УДК 539.3

Е. В. Алтухов, В. П. Шевченко

МЕТОД ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ В ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ОБОБЩЕННОЙ ТЕРМОМЕХАНИКИ ТРАНСТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Рассматриваются краевые задачи обобщенной термоупругости для транстропных пластин. На плоских гранях пластины заданы различные однородные механические и тепловые граничные условия. Методом И. И. Воровича получены однородные решения для данного класса задач теории термоупругости. В результате решение задач сведено к интегрированию счетного множества метагармонических уравнений.

Развитию основ обобщенной термомеханики посвящена монография [14]. В ней получены уравнения обобщенной термоупругости, сформулированы и доказаны основные теоремы, приведены решения основных задач и краткий обзор исследований в данной области. В работах [1, 3–5, 15, 16] рассмотрены некоторые краевые задачи трехмерной связанной и обобщенной термоупругости для изотропных пластин и методами А. И. Лурье – И. И. Воровича построены системы однородных решений. Настоящая работа посвящена построению однородных решений краевых задач обобщенной термомеханики транстропных пластин.

Постановка задачи. Рассмотрим транстропную пластину толщиной $2h$, ослабленную цилиндрическими полостями и ограниченную плоскими гранями и внешней цилиндрической поверхностью. Прямоугольную систему координат $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ выбираем так, чтобы срединная плоскость пластины $\tilde{x}_3 = 0$ совпадала с координатной плоскостью $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2$.

В случае взаимного влияния полей деформации и температуры с учетом конечной скорости распространения тепла соотношения Дюгамеля – Неймана и полная система дифференциальных уравнений термоупругости анизотропного тела имеют вид [14]

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}e_{kl} - \beta_{ij}t\,, \tag{1}$$

$$\lambda^t_{ij}t_{,ij} - t_0\alpha^t_{kl}c_{ijkl}\,\ell\,\dot{e}_{ij} = c_v\ell\,\dot{t} - \ell w_t\,, \tag{2}$$

$$c_{ijkl}u_{k,lj} + X_i = \rho\,\ddot{u}_i + \beta_{ij}\,t_{,j}\,. \tag{3}$$

В уравнениях (1)–(3) сохранены обозначения, принятые в работе [14].

Для гармонических колебаний транстропных пластин уравнения (1)–(3) после исключения временного множителя $\exp(-i\omega\tau)$ и перехода к безразмерным величинам принимают форму

$$\begin{gathered}
\sigma_{11} = A_{11}\partial_1u_1 + A_{12}\partial_2u_2 + \lambda^{-1}A_{13}\partial_3u_3 - \beta_1u_4, \quad \sigma_{12} = A_{66}(\partial_2u_1 + \partial_1u_2)\,,\\
\sigma_{22} = A_{12}\partial_1u_1 + A_{11}\partial_2u_2 + \lambda^{-1}A_{13}\partial_3u_3 - \beta_1u_4\,,\\
\sigma_{13} = A_{44}(\partial_1u_3 + \lambda^{-1}\partial_3u_1)\,,\\
\sigma_{33} = A_{13}(\partial_1u_1 + \partial_2u_2) + \lambda^{-1}A_{33}\partial_3u_3 - \beta_3u_4\,,\\
\sigma_{23} = A_{44}(\partial_2u_3 + \lambda^{-1}\partial_3u_2)\,; \qquad\qquad (4)\\
s_0^{-2}\partial_3^2u_j + (\lambda^2D^2 + \omega_1^2)u_j + \lambda^2\mu_1\partial_j(\partial_1u_1 + \partial_2u_2) +\\
+ \lambda\mu_3\partial_j\partial_3u_3 = 2\lambda^2\beta_1\partial_ju_4, \qquad j = 1,2\,,\\
\mu_2\partial_3^2u_3 + (\lambda^2s_0^{-2}D^2 + \omega_1^2)u_3 + \lambda\mu_3\partial_3(\partial_1u_1 + \partial_2u_2) = 2\lambda\beta_3\partial_3u_4\,,
\end{gathered}$$

$$\lambda_0^2\partial_3^2 u_4 + (\lambda^2 D^2 + \omega_4^2 + i\omega_2)u_4 + 2(\omega_5^2 + i\omega_3)\big[\beta_1(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + \\ + \lambda^{-1}\beta_3\partial_3 u_3\big] = 0. \tag{5}$$

