

ДИФРАКЦІЯ SH-ХВИЛЬ ТОНКИМ ПРЯМОЛІНІЙНИМ ТУНЕЛЬНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ НИЗЬКОЇ ЖОРСТКОСТІ В ПІВПРОСТОРІ

Досліджуються напруження поблизу країв прямолінійного тонкого тунельного включення змінної товщини та низької жорсткості, що знаходиться у пружному півпросторі. Пружна система перебуває в умовах поздовжнього зсуву при дії на неї плоскої SH-хвилі. Методика ґрунтується на використанні методу сингулярних інтегральних рівнянь та методу ортогональних многочленів.

Взаємодія пружних хвиль з тонкими пружними включеннями переважно розглядалась за умови, що неоднорідність знаходиться в необмеженому середовищі. В цьому зв'язку слід згадати, наприклад, праці [3, 4, 5, 6, 9, 10], де розглядалися такі задачі при різних обмеженнях на пружні властивості тонкого дефекту, а також відповідні статичні задачі (див., наприклад, огляд [7]). Щодо розглянутої нижче задачі, то тут необхідно відмітити роботу [11], де розглядалося розсіяння SH-хвиль на прямолінійній тунельній тріщині в пружному півпросторі. У пропонованій статті розглядається аналогічна задача, коли розсіювачем є тонке прямолінійне тунельне включення змінної товщини та низької жорсткості. Проаналізовано вплив пружних властивостей тонкої неоднорідності, її форми та глибини залягання на формування спектральних залежностей узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень поблизу країв дефекту.

Розглянемо однорідне напівобмежене середовище $x_2 \leq H$, $|x_1| \leq \infty$ з модулем зсуву μ і густиною ρ , у якому в умовах ідеального механічного контакту знаходиться тонке пружне включення з параметрами μ_0 , ρ_0 , що займає область $W_\varepsilon = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq a, 2|x_2| \leq h(x_1)\}$ (тут $h(x)$ і $2a$ – товщина та довжина неоднорідності; Ox_1x_2 – декартова система координат, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$). Припускається, що пружна система знаходиться в умовах поздовжнього зсуву при усталених її коливаннях. Розглядається випадок включення малої жорсткості, тобто $\gamma = \mu_0/\mu = \gamma_1\varepsilon$, $\gamma_1 = \text{const}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

($\varepsilon = \frac{1}{a} \max_{|x_1| < a} h(x_1)$ – малий безрозмірний параметр, що характеризує малу відносну товщину включення). У цьому випадку пружно-динамічна взаємодія складових композиту наближено моделюється умовами спряження [2, 9]

$$\Phi(x_1) = \frac{h(x_1)}{\gamma} \frac{\partial u(x_1, 0)}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u(x_1, +0)}{\partial x_2} = \frac{\partial u(x_1, -0)}{\partial x_2},$$

$$\Phi(x_1) = u(x_1, +0) - u(x_1, -0), \quad |x_1| < a, \quad x_2 = 0, \quad (1)$$

де $u(\mathbf{x})$ – повне поле зміщень в матриці; $\Phi(x_1)$ – їх стрибок на середній лінії неоднорідності. Припускається також, що поверхня півпростору вільна від напружень:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0, \quad |x_1| < \infty, \quad x_2 = H. \quad (2)$$

На включення набігає плоска SH-хвиля

$$u^{\text{in}}(\mathbf{x}) = u_0 \exp[ik_2(x_1 \cos \theta_{\text{in}} + x_2 \sin \theta_{\text{in}})] \quad (3)$$

(θ_{in} – кут падіння хвилі на дефект; k_2 – хвильове число поперечних хвиль в матриці).

Зміщення в матриці подамо у вигляді суперпозиції

$$u(\mathbf{x}) = u^{\text{in}}(\mathbf{x}) + u^{\text{r}}(\mathbf{x}) + u^{\text{s}}(\mathbf{x}), \quad (4)$$

$$u^{\text{r}}(\mathbf{x}) = u_0 \exp[ik_2(x_1 \cos \theta_{\text{in}} - (x_2 - 2H) \sin \theta_{\text{in}})],$$

де $u^{\text{r}}(\mathbf{x})$ – плоска хвиля, відбита від поверхні півпростору без включення, складова $u^{\text{s}}(\mathbf{x})$ враховує наявність дефекту, задовольняє нульові граничні умови на поверхні матриці та відповідні умови випромінювання.

