

АНАЛІЗ ДИСИПАТИВНИХ СТРУКТУР У ДИФУЗІЙНИХ СИСТЕМАХ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

Досліджено дисипативні структури в рівняннях реакції-дифузії з дробовими похідними. Для знаходження наближеного аналітичного виразу для дисипативних структур, які мають місце в моделях з кубічними нелінійностями, використано розроблений раніше варіаційний метод. Отримані результати підтверджують, що нелінійність відіграє визначальну роль при формуванні структур, а просторові дробові похідні суттєво не змінюють вигляду дисипативних структур. У той же час зміна порядку часової дробової похідної якісно впливає на формування і вигляд дисипативних структур.

Моделі, в основі яких лежать класичні системи рівнянь реакції-дифузії, мають широке застосування при дослідженні явищ самоорганізації у фізичних, хімічних і біологічних системах (див., наприклад, [8, 12]). Зацікавленість цими явищами зберігає постійну тенденцію до зростання. Разом з тим в останні роки значну увагу почали приділяти також дифузійним рівнянням з дробовими похідними [7, 17–19]. Характерною рисою дифузійних моделей з дробовими похідними є те, що аналізувати їх нелінійні розв'язки досить важко. Більше того, лінійна теорія стійкості просторово-однорідного розподілу змінних також недостатньо розвинута [2, 7].

У цій роботі дослідимо формування дисипативних структур у системі реакції-дифузії з дробовими похідними як за часом, так і за просторовою координатою та нелінійностями кубічного типу. Отримані шляхом комп'ютерного моделювання розв'язки у випадку стаціонарних дисипативних структур (ДС) проаналізовано за допомогою варіаційного принципу Гаусса [3–5, 9, 13], внаслідок чого для системи з кубічними нелінійностями отримано аналітичні вирази (як залежності від порядку просторової дробової похідної) для параметрів, які наближають ці розв'язки. З іншого боку, на основі теорії функцій комплексної змінної вдалося пояснити природу коливань ДС і зміну самого характеру біфуркації при зміні порядку часової дробової похідної.

Для дослідження розглядаємо модель, яка описує активне середовище в термінах рівнянь реакції-дифузії з дробовими похідними:

$$\tau_\theta {}^C D_t^\alpha \theta = \ell^2 D_x^\beta \theta - q(\theta, \eta, A), \quad (1)$$

$$\tau_\eta {}^C D_t^\alpha \eta = L^2 D_x^\beta \eta - Q(\theta, \eta, A), \quad (2)$$

де ℓ , L – характерні довжини для змінних θ та η відповідно; $\delta = \frac{\tau_\theta}{\tau_\eta}$, τ_θ і

τ_η – характерні часи системи; $q(\theta, \eta, A)$, $Q(\theta, \eta, A)$ – нелінійні функції змінних θ , η і деякого параметра A . Загальний вигляд рівнянь реакції-дифузії є аналогічним до використаних у [3–5, 9] з єдиною відмінністю, якою є наявність дробових часових і просторових диференціальних операторів. Оператори ${}^C D_t^\alpha$, D_x^β у рівняннях (1), (2) визначають дробові похідні Капуто та Рімана – Ліувілля, які можуть бути записані у формі [15]

$${}^C D_t^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^T \frac{f^{(m)}(x, y)}{(t - y)^{\alpha+1-m}} dy, \quad (3)$$

$$D_x^\beta f = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \int_0^{L_s} \frac{f(y, t)}{(x - y)^{\beta+1-m}} dy, \quad (4)$$

де $m - 1 < \alpha, \beta < m$, m – додатне ціле число. У розглядуваному випадку $m = 2$ і систему досліджуємо на інтервалі $[0, 2L_s]$.

Систему доповнюємо таким крайовими умовами періодичного типу:

$$\begin{aligned}\theta(0, t) &= \theta(2L_s, t), & \eta(0, t) &= \eta(2L_s, t), \\ \theta'(x = 0, t) &= \theta'(x = 2L_s, t), \\ \eta'(x = 0, t) &= \eta'(x = 2L_s, t),\end{aligned}$$

а джерела вибираємо у вигляді [5, 6, 9, 14, 16]

$$q = -\theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \eta, \quad Q = \eta - \theta - A. \quad (5)$$

Змінні θ і η є дійсними скалярними полями з додатними та від'ємними зворотними зв'язками відповідно. Система реакції-дифузії (1), (2) має просторово-однорідний розподіл θ_0, η_0 , який може бути нестійким для певних значень параметра A . Тип такої нестійкості у випадку звичайних похідних ($\alpha = 1, \beta = 2$) є добре відомим і спричиняє появу біфуркації Гопфа або Тьюрінга [8–12].