Здесь

$$x_1 = \frac{\tilde{x}_1}{R}, \quad x_2 = \frac{\tilde{x}_2}{R}, \quad x_3 = \frac{1}{\lambda}\frac{\tilde{x}_3}{R}, \quad \lambda = \frac{h}{R}, \quad u_i = \frac{\tilde{u}_i}{R}, \quad i = 1,2,3,$$

$$u_4 = \alpha_1(T - T_0), \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2G_1}\tilde{\sigma}_{ij}, \quad G_1 = \tilde{A}_{66}, \quad A_{ij} = \frac{1}{2G_1}\tilde{A}_{ij},$$

$$A_{11} = \frac{1}{\mu_0}(1 - \nu_2\nu_3), \quad A_{12} = \frac{1}{\mu_0}(\nu_1 + \nu_2\nu_3), \quad A_{13} = \mu_1\nu_3, \quad A_{33} = \frac{1}{2}\mu_2,$$

$$A_{44} = \frac{1}{2}s_0^{-2}, \quad A_{66} = \frac{1}{2}, \quad s_0^2 = \frac{G_1}{G_3}, \quad \nu_2 = \nu_3\frac{E_1}{E_3}, \quad \mu_0 = 1 - \nu_1 - 2\nu_2\nu_3,$$

$$\mu_1 = \mu_0^{-1}(1 + \nu_1), \quad \mu_2 = 2\mu_1(1 - \nu_1)\nu_2^{-1}\nu_3, \quad \beta_1 = \mu_1(1 + \nu_3\alpha_0),$$

$$\beta_3 = \mu_1\nu_3\big[2 + (1 - \nu_1)\nu_2^{-1}\alpha_0\big], \quad \alpha_0 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \quad \lambda_0^2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \quad \omega_1^2 = h\rho G_1^{-1}\omega^2,$$

$$\omega_2 = c_9 h^2\omega, \quad \omega_3 = T_0\alpha_1^2 G_1 h^2\lambda_1^{-1}\omega, \quad \omega_4^2 = c_9 h^2\lambda_1^{-1}\tau_r\omega^2,$$

$$\omega_5^2 = T_0\alpha_1^2 G_1 c_9 h^2\lambda_1^{-1}\tau_r\omega^2, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2;$$

символом «$\sim$» обозначены размерные величины; $\tilde{A}_{ij}$, A_{ij} – компоненты тензора упругой жесткости для транстропного тела; T_0 – температура тела в ненапряженном состоянии; $T(x_1, x_2, x_3)$ – абсолютная температура точек тела; ω – круговая частота; R – линейный размер пластины; τ_r – время релаксации теплового потока; ρ – плотность; λ_1, λ_3 – коэффициенты теплопроводности; α_1, α_3 – температурные коэффициенты линейного расширения; c_9 – объемная теплоемкость; E_1, E_3 – модули Юнга; G_1, G_3 – модули сдвига; ν_1, ν_3 – коэффициенты Пуассона.

В соответствии с идеей метода однородных решений дополним систему (5) одним из следующих краевых условий на плоских гранях пластины

механических:

$$u_i(x_1, x_2, \pm 1) = 0, \qquad i = 1,2,3, \tag{6}$$

$$\sigma_{j3}(x_1, x_2, \pm 1) = 0, \qquad j = 1,2,3, \tag{7}$$

$$u_3(x_1, x_2, \pm 1) = 0, \qquad \sigma_{i3}(x_1, x_2, \pm 1) = 0, \qquad i = 1,2, \tag{8}$$

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, \pm 1) = 0, \qquad u_i(x_1, x_2, \pm 1) = 0, \qquad i = 1,2, \tag{9}$$

и тепловых:

$$u_4(x_1, x_2, \pm 1) = 0, \tag{10}$$

$$\partial_3 u_4(x_1, x_2, \pm 1) = 0. \tag{11}$$

Построение однородных решений. Используя полуобратный метод И. И. Воровича и учитывая свойства векторного поля, амплитудные значения компонент вектора перемещений u_j и температуры u_4 представим в виде суммы вихревой и потенциальной составляющих:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_{i\text{в}} + u_{i\text{п}}, \qquad i = 1, \ldots, 4. \tag{12}$$

