

ПРО АЛГОРИТМ П. Ф. ПАПКОВИЧА У МЕТОДІ ОДНОРІДНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ ДВОВИМІРНОЇ БІГАРМОНІЧНОЇ ЗАДАЧІ У ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ

Викладено основні аспекти алгоритму П. Ф. Папковича у методі однорідних розв'язків для двовимірної бігармонічної задачі у прямокутній області. Зроблено короткий історичний нарис початкового етапу цього методу. Чисельно досліджено типовий приклад ефективного застосування алгоритму.

«Читання оригінальних творів дає тому, хто вивчає будь-який предмет, величезну перевагу, адже наука завжди найповніше засвоюється у стадії зародження»

Д. К. Максвелл (1873) [5, с. 15]

Вступ. Понад 60 років тому видатний фахівець у галузі будівельної механіки корабля інженер-контр-адмірал П. Ф. Папкович опублікував статті [7, 8], у яких запропонував оригінальний алгоритм для розв'язування двовимірних задач теорії пружності та теорії тонких пластин для прямокутних областей (чи півсмуги у граничному випадку). У цих працях, однак, були відсутні будь-які конкретні числові дані, які можна було б отримати на основі запропонованого підходу, окрім загальної оцінки можливості застосування принципу Сен-Венана при силовому самозрівноваженому навантаженні торців прямокутника. Найбільш цікавим, на наш погляд, є відсутність і на сьогодні таких числових результатів на основі алгоритму Папковича, незважаючи на активне застосування методу однорідних розв'язків (див. [11, 20, 21] для детального огляду робіт у цьому напрямку). Мета цієї роботи й полягає в отриманні деяких числових результатів для типових задач про навантаження пружної півсмуги, опираючись на чіткий виклад алгоритму, який наведено в [7, 8].

Початкова історія методу однорідних розв'язків. Двовимірні задачі теорії пружності та теорії згину пластин для прямокутної області $0 < x < \ell$, $-b < y < b$ з вільними від силових навантажень або жорстко закріпленими сторонами $y = \pm b$ відповідно та довільним навантаженням торців $x = 0$, $x = \ell$ можуть бути зведені після розв'язування відповідного однорідного чи неоднорідного бігармонічного рівняння для однієї скалярної функції (функції напружень Ерї або прогину пластини) до проблеми розв'язування двох дійсних заданих функцій за системою комплексних неортогональних функцій від y (так званих «однорідних розв'язків»), які залежать від комплексних коренів деякого трансцендентного рівняння.

Проблема розв'язування однієї дійсної функції $f(y)$ у ряд за заданою системою дійсних функцій $\varphi(y, \lambda_k)$:

$$f(y) = \sum_k C_k \varphi(y, \lambda_k), \quad (1)$$

де λ_k – (простий) корінь трансцендентного рівняння $\Delta(\lambda) = 0$, та відшукання виразів для нескінченного набору дійсних коефіцієнтів C_k відома ще з часів Ейлера та Фур'є.

У випадку коливань струни геніальна думка Ейлера про відшукання системи функцій $\chi(y, \lambda_k)$, ортогональної до системи $\varphi(y, \lambda_k)$, при використанні рівняння

$$\int_{-b}^b f(y) \chi(y, \lambda_k) dy = C_k \int_{-b}^b \varphi(y, \lambda_k) \chi(y, \lambda_k) dy$$

привела до заснування теорії ортогональних функцій, яка вже дала науці низку чудових результатів. Певним недоліком цього підходу є відсутність у загальному випадку алгоритму побудови функції $\chi(y, \lambda_k)$ за заданим виразом функцій $\varphi(y, \lambda_k)$ та $\Delta(\lambda)$.

Інший аналітичний підхід до відшукування коефіцієнтів C_k у рівності (1) був запропонований Коші [13] та суттєво розвинений Файлоном [16]. Цей підхід опирається на теорію лишків і полягає у побудові (за спеціальним алгоритмом) мероморфної функції $F(z)$ від комплексної змінної z за дописом загального вигляду функцій $\varphi(y, z)$, $\Delta(z)$ та полінома $f(y)$. Функція $F(z)$ має єдиний полюс у точці $z = 0$ такий, що

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{F(z)\varphi(y, z)}{\Delta(z)} = -f(y).$$

Таким чином, Файлон отримав уже відомі розвинення тригонометричних функцій та функцій Бесселя за використання лише дійсних коренів певних трансцендентних рівнянь. Важливо, що в усіх його прикладах функція φ мала лише один аргумент yz .

Проблема розвинення у ряди двох дійсних функцій, з якою маємо справу у випадку бігармонічної задачі для прямокутної області, виявилася набагато складнішою. Існує елегантний аналітичний підхід до цієї проблеми, який є природним узагальненням класичного методу математичної фізики розвинення за власними скалярними функціями. Для задач теорії пружності цей підхід був започаткований у 1904 році у фундаментальному мемуарі Дугола [14]. Майже цілком присвячена проблемам рівноваги пружного товстого шару, які розглядаються у циліндричних координатах, ця робота мала коротенький розділ, присвячений задачі про плоску деформацію шару $|y| < b$ (тут використовуємо наші позначення). Було відзначено, що антисиметрична за y система напружень

$$\begin{aligned} \sigma_x &= ie^{i\alpha x} [3 - \operatorname{ch} 2\alpha b] \operatorname{sh} \alpha y + 2\alpha y \operatorname{ch} \alpha y, \\ \sigma_y &= ie^{i\alpha x} [(1 + \operatorname{ch} 2\alpha b) \operatorname{sh} \alpha y - 2\alpha y \operatorname{ch} \alpha y], \\ \tau_{xy} &= e^{i\alpha x} [(1 - \operatorname{ch} 2\alpha b) \operatorname{ch} \alpha y + 2\alpha y \operatorname{sh} \alpha y] \end{aligned} \quad (2)$$

залишає сторони $y = \pm b$ шару вільними від нормальних та дотичних напружень, якщо α є коренем рівняння

$$\operatorname{sh} 2\alpha b - 2\alpha b = 0. \quad (3)$$

Дугол довів, що $\alpha b = 0$ є потрібним коренем рівняння (3) і що всі інші корені є комплексними та розміщені симетрично четвірками на комплексній площині α . Він також встановив асимптотичну поведінку кожної четвірки коренів $(\alpha_r, b) \sim \pm \frac{1}{2} \ln(4r\pi + \pi) \pm i \left(r\pi + \frac{\pi}{4} \right)$ для великих значень індексу r .