При розв'язанні задачі скористаємось підходом [3, 9], згідно з яким розв'язок задачі з урахуванням співвідношень (1)–(4) можна подати у вигляді

$$u^{\text{s}}(\mathbf{x}) = u_0 \int_{-\infty}^{\infty} [A_1(\eta)e^{ik(\eta)x_2} + A_2(\eta)e^{-ik(\eta)x_2}] e^{i\eta x_1} d\eta, \quad |x_1| < \infty, \quad x_2 \geq 0,$$

$$u^{\text{s}}(\mathbf{x}) = u_0 \int_{-\infty}^{\infty} A_3(\eta) \exp[i\eta x_1 - ik(\eta)x_2] d\eta, \quad |x_1| < \infty, \quad x_2 \leq 0; \quad (5)$$

$$A_1(\eta) = \frac{1}{4\pi u_0} \int_{-a}^a \Phi(x) \exp(-i\eta x) dx, \quad A_2(\eta) = A_1(\eta) \exp[2ik(\eta)H],$$

$$A_3(\eta) = A_2(\eta) - A_1(\eta);$$

$$k(\eta) = \sqrt{k_2^2 - \eta^2}; \quad \text{Re } k(\eta) > 0, \quad |\eta| < k_2; \quad \text{Im } k(\eta) > 0, \quad |\eta| > k_2.$$

Підставляючи зображення (4), (5) в умову спряження (1), отримаємо інтегральне рівняння для визначення функції $\Phi(x_1)$:

$$\Phi(x_1) + q_1 \int_{-a}^a \Phi(p) \mathcal{K}(k_2 |x_1 - p|) dp = q_2(x_1), \quad |x_1| < a; \quad (6)$$

$$\mathcal{K}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\alpha) [1 - \exp(-2\omega\gamma(\alpha)h_0)] \exp(i\alpha z) d\alpha, \quad \omega = ak_2, \quad h_0 = \frac{H}{a};$$

$$\gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - 1}, \quad \text{Im } \gamma(\alpha) \leq 0, \quad |\alpha| \leq 1, \quad \text{Re } \gamma(\alpha) \geq 0, \quad |\alpha| \geq 1;$$

$$q_1 = -\frac{1}{2\gamma} k_2^2 h(x_1),$$

$$q_2(x_1) = ik_2 \gamma^{-1} h(x_1) \sin \theta_{\text{in}} \exp(ik_2 x_1 \cos \theta_{\text{in}}) [1 - \exp(2i\omega h_0 \sin \theta_{\text{in}})].$$

Задамо товщину включення у вигляді

$$h(x_1) = \varepsilon a \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^{\delta_+} \left(1 + \frac{x_1}{a}\right)^{\delta_-}.$$

Тоді функцію $\Phi(x_1)$ можна подати у вигляді розвинення за поліномами Якобі [4, 5]

$$\Phi(x_1) = u_0 \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^{v_+} \left(1 + \frac{x_1}{a}\right)^{v_-} \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m^{(v_+, v_-)}\left(\frac{x_1}{a}\right), \quad (7)$$

$$\text{де } v_{\pm} = \begin{cases} 0.5, & 0 \leq \delta_{\pm} < 1, \\ \delta_{\pm}, & \delta_{\pm} > 1. \end{cases}$$

Використовуючи підхід, викладений в [3, 9], зі співвідношень (6), (7) отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь безмежного порядку для визначення невідомих коефіцієнтів розвинення (7), яку розв'язуємо методом редукції

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m A_{n,m} = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad A_{n,m} = B_{n,m} + C_{n,m},$$

$$B_{n,m} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-p)^{\nu_+ + 1/2 - \delta_+} (1+p)^{\nu_- + 1/2 - \delta_-} P_m^{(\nu_+, \nu_-)}(p) U_n(p) dp,$$

$$C_{n,m} = \omega \gamma_1^{-1} (n+1) \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) i^{n-\ell} B_{\ell,m}^1 I_{n,\ell},$$

$$B_{\ell,m}^1 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-p)^{\nu_+} (1+p)^{\nu_-} P_m^{(\nu_+, \nu_-)} U_{\ell}(p) dp,$$

$$I_{n,k} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\alpha) [1 - \exp(-2\omega\gamma(\alpha)h_0)] J_{n+1}(\omega\alpha) J_{k+1}(\omega\alpha) \alpha^{-2} d\alpha,$$

$$b_n = (n+1) i^n [1 - \exp(2i\omega h_0 \sin \theta_{in})] J_n(\omega \cos \theta_{in}) (\omega \cos \theta_{in})^{-1}.$$

Узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень визначимо співвідношенням

$$K^{\pm}(\omega) = u_0^{-1} \lim_{x_1 \rightarrow \pm a} \left(1 \mp \frac{x_1}{a}\right)^{-\nu_{\pm}} \Phi(x_1) = 2^{\nu_{\mp}} \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m^{(\nu_+, \nu_-)}(\pm 1).$$

