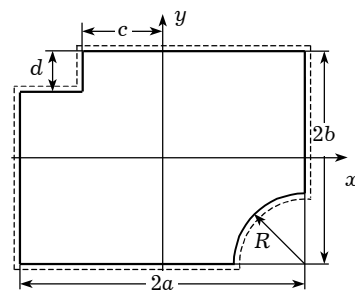


Рис. 4

Таблиця 3

$R/2a$	$c/2a$	$d/2a$	$n$	$E_1/E_2$				
				3	10	20	30	40
0.4	0.2	0.4	3	4.175	4.858	5.290	5.520	5.693
	0.3	0.3		3.556	4.231	4.670	4.905	5.082
	0.4	0.2		3.249	3.921	4.368	4.610	4.793
	0.49	0.1		3.190	3.871	4.323	4.568	4.753
0.3	0.2	0.4		3.653	4.311	4.740	4.970	5.142
	0.3	0.3		3.155	3.820	4.257	4.488	4.660
	0.4	0.2		2.909	3.577	4.022	4.257	4.433
	0.49	0.1		2.862	3.537	3.986	4.224	4.402
0.2	0.2	0.4		3.429	4.038	4.449	4.673	4.843
	0.3	0.3		2.993	3.621	4.042	4.266	4.434
	0.4	0.2		2.775	3.412	3.843	4.070	4.240
	0.49	0.1		2.734	3.378	3.813	4.042	4.214
0.1	0.2	0.4		3.278	3.888	4.307	4.537	4.710
	0.3	0.3		2.877	3.508	3.936	4.163	4.333
	0.4	0.2		2.675	3.317	3.753	3.982	4.154
	0.49	0.1		2.637	3.286	3.726	3.957	4.130
квадратна			2.620	3.271	3.711	3.941	4.114	
[14]			2.624	3.264	3.697	3.941	4.105	
0.4	0.2	0.4	5	4.217	5.087	5.679	6.010	6.224
	0.3	0.3		3.594	4.448	5.045	5.385	5.607
	0.4	0.2		3.292	4.155	4.766	5.117	5.347
	0.49	0.1		3.235	4.109	4.728	5.083	5.316
0.3	0.2	0.4		3.469	4.244	4.807	5.136	5.355
	0.3	0.3		3.012	3.766	4.336	4.677	4.905
	0.4	0.2		2.791	3.548	4.131	4.481	4.717
	0.49	0.1		2.749	3.514	4.103	4.457	4.695
0.2	0.2	0.4		3.697	4.526	5.107	5.439	5.657
	0.3	0.3		3.185	3.992	4.578	4.921	5.147
	0.4	0.2		2.938	3.749	4.348	4.701	4.935
	0.49	0.1		2.892	3.711	4.317	4.674	4.911
0.1	0.2	0.4		3.319	4.102	4.676	5.014	5.239
	0.3	0.3		2.896	3.652	4.231	4.578	4.812
	0.4	0.2		2.688	3.445	4.036	4.393	4.633
	0.49	0.1		2.649	3.414	4.010	4.370	4.613
квадратна			2.640	3.399	3.996	4.357	4.501	
[14]			2.637	3.373	3.929	4.257	4.478	

**Висновок.** У роботі запропоновано метод дослідження вільних коливань багатошарових композитних пластин довільної форми у випадку, коли фізичні характеристики заповнювача суттєво відрізняються від характеристик зовнішніх шарів, а також, коли шари мають однакові механічні характеристики. Ця задача є складовою частиною задач про нелінійні коливання багатошарових композитних пластин, дослідження яких передбачається в подальшому.

1. Александров А. Я. Расчет элементов авиационных конструкций, трехслойные пластины и оболочки. – Москва: Машиностроение, 1985. – 203 с.
2. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 448 с.
3. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1980. – 375 с.
4. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – Москва: Наука, 1972. – 432 с.
5. Григолюк Э. И., Коган Ф. А. Современное состояние теории многослойных оболочек // Прикл. механика. – 1972. – 8, № 6. – С. 5–17.

6. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 216 с.
7. Гузь А. Н., Григоренко Я. М., Бабич И. Ю. Механика композитных материалов и элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1983. – 464 с. – (Механика элементов конструкций: В 3 т. – Т. 2.)
8. Пискунов В. Г., Рассказов А. О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 2. – С. 22–56.
9. Рвачев В. Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1987. – 174 с.
10. Рвачев В. Л., Курна Л. В.  $R$ -функции в задачах теории пластин. – Киев: Наук. думка, 1987. – 176 с.
11. Рвачев В. Л., Шевченко А. Н. Проблемно ориентированные языки и системы для инженерных расчетов. – Киев: Техника, 1988. – 198 с.
12. Librescu L., Haise T. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: A survey // Composite Struct. – 2000. – **48**. – P. 1–17.
13. Meurer M., Sheno R. A. Free vibration analysis of composite sandwich plates // Proc. ImechE, Part C: J. Mech. Engng Sci. – 1999. – **213**, No. 7. – P. 715–727.
14. Nayak A. K., Moy S. S. J., Sheno R. A. Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher-order theory // Composites: Part B. – **33**. – 2002. – P. 505–519.
15. Reddy J. N. Large amplitude flexural vibration of layered composite plates with cutouts // J. Sound Vibr. – 1982. – **83**. – P. 1–10.

### ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ $R$ -ФУНКЦИЙ

*Рассматривается задача о свободных колебаниях композитной многослойной пластины сложной формы с различными способами закрепления. Допускается, что проскальзывание между слоями отсутствует, физические характеристики и толщина заполнителя могут существенно отличаться от соответствующих характеристик внешних слоев. Математическая постановка задачи выполнена в рамках уточненной теории типа Тимошенко. Приведены числовые результаты для многослойных композитных пластин сложной геометрии и различных видов граничных условий. Для квадратных пластин выполнено сравнение с известными результатами и установлено их хорошее совпадение, что свидетельствует об эффективности предложенного метода.*

### INVESTIGATION OF FREE VIBRATIONS OF LAMINATED PLATES BY $R$ -FUNCTION THEORY

*The problem on free vibrations of composite laminated plates with complex plan-forms and different boundary conditions is considered. It is assumed that slippage between the layers is absent, the physical characteristics and thickness of the core can essentially differ from the appropriate characteristics of the face layers. Mathematical statement of the problem is carried out using the Timoshenko-type theory. Numerical results for laminated composite plates of complex geometry and different types of boundary conditions are presented. The results obtained for square composite plates have been compared with the known ones what proves the effectiveness and validity of the offered method.*

Нац. техн. ун-т  
«Харків. політехн. ін-т», Харків

Одержано  
27.10.05