Далі Дугол природно звернувся до напівбезмежної смуги $x > 0$, $|y| < b$, на торці $x = 0$ якої діє система нормальних $P(y)$ та дотичних $Z(y)$ зусиль, які відповідно є непарною та парною функціями від y та задовольняють умови статичної рівноваги за інтегральними значеннями згинального моменту та перерізуювальної сили:

$$\int_{-b}^b P(y)y dy = 0, \quad \int_{-b}^b Z(b)dy = 0.$$

Згідно з поданням (2) розв'язок такої граничної задачі можна шукати у вигляді рядів з комплексними коефіцієнтами C_r таких, що одночасно вико-

нуються дві функціональні рівності

$$\begin{aligned} i \sum_r C_r [(3 - \operatorname{ch} 2\alpha_r b) \operatorname{sh} \alpha_r y + 2\alpha_r y \operatorname{ch} \alpha_r y] &= P(y), \\ \sum_r C_r [(1 - \operatorname{ch} 2\alpha_r b) \operatorname{ch} \alpha_r y + 2\alpha_r y \operatorname{sh} \alpha_r y] &= Z(y), \end{aligned} \quad (4)$$

у яких підсумовування здійснюється за парами коренів (3) з $\operatorname{Im} \alpha_r > 0$. Дугол, однак, не запропонував жодного алгоритму для знаходження цих коефіцієнтів з двох розвинень (4).

Файлон [16] першим звернувся до розв'язання цієї незвичної для класичної математичної фізики задачі. Узагальнивши свій підхід на випадок, коли система функцій $\varphi(y, \lambda_k)$ залежить не від добутку $\lambda_k y$, а окремо від y та від λ_k , він зміг виразити явно (та єдиним чином, як він гадав, див. [21] для повнішого огляду цього питання) коефіцієнти C_r за допомогою лише одного (першого) рівняння (4) для полінома $P(y)$. Файлон також навів приклад такого розвинення

$$y^3 - \frac{3}{5} y b^2 = -b \sum_r \frac{1}{\alpha_r^2} \left[\alpha_r y \frac{\operatorname{ch} \alpha_r y}{\operatorname{sh} \alpha_r b} + (2 - \alpha_r b \operatorname{coth} \alpha_r b) \frac{\operatorname{sh} \alpha_r y}{\operatorname{sh} \alpha_r b} \right], \quad (5)$$

у якому сума береться для $\operatorname{Im} \alpha_r > 0$. (Еквівалентність функцій у (4) і (5) легко доводиться за допомогою рівняння (3).)

Такий парадоксальний математичний результат про необхідність лише однієї граничної умови для нормального навантаження при довільному дотичному навантаженні на торці ймовірно здавався Файлону (а він активно працював у механіці та прикладній математиці, був одним із запроваджувачів фотопружності, див. [22] для детальних посилань) та іншим ученим у цій галузі настільки незвичним, що публікацій, присвячених методу одинорідних розв'язків (так його пізніше назвав А. І. Лур'є [4]), не було упродовж наступних 33 років!

Лише в 1940 році цей підхід було незалежно перевідкрито та викладено у статтях П. Ф. Папковича [8] і Фадле [15] при розгляді плоских задач теорії пружності для прямокутника. П. Ф. Папкович у статті [7] в ювілейному номері, присвяченому академіку Б. Г. Гальоркіну (з котрим у нього, за свідченням В. В. Новожилова [6, с. 76], були напружені стосунки, які перейшли у взаємну неприязнь), розглянув також задачу про згин тонкої прямокутної ізотропної пластинки з двома жорстко защемленими сторонами $y = \pm b$, навантаженої заданням на сторонах $x = 0$, $x = \ell$ будь-яких двох з чотирьох механічних характеристик: прогину w , кута повороту $\partial w / \partial x$, згинального моменту M_x і перерізувальної сили Q .

Якщо бути історично точним, то перший детальний виклад методу одинорідних розв'язків було зроблено в капітальних підручниках П. Ф. Папковича з теорії пружності [10, с. 482] (у вигляді вправи з розгорнутим розв'язком!) та з будівельної механіки корабля [9, §§ 32–36]. Однак порівняно невеликий тираж цих підручників, а також друга світова війна, яка почалась незабаром, не дозволили цим видатним розділам отримати заслужене широке розповсюдження серед учених та інженерів-практиків. Тим не менше, цікаво є прослідкувати за еволюцією підходу П. Ф. Папковича до побудови шуканої бігармонічної функції – від напівевристичних міркувань з використанням методу Бубнова з подальшим розв'язуванням допоміжних нескінченних рекурентних систем диференціальних рівнянь у підручниках [9, 10] до чіткого запису остаточного подання розв'язку за допомогою методу відокремлення змінних у статтях [7, 8].

Варто зауважити про цікаву долю статті [8], яка була досить детально прореферована у провідних світових реферативних журналах (E. Reissner у *Math. Rev.*, 1941, **2**, р. 332, і U. Wegner у *Zentralblatt für Math.*, 1940/41, **23**, S. 127–128). Журнал *Доклады АН СССР* (нова серія) у ті часи випускався паралельно з російськомовним варіантом також і в перекладі іноземними мовами – для розповсюдження за кордоном. Статтю [8] було надруковано німецькою мовою. (Відзначимо, що після несподіваної смерті П. Ф. Папковича у квітні 1946 року про цю основоположну роботу навіть не було згадано у детальному переліку його публікацій у *Прикл. математике и механике*, 1946, **10**, с. 305–312. Політика інколи має непередбачуваний вплив на науку). Порівняння російського та німецького текстів виявляє цікаву розбіжність. У німецькому варіанті статті після викладу алгоритму методу однорідних розв'язків відсутня одна фраза російського варіанту: «Жодна з ітерацій, необхідних для визначення сталих a_k і c_k [двох систем комплексних коефіцієнтів, аналогічних C_r в (4) для виконання двох крайових умов у напруженнях на торцях прямокутника $x = 0$ та $x = \ell$ – заув. авт.], не вимагає розв'язування ніяких нескінченних систем алгебраїчних рівнянь і може бути легко здійснена.»

На нашу думку, на цю ключову фразу не звернули уваги наступні численні дослідники, огляд праць яких наведено у [11, 20], хоча вона заслуговує пильної уваги. Чи насправді П. Ф. Папкович винайшов алгоритм, який принципово дозволяє уникнути обчислювальних ускладнень [15, 18] при розв'язуванні функціональних рівнянь вигляду (4) способом колокацій з подальшим застосуванням методу найменших квадратів? Спробуємо розібратись.