Для звичайних систем реакції-дифузії ($\alpha = 1, \beta = 2$) з джерелами (5) при $\ell/L \ll 1$ просторово-однорідний стан є нестійким за умови $-1/3 < A < 1/3$ відносно хвильових чисел $k_0 \cong (\ell L)^{-1/2}(q'_0 Q'_\eta - q'_\eta Q'_0)^{1/4}$ (біфуркація Тьюрінга). При тих самих значеннях параметра $A \in (-1/3, 1/3)$ і $\delta \ll 1$ просторово-однорідний розподіл θ_0, η_0 є нестійким стосовно просторово-однорідних коливань з частотою $\omega_0 \cong \delta^{-1/2}(q'_0 Q'_\eta - q'_\eta Q'_0)^{1/2}$, $k = 0$ (біфуркація Гопфа).

Для дробових систем реакції-дифузії як питання біфуркації, так і самої можливості формування просторово-неоднорідних розв'язків залишалося відкритим. Тому, в першу чергу, систему дифузійних рівнянь (1), (2) з дробовими похідними (3), (4) і джерелами (5) було досліджено чисельно для різних значень ℓ, L, A та показників α і β .

В результаті моделювання встановлено, що структури, отримані у випадку дробових похідних за просторовою координатою для $\beta < 2$, є подібними до структур, отриманих для звичайних систем реакції-дифузії ($\beta = 2$), але є більш контрастними при тих самих параметрах системи (див. рис. 1, де наведено числовий розв'язок системи для двох значень параметра $A = 0$ і $A = 0.21$ при $\alpha = 1, \beta = 1.5, \ell = 0.01, L = 1$; пунктирні криві відповідають стандартній системі при $\alpha = 1, \beta = 2$).

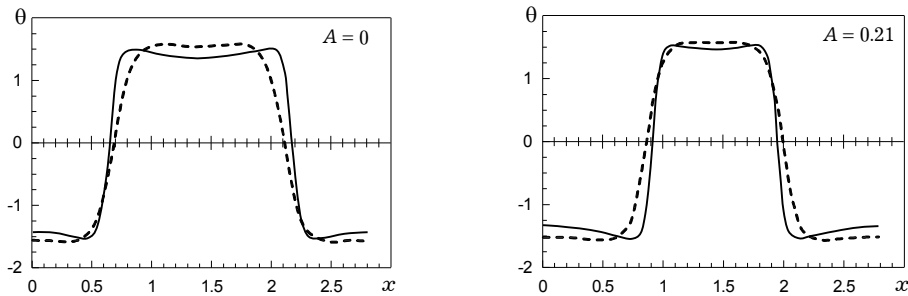


Рис. 1

Бачимо, що зміна параметра A впливає на зміну форми структури, але не змінює області існування структури. Отримані результати також підтверджують, що нелінійний механізм формування структур у цьому випадку є аналогічним до того, який має місце у звичайних системах.

Для аналітичного дослідження параметрів отриманих дисипативних структур системи (1), (2) застосуємо варіаційний принцип. Такий підхід дає можливість знайти наближений аналітичний розв'язок для дисипативних структур.

Суть підходу полягає в тому, що кожній задачі, описаній за допомогою системи диференціальних рівнянь, можна поставити у відповідність певний функціонал, мінімізуючи який можна отримати початкові рівняння руху або умови рівноваги системи [3–5, 9]. Для аналізу системи використаємо варіаційний принцип Гаусса, який пов'язує з таким функціоналом мінімальних обмежень:

$$D = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [(\dot{\theta} - \ell^2 D_x^\beta \theta + q(\theta, \eta, A))^2 + (\dot{\eta} - L^2 D_x^\beta \eta + Q(\theta, \eta, A))^2] dx. \quad (6)$$

Розв'язок системи (1), (2) для класичного випадку добре відомий з якісного аналізу (див. [8]). Покажемо, як варіаційний принцип (6) можна використати для знаходження розв'язку рівнянь (1), (2) у випадку дробових похідних за просторовою змінною. Для цього апроксимуємо розв'язок системи для $\ell/L \ll 1$ комбінацією різких і плавних кусків для змінної θ і гладкої кривої для η . Розподіл полів θ , η для різних значень A наведено на рис. 1.