Вихревые составляющие

$$u_{1\text{в}} = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x_3)\,\partial_2 B_k(x_1,x_2), \qquad u_{2\text{в}} = -\sum_{k=1}^{\infty} P_k(x_3)\,\partial_1 B_k(x_1,x_2),$$

$$u_{3\text{в}} = u_{4\text{в}} = 0, \qquad \lambda^2 D^2 B_k = (\delta_k^2 - \omega_1^2) B_k, \tag{13}$$

соответствующие граничным условиям (6)–(9), совпадают с полученными в работах [7, 8, 11].

Потенциальные составляющие найдем, исходя из представлений [2, 10]

$$u_{1\text{п}} = n(x_3)\,\partial_1 C(x_1,x_2), \qquad u_{2\text{п}} = n(x_3)\,\partial_2 C(x_1,x_2),$$

$$u_{3\text{п}} = q(x_3)\,C(x_1,x_2), \qquad u_{4n} = \lambda^{-2} t(x_3)\,C(x_1,x_2). \tag{14}$$

Тогда из системы уравнений (5) с учетом выражений (14) следует, что функции $n(x_3)$, $q(x_3)$, $t(x_3)$ определяются из системы дифференциальных уравнений

$$s_0^{-2} n'' + \left[\gamma^2(1+\mu_1) + \omega_1^2\right] n + \lambda\mu_3 q' - 2\beta_1 t = 0,$$

$$\mu_2 q'' + (\gamma^2 s_0^{-2} + \omega_1^2) q + \lambda^{-1}\mu_3\gamma^2 n' - 2\lambda^{-1}\beta_3 t' = 0,$$

$$\lambda_0^2 t'' + (\gamma^2 + \omega_4^2 + i\omega_2) t + 2(\omega_5^2 + i\omega_3)(\beta_1\gamma^2 n + \lambda\beta_3 q') = 0, \tag{15}$$

а функция $C(x_1,x_2)$ является метагармонической:

$$\lambda^2 D^2 C - \gamma^2 C = 0.$$

Здесь γ – параметр разделения переменных.

Характеристическое уравнение системы (15) имеет вид

$$a_1 k^6 + a_2 k^4 + a_3 k^2 + a_4 = 0, \tag{16}$$

$$a_1 = \lambda_0^2 s_0^{-2}\mu_2, \qquad a_2 = \gamma^2\left\{s_0^{-2}\mu_2 + \lambda_0^2\left[s_0^{-4} + (1+\mu_1)\mu_2 - \mu_3^2\right]\right\} +$$
$$+ \omega_1^2\lambda_0^2(s_0^{-2} + \mu_2) + s_0^{-2}\left[\mu_2(\omega_4^2 + i\omega_2) + 4\beta_3^2(\omega_5^2 + i\omega_3)\right],$$

$$a_3 = \gamma^4\left[s_0^{-4} + (1+\mu_1)(\mu_2 + s_0^{-2}\lambda_0^2) - \mu_3^2\right] + \gamma^2\left\{\omega_1^2\left[(s_0^{-2} + \mu_2 + \lambda_0^2(1+\mu_1 +\right.\right.$$
$$+ s_0^{-2})\Big] + (\omega_4^2 + i\omega_2)\left[s_0^{-4} + (1+\mu_1)\mu_2 - \mu_3^2\right] + 4(\omega_5^2 + i\omega_3)\left[\mu_2\beta_1^2 -\right.$$
$$\left.\left. - 2\mu_3\beta_1\beta_3 + (1+\mu_1)\beta_3^2\right]\right\} + \omega_1^2\left[4\beta_3^2(\omega_5^2 + i\omega_3) +\right.$$
$$\left. + (s_0^{-2} + \mu_2)(\omega_4^2 + i\omega_2)\right] + \lambda_0^2\omega_1^4,$$

$$a_4 = \gamma^6(1+\mu_1)s_0^{-2} + \gamma^4\left\{\omega_1^2(1+\mu_1+s_0^{-2}) + s_0^{-2}\left[(\omega_4^2 + i\omega_2)(1+\mu_1) +\right.\right.$$
$$\left.\left. + 4(\omega_5^2 + i\omega_3)\beta_1^2\right]\right\} + \gamma^2\omega_1^2\left[\omega_1^2 + (\omega_4^2 + i\omega_2)(1+\mu_1+s_0^{-2}) +\right.$$
$$\left. + 4(\omega_5^2 + i\omega_3)\beta_1^2)\right] + \omega_1^4(\omega_4^2 + i\omega_2).$$