Постановка задачі. Двовимірною задачею теорії пружності для прямокутника $0 < x < \ell$, $-b < y < b$ за силового навантаження торців $x = 0$ і $x = \ell$ полягає у відшукуванні неперервних і двічі диференційованих компонент тензора напружень $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$, які задовольняють рівняння рівноваги та суцільності й набувають заданих значень нормальних і дотичних зусиль:

$$\begin{aligned} \sigma_x(0, y) = f_0(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = g_0(y), \quad -b \leq y \leq b, \\ \sigma_x(\ell, y) = f_\ell(y), \quad \tau_{xy}(\ell, y) = g_\ell(y), \quad -b \leq y \leq b, \end{aligned} \quad (6)$$

за вільних від навантажень сторін $y = \pm b$:

$$\sigma_y(x, \pm b) = 0, \quad \tau_{xy}(x, \pm b) = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (7)$$

Умови статичної рівноваги прикладених навантажень мають вигляд

$$\begin{aligned} - \int_{-b}^b f_0(y) dy + \int_{-b}^b f_\ell(y) dy = 0, \quad - \int_{-b}^b g_0(y) dy + \int_{-b}^b g_\ell(y) dy = 0, \\ \int_{-b}^b f_0(y) y dy - \int_{-b}^b f_\ell(y) y dy + \ell \int_{-b}^b g_\ell(y) dy = 0. \end{aligned}$$

Згідно з методикою [1, 17] можна підбором бігармонічного полінома звести крайові умови (6) до самозрівноважених за інтегральними зусиллями й моментом на кожній стороні навантажень

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b f_0(y) dy = 0, \quad \int_{-b}^b g_0(y) dy = 0, \quad \int_{-b}^b f_0(y) y dy = 0, \\ \int_{-b}^b f_\ell(y) dy = 0, \quad \int_{-b}^b g_\ell(y) dy = 0, \quad \int_{-b}^b f_\ell(y) y dy = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

не змінюючи при цьому умови (7). Тому надалі ми будемо вважати, що умови (8) виконуються.

Функції $f_0(y)$, $f_\ell(y)$, $g_0(y)$, $g_\ell(y)$ можуть бути довільними, представляючи розривні і зосереджені навантаження, що суттєво впливає [2, 19] на збіжність розвинень вигляду (4). Слід підкреслити, що в теорії пружності (як і у всій механіці суцільних середовищ) межа тіла розглядається як щось відмінне від самого тіла і, як наслідок, на ній можуть задаватись умови, що порушують неперервність і диференційовність компонент тензора напружень. Зокрема, можуть не виконуватись умови парності дотичних напружень у кутових точках прямокутника, тобто

$$g_0(b) \neq 0, \quad g_0(-b) \neq 0, \quad g_\ell(b) \neq 0, \quad g_\ell(-b) \neq 0. \quad (9)$$

Хоча така можливість для випадку чверті площини була відзначена ще у короткому повідомленні [23] і відображена у низці підручників з теорії пружності [12, 25], нещодавно вона знову привернула увагу дослідників для випадку подібних задач про течію Стокса в прямокутнику [26]. Варто зауважити, що поліноміальні розв'язки не дають можливості усунути умови (9) і звести задачу до неперервних у кутових точках навантажень.

Нижче будемо розглядати граничний випадок прямокутної області – півсмуги $0 \leq x < \infty$, навантаженої на торці $x = 0$ системою самозрівноважених зусиль $f_0(y)$, $g_0(y)$. Це дозволить дещо спростити виклад алгоритму П. Ф. Папковича, не змінюючи принципово суті справи.

Крайова задача (6), (7) внаслідок введення функції напружень Ері $\Phi(x, y)$ згідно з рівностями

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

може бути зведена до класичної бігармонічної задачі: розв'язання бігармонічного рівняння

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad (10)$$

($\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа) з крайовими умовами

$$\begin{aligned} \Phi(0, y) = F(y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = G(y), \quad -b \leq y \leq b, \\ \Phi(x, \pm b) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=\pm b} = 0, \quad 0 \leq x < \infty. \end{aligned} \quad (11)$$

Вимоги згасання напружень на безмежності (тобто реально на достатньо великій відстані від торця $x = 0$) накладають відповідні обмеження на характер спадання функції $\Phi(x, y)$ і її похідних.

Функції $F(y)$, $G(y)$ очевидним чином визначаються через задані функції $f_0(y)$, $g_0(y)$ згідно з рівняннями

$$\begin{aligned} F(y) = \int_{-b}^y d\eta \int_{-b}^{\eta} f_0(\xi) d\xi, \quad F''(y) = f_0(y), \\ G(y) = -\int_{-b}^y g_0(\xi) d\xi, \quad G'(y) = -g_0(y). \end{aligned} \quad (12)$$

З урахуванням співвідношень (8) ці функції задовольняють додаткові умови

$$F(\pm b) = 0, \quad F'(\pm b) = 0, \quad G(\pm b) = 0$$

П. Ф. Папкович [8] накладає також вимоги

$$G'(\pm b) = 0,$$

однак вони можуть бути виконані лише для (найбільш типового) випадку виконання співвідношень парності дотичних напружень у кутових точках.

Побудова розв'язку. У загальному випадку бігармонічну функцію $\Phi(x, y)$ для прямокутної області $0 < x < \ell$, $-b < y < b$ П. Ф. Папкович запропонував шукати у вигляді ряду [7]

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ Y_k(y) \left[a_k e^{-\lambda_k x} + b_k e^{-\lambda_k(\ell-x)} \right] + \bar{Y}_k(y) \left[\bar{a}_k e^{-\bar{\lambda}_k x} + \bar{b}_k e^{-\bar{\lambda}_k(\ell-x)} \right] \right\}, \quad (13)$$

де рискою зверху позначено операцію комплексного спряження, а $Y_k(y)$ – функції, які задовольняють рівняння

$$Y_k''''(y) + 2\lambda_k^2 Y_k''(y) + \lambda_k^4 Y_k(y) = 0 \quad (14)$$

та граничні умови

$$Y_k(\pm b) = 0, \quad Y_k'(\pm b) = 0, \quad (15)$$

a_k, b_k – сталі інтегрування, λ_k – власні числа крайової задачі (14), (15).

Нескладно знайти, що парні функції $Y_k(y)$ свого аргументу (присвоїмо їм услід за Папковичем номери $k = 0, 2, 4, \dots$) мають вигляд

$$Y_k(y) = \frac{\cos \lambda_k y}{\cos \lambda_k b} - \frac{y \sin \lambda_k y}{b \sin \lambda_k b}, \quad (16)$$

де λ_k – комплексні корені рівняння

$$\sin 2\lambda_k b = -2\lambda_k b, \quad (17)$$

що лежать у першому квадранті комплексної площини λ .