Припустимо, що шуканий розв'язок має форму

$$\theta = \begin{cases} -\theta_h, & 0 < x < \xi - \varepsilon, \\ \frac{1}{\varepsilon}(x - \xi), & |x - \xi| < \varepsilon, \\ \theta_h, & \xi + \varepsilon < x < L_s, \end{cases} \quad \eta = \eta_0 = \text{const}. \quad (7)$$

Характеристичний розв'язок рівнянь (1), (2) будемо шукати на деякому інтервалі $(0, 2L_s)$. Підставляючи (7) у функціонал (6), можна визначити невідомі параметри з системи рівнянь руху

$$\frac{\partial D}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial \xi} = 0. \quad (8)$$

Виконавши обчислення, отримуємо з точністю $\varepsilon = \ell^2/L_s^2 \ll 1$ такі рівняння для змінних:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} - \varepsilon \eta_0 &= 0, \\ \dot{\eta}_0 + \eta_0 - A - \frac{L^2 \eta_0}{\Gamma(2 - \alpha)} L_s^{-\alpha} + \theta_h \frac{2\xi - L_s}{L_s} &= 0, \\ \dot{\theta} + \frac{\theta_h^3}{3} - \theta_h - \eta_0 \frac{2\xi - L_s}{L_s - 2\varepsilon} - \theta_h \frac{l^2 L_s^{1-\beta}}{\Gamma(2 - \alpha)(L_s - 2\varepsilon)} &= 0, \end{aligned}$$

звідки випливає, що єдиний неоднорідний стаціонарний стан початкової системи має такий вигляд:

$$\eta_0 = 0, \quad (9)$$

$$\xi = \frac{L_s}{2} + \frac{AL_s}{2\theta_h}, \quad (10)$$

$$\theta_h = \sqrt{3} \left(1 + \frac{\ell^2 (L_s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)(L_s - 2\varepsilon)} \right)^{1/2}. \quad (11)$$

З (9)–(11) випливає, що для $\frac{\ell}{L_s} \ll 1$ маємо $\theta_h \approx 1$ і ξ є лінійною функцією параметра біфуркації A .

У системі довжини $2L_s$ розв'язок на інтервалі $[0, 2L_s]$ є дзеркальним відображенням розв'язку (7) відносно точки $x_s = L_s$. У реальних системах

довжини $L_x \gg L_s$ стаціонарний розподіл можна побудувати на періодичній множині розв'язків (7).

Необхідно зауважити, що в цьому підході довжина L_s (і період $2L_s$) неоднорідного розподілу залишені невизначеними. Звичайно їх можна розглядати як вільні параметри і визначати з відповідних задач оптимізації.

У нульовому наближенні для $\ell/L \ll 1$ структури є комбінаціями різних вертикальних і гладких горизонтальних розподілів для активатора θ і гладких розподілів для інгібітора η , який практично можна вважати константою. Параметри розв'язків (9), (10) і (11) описуються достатньо простими аналітичними виразами і добре моделюють вигляд розв'язків, отриманих за допомогою комп'ютерного моделювання. У зв'язку з цим використання варіаційного принципу [5, 9] для дослідження стаціонарних контрастних структур у випадку дробових просторових операторів є навіть більше ефективним, ніж для класичних систем.

Принципово іншу ситуацію маємо при зміні порядку часової дробової похідної $\alpha > 1$. При певних критичних значеннях порядку дробової похідної і параметра біфуркації в системі (1), (2) можуть мати місце як стаціонарні (рис. 2а), так і осцилюючі (рис. 2б) дисипативні структури. Більше того, в системі може змінюватися і сам характер біфуркації (рис. 2в). (Розрахунки динаміки формування числового розв'язку системи на рис. 2 виконано при $\alpha = 1.5$, $\beta = 2$, $\ell = 0.01$, $L = 1$).