Для различных корней k_i уравнения (16) решением системы (15) являются функции

$$n^+(x_3) = \sum_{i=1}^{3} H_i^+ \operatorname{ch} k_i x_3, \qquad n^-(x_3) = \sum_{i=1}^{3} H_i^- \operatorname{sh} k_i x_3,$$

$$q^+(x_3) = \sum_{i=1}^{3} c_i H_i^+ \operatorname{sh} k_i x_3, \qquad q^-(x_3) = \sum_{i=1}^{3} c_i H_i^- \operatorname{ch} k_i x_3,$$

$$t^+(x_3) = \sum_{i=1}^{3} d_i H_i^+ \operatorname{ch} k_i x_3, \qquad t^-(x_3) = \sum_{i=1}^{3} d_i H_i^- \operatorname{sh} k_i x_3, \tag{17}$$

где

$$c_i = \left\{ s_0^{-2}\beta_3 k_i^2 + \left[\beta_3(1+\mu_1) - \mu_3\beta_1 \right]\gamma^2 + \beta_3\omega_1^2 \right\} k_i \lambda^{-1} \Delta_i^{-1},$$

$$d_i = \left\{ \left[s_0^{-2}k_i^2 + (1+\mu_1)\gamma^2 + \omega_1^2 \right](\mu_2 k_i^2 + s_0^{-2}\gamma^2 + \omega_1^2) - \mu_3^2 k_i^2 \gamma^2 \right\} \Delta_i^{-1},$$

$$\Delta_i = (\beta_1\mu_2 - \beta_3\mu_3)k_i^2 + \beta_1(s_0^{-2}\gamma^2 + \omega_1^2).$$

В формулах (17) индексами «+» и «−» отмечены величины, относящиеся соответственно к симметричным и антисимметричным относительно срединной плоскости $x_3 = 0$ видам колебаний пластины.

Коэффициенты $H_i^{\pm}$ и собственные значения γ найдем из граничных условий (6)–(11). Из граничных условий (6), (10) имеем однородные системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{3} H_i^+ \operatorname{ch} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^+ c_i \operatorname{sh} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^+ d_i \operatorname{ch} k_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3} H_i^- \operatorname{sh} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^- c_i \operatorname{ch} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^- d_i \operatorname{sh} k_i = 0. \tag{18}$$

Приравнивания к нулю определители систем (18), получаем следующие дисперсионные уравнения относительно γ:

$$\Delta_1^+ \equiv c_1(d_2 - d_3)\operatorname{th} k_1 + c_2(d_3 - d_1)\operatorname{th} k_2 + c_3(d_1 - d_2)\operatorname{th} k_3 = 0,$$

$$\Delta_1^- \equiv c_1(d_2 - d_3)\operatorname{cth} k_1 + c_2(d_3 - d_1)\operatorname{cth} k_2 + c_3(d_1 - d_2)\operatorname{cth} k_3 = 0. \tag{19}$$

В случае граничных условий (6), (11) из однородных систем

$$\sum_{i=1}^{3} H_i^+ \operatorname{ch} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^+ c_i \operatorname{sh} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^+ d_i \operatorname{sh} k_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3} H_i^- \operatorname{sh} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^- c_i \operatorname{ch} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^- d_i \operatorname{ch} k_i = 0 \tag{20}$$