Непарні функції $Y_k(y)$, $k = 1, 3, 5, \dots$, визначаються рівностями

$$Y_k(y) = \frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k b} - \frac{y \cos \lambda_k y}{b \cos \lambda_k b}, \quad (18)$$

де λ_k – комплексні корені рівняння

$$\sin 2\lambda_k b = 2\lambda_k b \quad (19)$$

що лежать у першому квадранті комплексної площини λ .

Незалежно від Дугола [14] П. Ф. Папкович запропонував [9, § 36] елегантний спосіб знаходження комплексних коренів рівнянь (17) і (19), відокремлюючи дійсну та уявну частини цих рівнянь. Перші п'ять коренів $2\lambda_k b$ цих рівнянь наведено у табл. 1.

Таблиця 1

Корені $2\lambda_k b$ рівняння (17)	Корені $2\lambda_k b$ рівняння (19)
4.211 + i 2.250	7.498 + i 2.769
10.713 + i 3.103	13.889 + i 3.353
17.073 + i 3.550	20.239 + i 3.716
23.398 + i 3.859	26.560 + i 3.983
29.700 + i 4.093	32.860 + i 4.193

Отже, питання про визначення бігармонічної функції $\Phi(x, y)$ зводиться до відшукування сталих інтегрування a_k і b_k з граничних умов на торцях прямокутника $x = 0$ та $x = \ell$.

Зауважимо, що, крім умов (11), П. Ф. Папкович розглянув [7, 9] й інші типи задання на торцях прямокутника крайових умов для бігармонічної функції, які мають пряме застосування до теорії пластин, наприклад, коли задано прогин пластини і згинальний момент, або кут повороту торця і

реакцію опорного контуру, інакше кажучи, коли на торцях задані або сама функція та її друга похідна, або перша й третя похідні шуканої функції. Такі задачі, що відповідають так званим умовам «шарнірного опирання», хоча і мають практичний інтерес, проте при їх розв'язуванні не виникає жодних ускладнень. При цьому необхідно використовувати так звані умови узагальненої ортогональності [7–9]

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b [Y_k''(y)Y_n''(y) - \lambda_k^2 \lambda_n^2 Y_k(y)Y_n(y)] dy &= 0, & k \neq n, \\ \int_{-b}^b [Y_k''(y)\bar{Y}_n''(y) - \lambda_k^2 \bar{\lambda}_n^2 Y_k(y)\bar{Y}_n(y)] dy &= 0 & \forall k, n, \end{aligned} \quad (20)$$

які мають місце для функцій у виразах (16), (18). Варто відмітити, що ці чудові властивості комплексної системи власних функцій несамоспряженої крайової задачі (14), (15) були значно пізніше від робіт П. Ф. Папковича незалежно доведені в [27]. Теоретичному обґрунтуванню алгоритму для цих часткових випадків граничних умов була присвячена глибоко змістовна робота Г. А. Грінберга [3].

Будемо розглядати тільки умови (11), які відповідають плоскій задачі теорії пружності для прямокутника з силовим навантаженням сторін (6), (7) при $\ell \rightarrow \infty$ і $f_\ell(y) = g_\ell(y) = 0$.

Коли нас цікавить напружений стан півсмуги $x > 0$, $-b < y < b$, зумовлений силовим навантаженням торця $x = 0$, бігармонічну функцію, яка є розв'язком задачі (10), (11), треба шукати у вигляді

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ a_k Y_k(y) e^{-\lambda_k x} + \bar{a}_k \bar{Y}_k(y) e^{-\bar{\lambda}_k x} \right\}. \quad (21)$$

Отже, для відшукування функції $\Phi(x, y)$ потрібно визначити сталі a_k з крайових умов (11).

Підставивши (21) в (11), отримуємо два функціональні рівняння на шукані сталі інтегрування

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} [a_k Y_k(y) + \bar{a}_k \bar{Y}_k(y)] &= F(y), \\ \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \lambda_k Y_k(y) + \bar{a}_k \bar{\lambda}_k \bar{Y}_k(y)] &= -G(y). \end{aligned} \quad (22)$$

Для визначення сталих a_k з системи рівнянь (22) П. Ф. Папкович запропонував використати умови узагальненої ортогональності (20). Щоб скористатись цими умовами, він уводить невідому дійсну функцію $H(y)$, яка задовольняє співвідношення

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_{x=0} = H(y). \quad (23)$$

Продиференціювавши двічі першу з рівностей (22) і помноживши результат на $Y_n''(y)$, віднімемо від отриманого виразу рівність

$$\sum_{k=0}^{\infty} [a_k \lambda_k^2 \lambda_n^2 Y_k(y) Y_n''(y) + \bar{a}_k \bar{\lambda}_k^2 \bar{\lambda}_n^2 \bar{Y}_k(y) Y_n''(y)] = \lambda_n^2 Y_n''(y) H(y),$$

знайдену шляхом домноження (23) на $\lambda_n^2 Y_n''(y)$. У такий спосіб отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} [a_k (\bar{Y}_k''(y) Y_n''(y) - \lambda_k^2 \lambda_n^2 Y_k(y) Y_n''(y)) + \bar{a}_k (\bar{Y}_k''(y) Y_n''(y) - \\ - \bar{\lambda}_k^2 \bar{\lambda}_n^2 \bar{Y}_k(y) Y_n''(y))] = F''(y) Y_n''(y) - \lambda_n^2 Y_n''(y) H(y). \end{aligned}$$

Нескладно переконатись, що проінтегрувавши його від $-b$ до b та використавши умови (20), отримаємо такі вирази для a_k :

$$a_k = A_k - X_k, \quad (24)$$

де

$$A_k = \frac{1}{M_k} \int_{-b}^b F''(y) Y_k''(y) dy$$

– відомі коефіцієнти, а

$$X_k = \frac{\lambda_k^2}{M_k} \int_{-b}^b H(y) Y_k(y) dy \quad (25)$$

– невідомі коефіцієнти, оскільки містять невідому функцію $H(y)$,

$$M_k = \int_{-b}^b \left[(Y_k''(y))^2 - \lambda_k^4 Y_k^2(y) \right] dy. \quad (26)$$

Зауважимо, що з використанням (16)–(19) вираз для норми (26) можна спростити до вигляду

$$M_k = \frac{4\lambda_k^2}{b} \operatorname{ctg}^2 \lambda_k b \quad \text{при} \quad k = 0, 2, 4, \dots,$$

де λ_k є коренями (17), та

$$M_k = \frac{4\lambda_k^2}{b} \operatorname{tg}^2 \lambda_k b \quad \text{при} \quad k = 1, 3, 5, \dots,$$

де λ_k є коренями (19).

Таким чином, задачу знаходження коефіцієнтів a_k , у свою чергу, зведено до знаходження невідомої функції $H(y)$, введеної рівністю (23).