На рис. 1–3 зображено частотні залежності величини $K_0(\omega) = |K^+(\omega)[1 - \exp(2i\omega h_0 \sin \theta_{in})]^{-1}|$, обчислені при $\theta_{in} = 90^\circ$ для $\gamma_1 = 0, 0.7, 1, 2$. Розрахунки, подані на рис. 1, виконано для включень постійної товщини ($\delta_{\pm} = 0, \nu_{\pm} = 0.5$) при малих глибинах залягання дефекту. В цьому випадку у спектрах спостерігаються ряд максимумів коефіцієнта $K_0(\omega)$, які мають резонансний характер. Числовий аналіз зміни фаз $K^{\pm}(\omega)$, проведений згідно з викладеним вище алгоритмом, свідчить, що ці резонанси виникають за рахунок коливань тонкої пластини $|x_1| \leq a, 0 \leq x_2 \leq H$ при жорсткому закріпленні її бічних поверхонь. Це явище можна пояснити, скориставшись підходом [1, 8]. Так, при $\gamma_1 \leq 0.1$ та $h_0 \leq 0.5$ розміщення максимумів ω_r у спектрах наближено визначаються співвідношеннями $\omega_r \approx \frac{\pi}{2} n$ ($n \geq 1$).

Аналогічно формуються при малих h_0 дифраговані хвильові поля у випадку некореневих особливостей у напруженнях поблизу кінців дефекту. Про це свідчить однакове розміщення максимумів у спектрах, поданих на рис. 1 та 2 (на рис. 2 покладено $\theta_{in} = 90^\circ, \delta_{\pm} = \nu_{\pm} = 2$).