получаем дисперсионные уравнения

$$\Delta_2^+ \equiv (c_2 d_3 k_3 - c_3 d_2 k_2)\operatorname{cth} k_1 + (c_3 d_1 k_1 - c_1 d_3 k_3)\operatorname{cth} k_2 + \\ + (c_1 d_2 k_2 - c_2 d_1 k_1)\operatorname{cth} k_3 = 0,$$

$$\Delta_2^- \equiv (c_2 d_3 k_3 - c_3 d_2 k_2)\operatorname{th} k_1 + (c_3 d_1 k_1 - c_1 d_3 k_3)\operatorname{th} k_2 + \\ + (c_1 d_2 k_2 - c_2 d_1 k_1)\operatorname{th} k_3 = 0. \tag{21}$$

Краевым условиям (7) и (10), (8) и (10), (9) и (10) соответствуют однородные системы

$$\sum_{i=1}^{3} H_i^+ e_i \operatorname{ch} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^+ f_i \operatorname{sh} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^+ d_i \operatorname{ch} k_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3} H_i^- e_i \operatorname{sh} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^- f_i \operatorname{ch} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^- d_i \operatorname{sh} k_i = 0; \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{3} H_i^+ k_i \operatorname{sh} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^+ c_i \operatorname{sh} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^+ d_i \operatorname{ch} k_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3} H_i^- k_i \operatorname{ch} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^- c_i \operatorname{ch} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^- d_i \operatorname{sh} k_i = 0; \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{3} H_i^+ \operatorname{ch} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^+ c_i k_i \operatorname{ch} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^+ d_i \operatorname{ch} k_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3} H_i^- \operatorname{sh} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^- c_i k_i \operatorname{sh} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^- d_i \operatorname{sh} k_i = 0. \tag{24}$$

Здесь $e_i = \nu_2(1-\nu_1)^{-1}\gamma^2 + \lambda c_i k_i$, $f_i = k_i + \lambda c_i$.

Из условия равенства нулю определителей систем (22)–(24) получаем дисперсионные уравнения

$$\Delta_3^+ \equiv (e_3 d_2 - e_2 d_3) f_1 \operatorname{th} k_1 + (e_1 d_3 - e_3 d_1) f_2 \operatorname{th} k_2 + \\ + (e_2 d_1 - e_1 d_2) f_3 \operatorname{th} k_3 = 0,$$

$$\Delta_3^- \equiv (e_3 d_2 - e_2 d_3) f_1 \operatorname{cth} k_1 + (e_1 d_3 - e_3 d_1) f_2 \operatorname{cth} k_2 + \\ + (e_2 d_1 - e_1 d_2) f_3 \operatorname{cth} k_3 = 0; \qquad (25)$$

$$\Delta_4^+ \equiv (c_3 k_2 - c_2 k_3) d_1 \operatorname{cth} k_1 + (c_1 k_3 - c_3 k_1) d_2 \operatorname{cth} k_2 + \\ + (c_2 k_1 - c_1 k_2) d_3 \operatorname{cth} k_3 = 0,$$

$$\Delta_4^- \equiv (c_3 k_2 - c_2 k_3) d_1 \operatorname{th} k_1 + (c_1 k_3 - c_3 k_1) d_2 \operatorname{th} k_2 + \\ + (c_2 k_1 - c_1 k_2) d_3 \operatorname{th} k_3 = 0; \qquad (26)$$

$$\Delta_5^+ \equiv \operatorname{ch} k_1 \operatorname{ch} k_2 \operatorname{ch} k_3 = 0,$$

$$\Delta_5^- \equiv \operatorname{sh} k_1 \operatorname{sh} k_2 \operatorname{sh} k_3 = 0. \qquad (27)$$

В случае теплоизолированных плоских граней пластины (11) из граничных условий (7)–(9) записываем следующие системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^{3} H_i^+ g_i \operatorname{ch} k_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} H_i^+ f_i \operatorname{sh} k_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} H_i^+ d_i k_i \operatorname{sh} k_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3} H_i^- g_i \operatorname{sh} k_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} H_i^- f_i \operatorname{ch} k_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} H_i^- d_i k_i \operatorname{sh} k_i = 0; \qquad (28)$$

$$\sum_{i=1}^{3} H_i^+ k_i \operatorname{sh} k_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} H_i^+ c_i \operatorname{sh} k_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} H_i^+ d_i k_i \operatorname{sh} k_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3} H_i^- k_i \operatorname{ch} k_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} H_i^- c_i \operatorname{ch} k_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} H_i^- d_i k_i \operatorname{ch} k_i = 0; \qquad (29)$$