Головна ідея П. Ф. Папковича полягає у побудові функції $H(y)$ у вигляді розвинення в ряд

$$H(y) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n R_n(y) \quad (27)$$

за відомою повною системою дійсних функцій $R_n(y)$, головна вимога до яких – задовольняти однорідні умови на бічних сторонах півсмуги $R_n(\pm b) = 0$, $R_n'(\pm b) = 0$. Якщо мати у розпорядженні таку систему функцій, то основні невідомі S_n визначатимуться за формулою

$$X_k = \sum_{n=1}^{\infty} v_{kn} S_n, \quad (28)$$

яка випливає з (27) та (25). Тут позначено

$$v_{kn} = \frac{\lambda_k^2}{M_k} \int_{-b}^b R_n(y) Y_k(y) dy. \quad (29)$$

Тепер треба використати друге зі співвідношень (22). Підставивши у нього вираз (24) з використанням усіх подальших викладок, приходимо до рівняння

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n T_n(y) = A(y), \quad (30)$$

де

$$A(y) = \sum_{k=0}^{\infty} [A_k \lambda_k Y_k(y) + \bar{A}_k \bar{\lambda}_k \bar{Y}_k(y)] + G(y),$$

$$T_n(y) = \sum_{k=0}^{\infty} [\lambda_k Y_k(y) v_{kn} + \bar{\lambda}_k \bar{Y}_k(y) v_{kn}]. \quad (31)$$

Зауважимо, що функція $A(y)$ є відомою, а невідомі функції $T_n(y)$ залежать за посередництвом v_{kn} від вибору функцій $R_n(y)$. Вибір системи функцій $R_n(y)$ варто здійснити таким чином, щоб, крім виконання ними однорідних крайових умов на бокових сторонах півсмути, вони задовольняли умови ортогональності функцій $T_n(y)$:

$$\int_{-b}^b T_n(y) T_m(y) dy = 0, \quad m \neq n. \quad (32)$$

Тоді на основі (30) легко знайти шукані невідомі

$$S_n = \frac{\int_{-b}^b A(y) T_n(y) dy}{\int_{-b}^b T_n^2(y) dy}.$$

Побудову функцій $R_n(y)$ П. Ф. Папкович пропонує здійснювати послідовно у вигляді

$$R_1(y) = Z_1(y),$$

$$R_n = Z_n(y) + \sum_{j=1}^{n-1} \eta_{nj} R_j(y), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (33)$$

де η_{nj} – поки що невідомі коефіцієнти, а $Z_n(y)$ – головні форми вільних коливань жорстко зацемленого стрижня. Згідно з класичною роботою Рітца [24] у наших позначеннях ці функції мають вигляд

$$Z_n(y) = \left[\cos \frac{k_n(y+b)}{2b} - \operatorname{ch} \frac{k_n(y+b)}{2b} \right] -$$

$$- \left[\sin \frac{k_n(y+b)}{2b} - \operatorname{sh} \frac{k_n(y+b)}{2b} \right] \frac{\cos k_n - \operatorname{ch} k_n}{\sin k_n - \operatorname{sh} k_n}, \quad (34)$$

де числа $k_n > 0$ – корені рівняння $\cos k \operatorname{ch} k = 1$. Ясно, що корені цього рівняння прямують до нулів косинуса, тобто до величин $\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ для великих значень n . Перші два корені суть $k_1 = 4.730$ та $k_2 = 7.853$, причому вже другий **корінь** відрізняється від асимптотичного значення лише на 0.001.

При $n = 2m - 1$, $m = 1, 2, 3, \dots$, функції $Z_n(y)$, подані формулою (34), є парними і для їх обчислення можна використовувати формулу

$$Z_n(y) = \frac{2 \left(\operatorname{ch} \frac{k_n}{2} \sin \frac{k_n}{2} - \operatorname{sh} \frac{k_n}{2} \cos \frac{k_n}{2} \right)}{\sin k_n - \operatorname{sh} k_n} \left(\operatorname{ch} \frac{k_n}{2} \cos \frac{k_n y}{2b} - \right.$$

$$\left. - \cos \frac{k_n}{2} \operatorname{ch} \frac{k_n y}{2b} \right), \quad (35)$$

а при $n = 2m$, $m = 1, 2, 3, \dots$, функції $Z_n(y)$ є непарними й мають вигляд

$$Z_n(y) = \frac{2 \left(\operatorname{ch} \frac{k_n}{2} \sin \frac{k_n}{2} + \operatorname{sh} \frac{k_n}{2} \cos \frac{k_n}{2} \right)}{\sin k_n - \operatorname{sh} k_n} \left(\operatorname{sh} \frac{k_n}{2} \sin \frac{k_n y}{2b} - \sin \frac{k_n}{2} \operatorname{sh} \frac{k_n y}{2b} \right). \quad (36)$$

Зауважимо, що додавши вирази (35) та (36), отримаємо функції, які задаються формулою (34). Графіки функцій $Z_n(y)$ для перших непарних і парних значень n наведено відповідно на рис. 1а і рис. 1б.

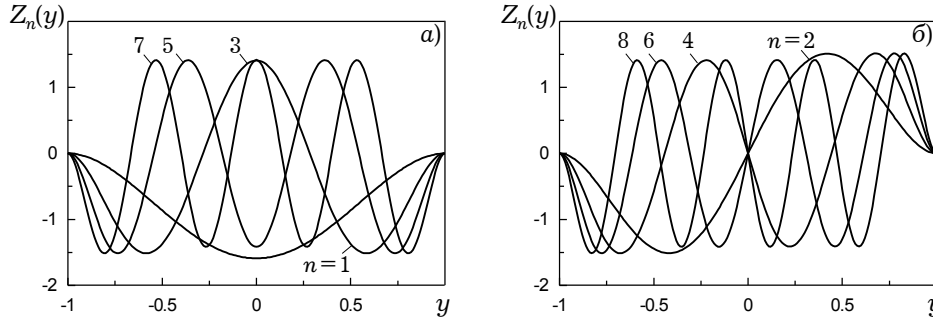


Рис. 1

Визначення самих коефіцієнтів η_{nj} має здійснюватись так, щоб виконувались умови ортогональності (32). Тут впритул наближаємося до відповіді на запитання, поставлене нами в кінці вступної частини. Адже про визначення цих коефіцієнтів П. Ф. Папкович каже наступне [7, с. 368]: «Визначення сталих η_{nj} не вимагає, очевидно, розв'язування будь-яких складних систем алгебраїчних рівнянь: кожна з них визначається зі свого рівняння першого степеня.»