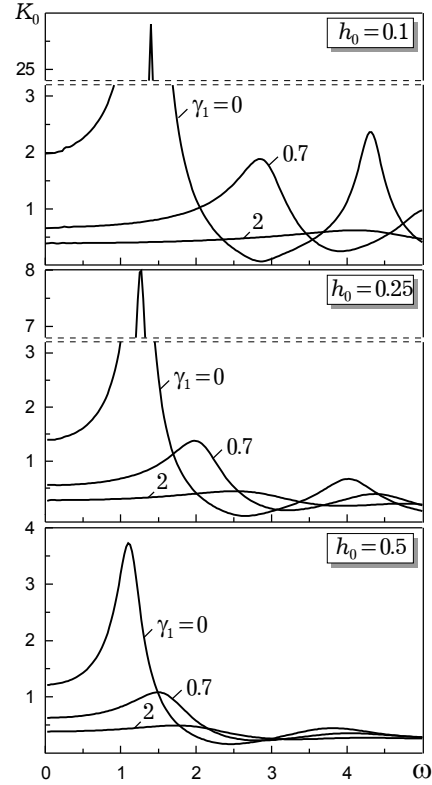


Рис. 1

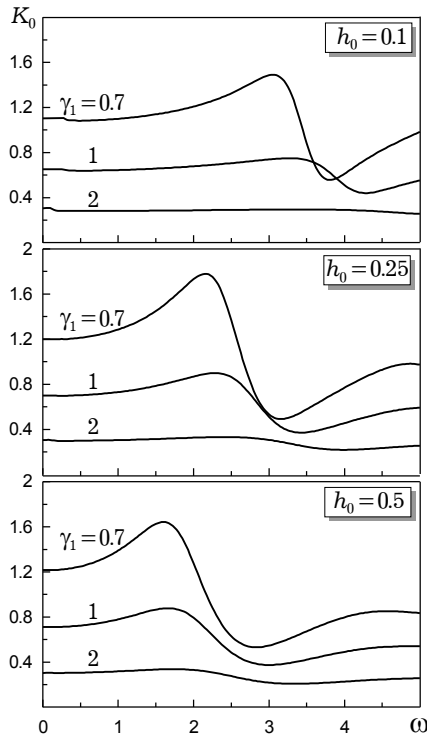


Рис. 2

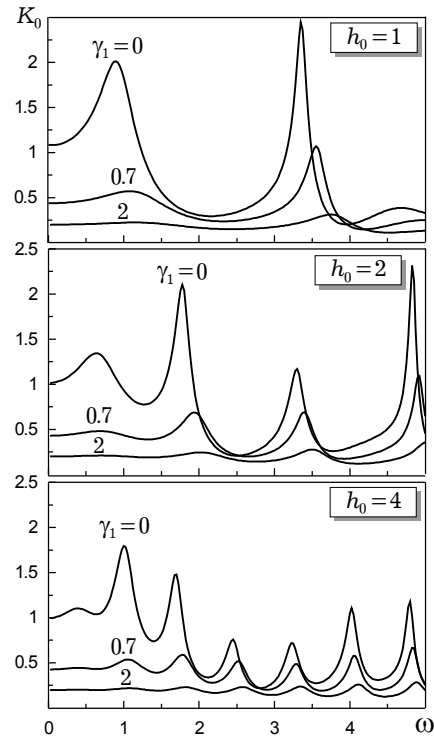


Рис. 3

На рис. 3 зображено частотні залежності коефіцієнта K_0 при великих глибинах залягання неоднорідності. Тут покладено $\theta_{\text{in}} = 90^\circ$, $\delta_{\pm} = 0$, $v_{\pm} = 0.5$. Аналіз залежностей при таких h_0 свідчить, що максимуми $K^{\pm}(\omega)$ не носять резонансного характеру, а пояснюються інтерференцією хвиль, перевідбитих між включенням і поверхнею півпростору, та хвиль, дифрагованих краями неоднорідності.

Із результатів, наведених на рис. 1–3, випливає, що збільшення жорсткості матеріалу включення призводить до пониження рівня концентрації напружень поблизу країв включення. При $v_{\pm} = 0.5$ ($0 \leq \delta_{\pm} < 1$) у короткохвильовій області вплив жорсткості матеріалу неоднорідності на величину коефіцієнта $K^{\pm}(\omega)$ нівелюється.

1. Бабешко В. А., Ворovich И. И., Образцов И. Ф. Явление высокочастотного резонанса в полуграниченных телах с неоднородностями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. – № 3. – С. 74–83.
2. Кіт Г. С., Ємець В. Ф., Кунець Я. І. Модель пружно-динамічної взаємодії тонкостінного включення з матрицею в умовах антиплоского зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 1. – С. 54–61.
3. Кіт Г. С., Кунець Я. І., Міщенко В. О. Взаємодія імпульсів SH-хвиль з тонкими пружними м'якими неоднорідностями // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. – 2002. – № 1. – С. 109–113.
4. Литвин О. В., Попов В. Г. Взаимодействие упругих волн с тонким упругим включением без изгибной жесткости // Вісн. Одеськ. ун-ту ім. І. І. Мечникова. – 2000. – 5, вип. 3. – С. 116–123.
5. Мойсеєнок О. П., Попов В. Г. Концентрація напружень поблизу тонкого пружного включення під дією нестационарної хвилі поздовжнього зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 4. – С. 172–177.
6. Попов В. Г. Исследование полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на тонком жестком отслоившемся включении // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 139–146.

7. Сулим Г. Т., Піскозуб Й. З. Умови контактної взаємодії тіл (огляд) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 110–125.
8. Keer L. M., Lin W., Achenbach J. D. Resonance effects for a crack near a free surface // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1984. – **51**, No. 1. – P. 65–70.
9. Kit H. S., Yemets V. F. Elastodynamic scattering from a thin-walled inclusion of low rigidity // Int. J. Eng. Sci. – 1999. – **37**. – P. 331–345.
10. Mykhas'kiv V. Transient response of plane rigid inclusion to an incident wave in an elastic solid // Wave Motion. – 2005. – **41**. – P. 133–144.
11. Ryan R. L., Mall S. Scattering of antiplane shear waves by a submerged crack // Int. J. Solids Struct. – 1982. – **18**, No. 12. – P. 1145–1152.

ДИФРАКЦІЯ SH-ВОЛН ТОНКИМ ПРЯМОЛИНЕЙНИМ ТУННІЛЬНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ МАЛОЇ ЖЕСТКОСТІ В ПОЛУПРОСТРАНСТВІ

Исследуются напряжения возле краев прямолинейного тонкого туннельного включения переменной толщины и малой жесткости, которое находится в упругом полупространстве. Упругая система находится в условиях продольного сдвига при действии на нее плоской SH-волны. Методика базируется на использовании метода сингулярных интегральных уравнений и метода ортогональных многочленов.

DIFFRACTION OF SH-WAVES BY THIN PLANE TUNNEL INCLUSION OF LOW RIGIDITY IN HALF-SPACE

The stresses near the edges of a thin plane tunnel inclusion of variable thickness and low rigidity that is in elastic half-space is studied. The elastic system is under the conditions of antiplane shear under the influence of a plane SH-wave. The procedure is based on utilization the method of singular integral equations and the method of orthogonal polynomials.

¹ Львів. філія Дніпропетр. нац. ун-ту
залізн. транспорту ім. акад. В. Лазаряна, Львів,

² Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
27.12.05