$$\sum_{i=1}^{3} H_i^+ \operatorname{ch} k_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} H_i^+ h_i \operatorname{ch} k_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} H_i^+ d_i k_i \operatorname{sh} k_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3} H_i^- \operatorname{sh} k_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} H_i^- h_i \operatorname{sh} k_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} H_i^- d_i k_i \operatorname{ch} k_i = 0; \qquad (30)$$

$$g_i = e_i - \beta_3 d_i, \qquad h_i = \lambda c_i k_i - \beta_3 d_i,$$

и такие трансцендентные уравнения:

$$\Delta_6^+ \equiv (d_3 f_2 k_3 - d_2 f_3 k_2) g_1 \operatorname{cth} k_1 + (d_1 f_3 k_1 - d_3 f_1 k_3) g_2 \operatorname{cth} k_2 + \\ + (d_2 f_1 k_2 - d_1 f_2 k_1) g_3 \operatorname{cth} k_3 = 0,$$

$$\Delta_6^- \equiv (d_3 f_2 k_3 - d_2 f_3 k_2) g_1 \operatorname{th} k_1 + (d_1 f_3 k_1 - d_3 f_1 k_3) g_2 \operatorname{th} k_2 + \\ + (d_2 f_1 k_2 - d_1 f_2 k_1) g_3 \operatorname{th} k_3 = 0; \qquad (31)$$

$$\Delta_7^+ \equiv \operatorname{sh} k_1 \operatorname{sh} k_2 \operatorname{sh} k_3 = 0,$$

$$\Delta_7^- \equiv \operatorname{ch} k_1 \operatorname{ch} k_2 \operatorname{ch} k_3 = 0; \qquad (32)$$

$$\Delta_8^+ \equiv (h_3 - h_2) d_1 k_1 \operatorname{th} k_1 + (h_1 - h_3) d_2 k_2 \operatorname{th} k_2 + \\ + (h_2 - h_1) d_3 k_3 \operatorname{th} k_3 = 0,$$

$$\Delta_8^- \equiv (h_3 - h_2) d_1 k_1 \operatorname{cth} k_1 + (h_1 - h_3) d_2 k_2 \operatorname{cth} k_2 + \\ + (h_2 - h_1) d_3 k_3 \operatorname{cth} k_3 = 0. \qquad (33)$$

Счетные множества корней уравнений (27), (32) находятся в явном виде. Для отыскания корней дисперсионных уравнений (19), (21), (25), (26), (31), (33) можно воспользоваться прямыми численными и асимптотическими методами [9, 13]. Зависимость между квадратами корней k_i^2 уравнения (16) и γ устанавливаем по формулам Кардано. В результате получаем собственные значения γ_p.

Неизвестные коэффициенты $H_i^{\pm}$ найдем из систем (18), (20), (22)−(24), (28)−(30). Например, из системы (18) получаем

$$
\begin{aligned}
H_2^+ &= \frac{1}{H^+} H_1^+ (c_1 \operatorname{sh} k_1 \operatorname{ch} k_3 - c_3 \operatorname{ch} k_1 \operatorname{sh} k_3),\\
H_3^+ &= \frac{1}{H^+} H_1^+ (c_2 \operatorname{ch} k_1 \operatorname{sh} k_3 - c_1 \operatorname{sh} k_1 \operatorname{ch} k_3),\\
H_2^- &= \frac{1}{H^-} H_1^- (c_1 \operatorname{ch} k_1 \operatorname{sh} k_3 - c_3 \operatorname{sh} k_1 \operatorname{ch} k_3),\\
H_3^- &= \frac{1}{H^-} H_1^- (c_2 \operatorname{sh} k_1 \operatorname{ch} k_2 - c_1 \operatorname{ch} k_1 \operatorname{sh} k_2),
\end{aligned} \qquad (34)
$$

где

$$
\begin{aligned}
H^+ &= c_3 \operatorname{ch} k_2 \operatorname{sh} k_3 - c_2 \operatorname{sh} k_2 \operatorname{ch} k_3,\\
H^- &= c_3 \operatorname{sh} k_2 \operatorname{ch} k_3 - c_2 \operatorname{ch} k_2 \operatorname{sh} k_3, \qquad H_1^{\pm} = 1.
\end{aligned}
$$

Решения остальных систем находятся аналогично, и они имеют вид (34).