Справді, поклавши згідно з (33) $R_1(y) = Z_1(y)$, на основі формули (29) знаходимо

$$v_{k1} = \frac{\lambda_k^2}{M_k} \int_{-b}^b Z_1(y) Y_k(y) dy \equiv z_{k1}, \quad (37)$$

а за формулою (31) –

$$T_1(y) = \sum_{k=0}^{\infty} [\lambda_k Y_k(y) v_{k1} + \bar{\lambda}_k \bar{Y}_k(y) \bar{v}_{k1}]. \quad (38)$$

Отже, v_{k1} та $T_1(y)$ знайдено.

На наступному кроці вибираємо $R_2(y) = Z_2(y) + \eta_{21} R_1(y)$. За тією ж формулою (29) обчислюємо:

$$v_{k2} = z_{k2} + \eta_{21} z_{k1}, \quad (39)$$

де

$$z_{k2} = \frac{\lambda_k^2}{M_k} \int_{-b}^b Z_2(y) Y_k(y) dy$$

– відоме комплексне число, а z_{k1} знайдено вище згідно з виразом (37). За формулою (31) знаходимо з використанням (39)

$$T_2(y) = P_2(y) + \eta_{21} T_1(y), \quad (40)$$

де

$$P_2(y) = \sum_{k=0}^{\infty} [\lambda_k Y_k(y) z_{k2} + \bar{\lambda}_k \bar{Y}_k(y) \bar{z}_{k2}]$$

– відома функція.

Використавши умову ортогональності (32) для функцій $T_1(y)$ і $T_2(y)$, що подаються формулами (38) та (40), отримуємо

$$\eta_{21} = -\frac{\int_{-b}^b P_2(y) T_2(y) dy}{\int_{-b}^b T_1^2(y) dy}. \quad (41)$$

Отже, і $R_2(y)$ також знайдено, і при цьому задовольняється умова ортогональності

$$\int_{-b}^b T_1(y) T_2(y) dy = 0$$

виразами (38) та (40) з урахуванням (41). У такий самий спосіб здійснюється побудова й наступних функцій $R_n(y)$.

Таким чином переконаємось, що побудова коефіцієнтів η_{nj} здійснюється послідовно (тобто не можна визначити, наприклад η_{31} , не визначивши спершу η_{21} і т. д.), але при цьому **не потрібно** розв'язувати нескінченних систем алгебраїчних рівнянь.

Перевіримо цей алгоритм на числовому прикладі.

Числовий приклад та обговорення. Розглянемо простий, але типовий приклад застосування алгоритму. Нехай функції $F(y)$ та $G(y)$, що задають крайові умови (11) для бігармонічної функції $\Phi(x, y)$, мають вигляд (рис. 2)

$$F(y) = F_0 \left(\cos \frac{\pi y}{b} + 1 \right), \quad G(y) = 0. \quad (42)$$

Тоді згідно з (12)

$$f(y) = -F_0 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \cos \frac{\pi y}{b}, \quad g_0(y) = 0. \quad (43)$$

Нижче у табл. 3 і на графіках наведено результати розрахунків безрозмірних функцій $\tilde{\Phi} = \Phi/F_0$, $\{\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y, \tilde{\tau}_{xy}\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\} b^2 / (F_0 \pi^2)$ для крайових умов (42) і (43) при $b = 1$. Надалі для спрощення запису символ « \sim » опущено.

В усіх формулах, де виконується підсумовування за k , обмежуємося 40 доданками.

Зауважимо, що для заданих крайових умов (42) і (43), які є парними функціями від координат, ті доданки в сумі (28), які відповідають парним n , дорівнюють нулеві. Це зумовлено тим, що парним значенням n відповідають непарні функції $Z_n(y)$, які подаються формулою (36).

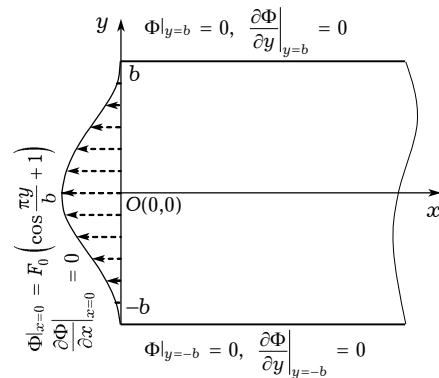


Рис. 2

У табл. 2 наведено перші п'ять коефіцієнтів a_k , для яких при обчисленні сталих X_k , що містяться у формулі (24), використано формулу $X_k = \sum_{n=1}^N v_{kn} S_n$ для значень $N = 1, N = 3, N = 5$, замість безмежної суми (28).

Таблиця 2

	$N = 1$	$N = 3$	$N = 5$
a_0	$1.496 - i 2.744$	$1.521 - i 2.747$	$1.522 - i 2.748$
a_2	$-0.051 + i 0.341$	$-0.219 + i 0.477$	$-0.211 + i 0.478$
a_4	$-0.029 + i 0.038$	$-0.030 - i 0.006$	$-0.065 + i 0.025$
a_6	$-0.010 + i 0.009$	$-0.005 - i 0.001$	$-0.007 - i 0.013$
a_8	$-0.004 + i 0.003$	$-0.002 - i 0.0002$	$-0.0004 - i 0.003$

У табл. 3 для деяких точок півсмути наведено значення функції Φ . У стрічці КУ наведено значення функції $\cos(\pi y/b) + 1$, яка є нормованою за F_0 крайовою умовою (42). Числові дослідження показали, що максимальна різниця у відповідних точках області між значеннями функції Φ при $N = 3$ та значеннями цієї функції при $N = 1$ становить 6.3%, а між значеннями при $N = 5$ і $N = 3$ – 0.1%. З подальшим збільшенням N цей відсоток й далі зменшується. Це свідчить про добру збіжність методу для розрахунку бігармонічної функції Φ при крайових умовах (42).

Таблиця 3

$x \backslash y$	0.00	0.25	0.50	0.75	N
0.0	2.0000	1.70711	1.0000	0.29289	1
	2.0000	1.70711	1.0000	0.29289	3
	2.0000	1.70711	1.0000	0.29289	5
	2.0000	1.70711	1.0000	0.29289	КУ
0.5	1.26999	1.10129	0.67896	0.21922	1
	1.27819	1.10373	0.67294	0.21431	3
	1.27818	1.10376	0.67297	0.21429	5
1.0	0.51869	0.44843	0.27294	0.08509	1
	0.52137	0.45027	0.27336	0.08502	3
	0.52138	0.45028	0.27337	0.08503	5
1.5	0.15335	0.13117	0.07710	0.02247	1
	0.15459	0.13221	0.07772	0.02267	3
	0.15459	0.13222	0.07773	0.02267	5
2.0	0.02749	0.02285	0.01218	0.00284	1
	0.02798	0.02327	0.01244	0.00292	3
	0.02798	0.02327	0.01244	0.00293	5

Як бачимо з цієї таблиці, на торці півсмути $x = 0$ функція Φ для різних значень N точно задовольняє крайові умови (42).

На рис. 3а показано розподіли напружень σ_x за координатою y при $N = 15$. З огляду на задані граничні умови (43) ці напруження є самозрівноваженими, тобто задовольняють інтегральні умови рівноваги в довільному перерізі $x = \text{const}$:

$$\int_{-1}^1 \sigma_{xx} dy = \int_{-1}^1 y \sigma_{xx} dy = 0. \quad (44)$$

Розрахунки показали, що наведені на цьому рисунку напруження задовольняють умови (44) з точністю до 10^{-5} .

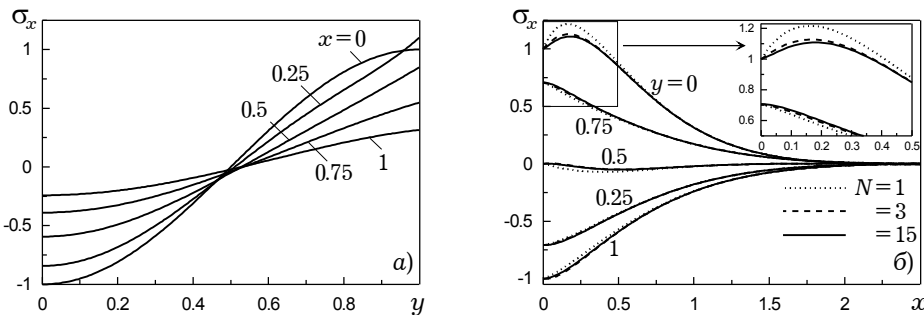


Рис. 3

На рис. 3б показано розподіли напружень σ_x за координатою x у перерізах $y = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ для значень $N = 1; 3; 15$. Як бачимо, на відстані від торця $x = 0$, більшій ніж 2.5, збурення цих напружень згасають і

напруження набувають нульових значень. Така поведінка розрахованих напружень підтверджує принцип Сен-Венана [10, 12, 25] про місцевий вплив на загальний напружений стан зовнішніх зусиль.

Зазначимо, що на відстані від торця $x = 0$, більшій ніж 0.75, практично немає різниці між показаними на рисунку наближеннями для різних значень N , проте така різниця є порівняно вагомою ближче від вказаної відстані до торця, особливо при $y = 1$. На межі $x = 0$ значення напружень для усіх наближень співпадають з відповідними значеннями функції, що задана крайовою умовою (43). Варто також звернути увагу на поведінку наближень при підході до торця $x = 0$: зі збільшенням N вони все більше прямують до такого положення, коли дотична до цих кривих у точках $(0, y)$, $|y| \leq 1$, є паралельною до осі Ox (див. збільшений фрагмент на рис. 3б).

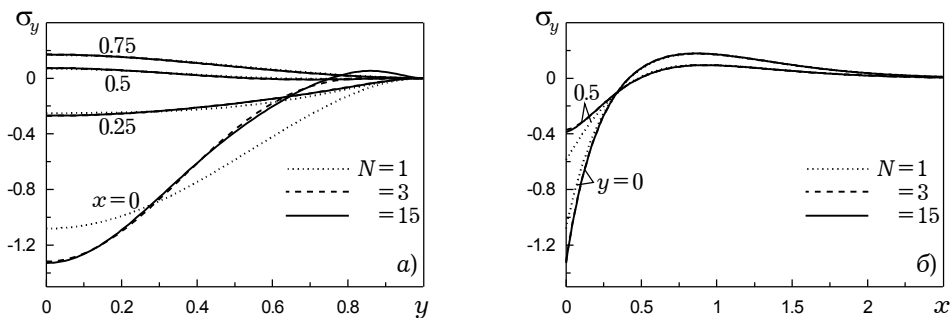


Рис. 4

На рис. 4 наведено розраховані за попереднім прикладом напруження σ_y . На рис. 4а бачимо, що для $N > 3$ значення вказаних напружень майже не відрізняються. На торці півсмуги $x = 0$ спостерігаємо порівняно велику відмінність між значеннями напружень σ_y при $N = 1$ та $N \geq 3$. З аналізу кривих на рис. 4б робимо висновок, що розраховані напруження є самозрівноваженими, й на відстані, більшій ніж 2.5, від границі $x = 0$ є нульовими. На відстані від торця, яка перевищує 0.35, практично немає різниці між напруженнями для різних значень N .

Напруження τ_{xy} показані на рис. 5. Найбільша відмінність між значеннями цих напружень є на торці півсмуги $x = 0$, але при віддалені від нього на відстань, більшу ніж 1.25, між ними практично немає різниці.

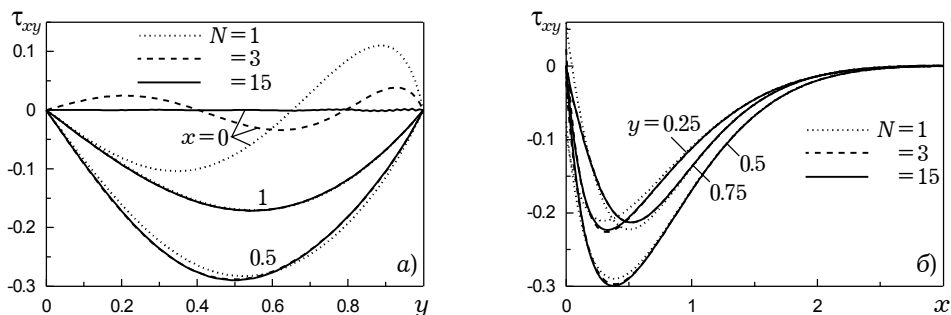


Рис. 5

Заключні зауваження. Запропонований П. Ф. Папковичем [7, 8] для плоскої задачі теорії пружності та задач згину тонких пластин алгоритм визначення коефіцієнтів розвинень бігармонічної функції у прямокутній області (чи у півсмузі) в ряди за комплексними однорідними розв'язками дійсно є вельми швидкозбіжним і простим ітераційним процесом, що не потребує розв'язування нескінченних систем алгебраїчних рівнянь. Однак,

незважаючи на заклик П. Ф. Папковича табулювати функції $Y_k(y)$ та деякі допоміжні величини і зауваження [9, § 36]: «Ті перспективи, які обіцяє їх табулювання, повинні вважатись вартими тієї затрати праці, яку потрібно виконати для складання таблиць цих функцій. Тому було б корисно виконати цю роботу, тим більше, що виконана один раз назавжди, вона дозволить відносно просто розраховувати найрізноманітніші пластини, у яких дві взаємно протилежні грані жорстко закріплені», – і до сьогодні жодних практичних кроків у цьому напрямку не зроблено. Звичайно, наявність сучасних персональних комп'ютерів у значній мірі знижує актуальність такої роботи. Більш важливою, на наш погляд, є та обставина, що незважаючи на дуже привабливу ідею, яка лежить в основі методу однорідних розв'язків, практичне використання цього підходу зустрічає багато зайвих перешкод. Наприклад, позитивна відповідь на дуже важливе теоретичне питання про збіжність рядів вигляду (13) та (21) і повноти відповідної системи комплексних функцій потребує значних зусиль [19]. З іншого боку, метод суперпозиції [2] для розв'язування таких задач має переваги з точки зору практичних обчислень. Порівняння результатів, отриманих обома підходами, може бути предметом окремої публікації.