Собственным значениям $\gamma_p^{\pm}$ соответствуют величины $H_{ip}^{\pm}$ и собственные функции $n_p^{\pm}(x_3)$, $q_p^{\pm}(x_3)$, $t_p^{\pm}(x_3)$, $C_p^{\pm}(x_1, x_2)$. Поэтому потенциальное решение для всех рассмотренных граничных условий на плоских гранях пластины имеет форму

$$
\begin{aligned}
u_{jn}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{p=1}^{\infty} n_p^{\pm}(x_3)\, \partial_j C_p^{\pm}(x_1, x_2), \qquad j = 1, 2,\\
u_{3n}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{p=1}^{\infty} q_p^{\pm}(x_3)\, C_p^{\pm}(x_1, x_2),\\
u_{4n}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) &= \lambda^{-2} \sum_{p=1}^{\infty} t_p^{\pm}(x_3)\, C_p^{\pm}(x_1, x_2),\\
D^2 C_p^{\pm} &= (\gamma_p^{\pm})^2 \lambda^{-2} C_p^{\pm}.
\end{aligned} \qquad (35)
$$

Таким образом, однородные решения рассмотренных краевых задач имеют вид

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2) + \sum_{p=1}^{\infty} n(x_3) \partial_1 C_p(x_1, x_2),\\
u_2 &= -\sum_{k=1}^{\infty} P_k(x_3)\, \partial_1 B_k(x_1, x_2) + \sum_{p=1}^{\infty} n(x_3)\, \partial_2 C_p(x_1, x_2),\\
u_3 &= \sum_{p=1}^{\infty} q(x_3)\, C_p(x_1, x_2), \qquad u_4 = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^{-2} t(x_3)\, C_p(x_1, x_2),\\
\sigma_{11} &= \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x_3) \partial_1 \partial_2 B_k(x_1, x_2) + \sum_{p=1}^{\infty} \big[s_p(x_3) C_p(x_1, x_2) +\\
&\qquad + n_p(x_3) \partial_1^2 C_p(x_1, x_2) \big],\\
\sigma_{22} &= -\sum_{k=1}^{\infty} P_k(x_3) \partial_1 \partial_2 B_k(x_1, x_2) + \sum_{p=1}^{\infty} \big[s_p(x_3) C_p(x_1, x_2) +\\
&\qquad + n_p(x_3) \partial_2^2 C_p(x_1, x_2) \big],
\end{aligned}
$$

$$\sigma_{33} = \sum_{p=1}^{\infty} \left[A_{13}\gamma_p^2\lambda^{-2} n_p(x_3) + \lambda^{-1} A_{33} q_p'(x_3) - \beta_3 t_p(x_3) \right] C_p(x_1, x_2) ,$$

$$\sigma_{12} = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x_3)(\partial_2^2 - \partial_1^2) B_k(x_1, x_2) + \sum_{p=1}^{\infty} n_p(x_3)\partial_1\partial_2 C_p(x_1, x_2) ,$$

$$\sigma_{13} = \sum_{k=1}^{\infty} P_k'(x_3)\partial_2 B_k(x_1, x_2) + \sum_{p=1}^{\infty} r_p(x_3)\partial_1 C_p(x_1, x_2) ,$$

$$\sigma_{23} = -\sum_{k=1}^{\infty} P_k'(x_3)\partial_1 B_k(x_1, x_2) + \sum_{p=1}^{\infty} r_p(x_3)\partial_2 C_p(x_1, x_2) , \qquad (36)$$

где

$$s_p(x_3) = A_{12}\gamma_p^2\lambda^{-2} n_p(x_3) + \lambda^{-1} A_{13} q_p'(x_3) - \lambda^{-2}\beta_1 t_p(x_3) ,$$

$$r_p(x_3) = A_{44}\left[q_p(x_3) + \lambda^{-1} n_p(x_3) \right] .$$

Формулы (36) в симметричной и антисимметричной задачах имеют одинаковую структуру. Поэтому знаки « + », « – » не указаны.

Построенные выше однородные решения могут быть использованы для удовлетворения граничных условий на боковой поверхности пластины. В случае круговых цилиндрических поверхностей пластины в работах [10, 12] предложены подходы сведения граничных задач к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Для области пластины, отличной от круговой, эффективным является использование методов однородных решений и интегральных преобразований [6, 15].

1. *Авилова С. В., Алтухов Е. В., Мысовский Ю. В.* Однородные решения в трехмерных задачах обобщенной термодинамики изотропных пластин // Материалы 4-й Междунар научн. конф.: Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела. – Донецк: Юго-Восток, 2006. – С. 166–168.
2. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Напряженное состояние пластины малой толщины // Прикл. математика и механика. – 1963. – **27**, № 6. – С. 1057–1074.
3. *Алтухов Е. В.* Метод И. И. Воровича в трехмерной теории термодинамики пластин // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 3–8.
4. *Алтухов Е. В.* Однородные решения трехмерных динамических задач термоупругости изотропных пластин с граничными условиями типа диафрагмы // Мат. методи та фіз.-мех поля. – 2006. – **49**, № 2. – С. 137–141.
5. *Алтухов Е. В., Авилова С. В.* Однородные решения в трехмерной теории обобщенной термомеханики изотропных пластин // XI Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 18–20 тр. 2006): Матеріали конф. – Київ: ТОВ «Задруга», 2006. – С. 17.
6. *Алтухов Е. В., Гольцев А. С., Хижняк В. К.* Напряженное состояние изотропного слоя с трещиной // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 1. – С. 43–51.
7. *Алтухов Е. В., Панченко Ю. В.* Колебания транстропных пластин в случае смешанных граничных условий // Теорет. и прикл. механика. – 1999. – Вып. 29. – С. 52–62.
8. *Алтухов Е. В., Панченко Ю. В.,* Колебания транстропных пластин с граничными условиями типа плоского торца или диафрагмы // Динам. системы. – 1999. – Вып. 15. – С. 104–109.
9. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – Москва: Мир, 1967. – 548 с.
10. *Ворович И. И., Малкина О. С.* Напряженное состояние толстой плиты // Прикл. математика и механика. – 1967. – **31**, № 2. – С. 230–241.
11. *Космодамианский А. С., Сторожев В. И., Шалдырван В. А.* Вынужденные колебания многосвязных транстропных толстых пластин // Доп. АН УССР. Сер. А. – 1976. – № 12. – С. 1088–1092.
12. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Толстые многосвязные пластины. – Киев: Наук. думка, 1978. – 240 с.
13. *Лидский В. Б., Садовничий В. А.* Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Мат. сб. – 1968. – **75**, № 4. – С. 458–566.

14. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1976. – 310 с.
15. *Фильштинский Л. А., Сиренко Ю. В., Фильштинская Л. Л.* Связанные термоупругие поля в слое при сосредоточенных возбуждениях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 2. – С. 137–146.
16. *Швец Р. Н.* Применение операторного метода в динамических задачах термоупругости пластин постоянной толщины // Физ.-мех. поля в деформируемых средах. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 84–92.

МЕТОД ОДНОРІДНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ У ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧАХ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ТЕРМОМЕХАНІКИ ТРАНСТРОПНИХ ПЛАСТИН

Розглядаються крайові задачі узагальненої термопружності для транстропних пластин. На плоских гранях пластини задано різні однорідні механічні та теплові граничні умови. Методом І. І. Воровича отримано однорідні розв'язки для такого класу задач теорії термопружності. Розв'язування задач зведено до інтегрування зліченної множини метагармонічних рівнянь.

METHOD OF HOMOGENEOUS SOLUTIONS IN 3-D PROBLEMS FOR GENERALIZED THERMOMECHANICS OF TRANSTROPIC PLATES

The boundary-value problems of generalized thermoelasticity for transtropic plates are considered. On the flat plane plates different homogeneous mechanical and heat border conditions are given. By the I. I. Vorovich method the homogeneous solutions for the given class of problems of thermoelasticity theory are obtained. As a result the solution of the problem is reduced to integration of counting set of metaharmonic equations.

Донец. нац. ун-т, Донецк

Одержано
15.06.06