1. *Вигак В. М., Токовий Ю. В.* Построение элементарных решений плоской задачи теории упругости для прямоугольной области // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 7. – С. 79–87.
Te same: *Vigak V. M., Tokovyi Yu. V.* Construction of elementary solution to a plane elastic problem for a rectangular domain // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**. – P. 829–836.
2. *Гомилко А. М., Мелешко В. В.* Задача Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе // Докл. АН СССР. – 1987. – **294**. – С. 1045–1048.
Te same: *Gomilko A. M., Meleshko V. V.* The Dirichlet problem for the biharmonic equation in a half-strip // Soviet Math. Dokl. – 1987. – **35**. – P. 612–615.
3. *Гринберг Г. А.* О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными краями, и о некоторых его обобщениях // Прикл. математика и механика. – 1953. – **17**. – С. 211–228.
4. *Лурье А. И.* К теории толстых плит // Прикл. математика и механика. – 1942. – **6**. – С. 151–168.
5. *Максвелл Дж. К.* Трактат об электричестве и магнетизме. – Москва: Наука, 1989. – 416 с. – Т. 1.
6. *Новожилов В. В.* П. Ф. Папкович // Воспоминания о П. Ф. Папковиче. – Ленинград: Наука, 1984. – С. 75–76.
7. *Папкович П. Ф.* Два вопроса теории изгиба тонких упругих плит // Прикл. математика и механика. – 1941. – **5**. – С. 359–374.
8. *Папкович П. Ф.* Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // Докл. АН СССР. – 1940. – **27**. – С. 335–339.
Te same: *Papkovitsch P. F.* Über eine Form der Lösung des biharmonischen Problems für das Rechteck // C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS. – 1940. – **27**. – S. 334–338.
9. *Папкович П. Ф.* Строительная механика корабля. Ч. 2. Сложный изгиб и устойчивость стержней. Изгиб и устойчивость пластин. – Ленинград: Судпромгиз, 1941. – 960 с.
10. *Папкович П. Ф.* Теория упругости. – Ленинград–Москва: Оборонгиз, 1939. – 640 с.
11. *Прокопов В. К.* Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. – 1967. – № 279. – С. 31–46.
12. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
13. *Cauchy A. L.* Sur les résidus des fonctions exprimées par des intégrales définies // Œuvres Complètes d'Augustin Cauchy. – Paris: Gauthier-Villars, 1889. – Ser. II, **VII**. – P. 393–430.
14. *Dougall J.* An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. – 1904. – **41**. – P. 129–228.
15. *Fadle J.* Die Selbstspannungs-Eigenwertfunktionen der quadratischen Scheibe // Ing.-Archiv. – 1940. – **11**. – S. 125–148.

16. *Filon L. N. G.* On the expansions of polynomials in series of functions // Proc. London Math. Soc. (Ser. 2). – 1907. – **4**. – P. 396–430.
17. *Gaydon F. A.* The rectangle, under general equilibrium loading, in generalized plane stress // Proc. Roy. Soc. London. – 1965. – **A283**. – P. 356–378.
18. *Gaydon F. A., Shepherd W. M.* Generalized plane stress in a semi-infinite strip under arbitrary end-load // Proc. Roy. Soc. London. – 1964. – **A281**. – P. 184–206.
19. *Gregory R. D.* The traction boundary value problem for the elastostatic semi-infinite strip; existence of solution, and completeness of the Papkovitch–Fadle eigenfunctions // J. Elasticity. – 1980. – **10**. – P. 295–327.
20. *Lurie S. A., Vasiliev V. V.* The biharmonic problem in the theory of elasticity. – Amsterdam: Gordon and Breach, 1995. – 265 p.
21. *Meleshko V. V.* Selected topic in the history of the two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. – 2003. – **56**, № 1. – P. 33–85.
22. *Meleshko V. V., Selvadurai A. P. S.* Contributions to the theory of elasticity by Louis Napoleon George Filon as viewed in the light of subsequent developments in biharmonic problems in applied mechanics and engineering mathematics // J. Eng. Math. – 2003. – **46**. – P. 191–212.
23. *Reissner E.* Note on the theorem of the symmetry of the stress tensor // J. Math. Phys. – 1944. – **23**. – P. 192–193.
24. *Ritz W.* Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik // J. reine angew. Math. – 1908. – **135**. – S. 1–61.
25. *Sadd M. H.* Elasticity: theory, applications, and numerics. – Amsterdam: Elsevier, 2005. – 461 p.
26. *Shankar P. N.* On handling non-homogeneous corner data in confined steady Stokes flow // Proc. Roy. Soc. London. – 2004. – **A460**. – P. 479–485.
27. *Smith R. C. T.* The bending of a semi-infinite strip // Austral. J. Sci. Res. – 1952. – **5**. – P. 227–237.

**ОБ АЛГОРИТМЕ П. Ф. ПАПКОВИЧА В МЕТОДЕ
ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ДВУХМЕРНОЙ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ
ЗАДАЧИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ**

Изложены основные аспекты алгоритма П. Ф. Папковича в методе однородных решений для двухмерной бигармонической задачи в прямоугольной области. Сделан краткий исторический очерк начального этапа этого метода. Численно исследован типичный пример эффективного применения алгоритма.

**ON THE P. F. PAPKOVICH ALGORITHM IN METHOD OF HOMOGENEOUS
SOLUTIONS FOR SOLVING TWO-DIMENSIONAL
BIHARMONIC PROBLEM IN RECTANGULAR DOMAIN**

An algorithm developed by P. F. Papkovich for solving the two-dimensional biharmonic problem in a rectangular region is discussed. A short historical survey of the early stages of the method of homogeneous solutions is presented. Calculations and comparison of the results show an excellent agreement.

¹ Київ. нац. ун-т
ім. Тараса Шевченка, Київ,
² Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
09.05.06