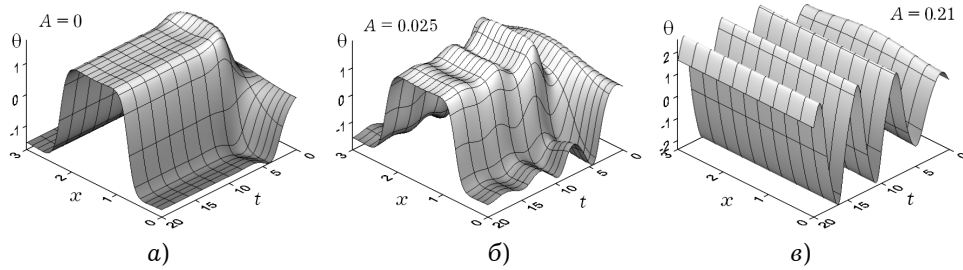


Рис. 2

Теоретичне обґрунтування зазначених ефектів вдалося зробити на основі узагальненого лінійного аналізу стійкості. Лінійний аналіз стійкості у випадку систем з часовою дробовою дифузиею можна провести, застосовуючи перетворення Лапласа за часом і перетворення Фур'є за просторовою координатою. Такий підхід використано в роботі [7] для аналізу біфуркації Тьюрінга для часткового випадку системи (1), (2) $0 < \alpha < 1$, $\beta = 2$, $\tau_1 = \tau_2 = 1$, коли дробовий оператор за часом безпосередньо діє на просторову похідну. Покажемо, що такий підхід можна застосовувати і до загальної системи (1), (2) для довільного $0 < \alpha < 2$.

У випадку $\alpha > 1$, $\beta = 2$ застосування перетворення Лапласа за часом і перетворення Фур'є за просторовою координатою дає можливість отримати систему лінійних рівнянь

$$(\tau_1 s^\alpha + \ell^2 q^2 - a_{11}) \Delta \tilde{n}_1(q, s) = \tau_1 s^{\alpha-1} \Delta \tilde{n}_1(q, 0) + a_{12} \Delta \tilde{n}_2(q, s), \quad (12)$$

$$(\tau_2 s^\alpha + L^2 q^2 - a_{22}) \Delta \tilde{n}_2(q, s) = \tau_2 s^{\alpha-1} \Delta \tilde{n}_2(q, 0) + a_{21} \Delta \tilde{n}_1(q, s), \quad (13)$$

розв'язок якої буде мати вигляд

$$\Delta \hat{\tilde{n}}_1(q, s) = \frac{\tau_1 (\tau_2 s^\alpha + L^2 q^2 - a_{22}) s^{\alpha-1} \Delta \tilde{n}_1(q, 0) + \tau_2 a_{12} s^{\alpha-1} \Delta \tilde{n}_2(q, 0)}{(\tau_1 s^\alpha + \ell^2 q^2 - a_{11})(\tau_2 s^\alpha + L^2 q^2 - a_{22}) - a_{12} a_{21}}, \quad (14)$$

$$\Delta \hat{\tilde{n}}_2(q, s) = \frac{\tau_1 a_{21} s^{\alpha-1} \Delta \tilde{n}_1(q, 0) + \tau_2 (\tau_1 s^\alpha + \ell^2 q^2 - a_{11}) s^{\alpha-1} \Delta \tilde{n}_2(q, 0)}{(\tau_1 s^\alpha + \ell^2 q^2 - a_{11})(\tau_2 s^\alpha + L^2 q^2 - a_{22}) - a_{12} a_{21}}, \quad (15)$$

де s – змінна перетворення Лапласа; q – змінна перетворення Фур'є; символ « \wedge » позначає перетворення Лапласа, а « \sim » – перетворення Фур'є. Константи $a_{1j} = \frac{\partial W}{\partial n_j} \Big|_{(n_1^*, n_2^*)}$, $a_{2j} = \frac{\partial Q}{\partial n_j} \Big|_{(n_1^*, n_2^*)}$ визначають матрицю Якобі в околі однорідного стаціонарного розв'язку (n_1^*, n_2^*) системи.

Позначивши $\alpha = \frac{n}{m}$, де $n > m$, $n, m \in \mathbb{N}$, отримаємо, що $\alpha - 1 = \frac{n - m}{m}$. Тоді систему (14), (15) перепишемо в загальному вигляді як

$$\Delta \hat{n}(q, s) = \frac{a(q) s^{(2n-m)/m} + g(q) s^{(n-m)/m}}{\prod_{i=1}^{2n} (s^{1/m} - z_i)}, \quad (16)$$

де $a(q)$, $g(q)$ – дійсні функції аргументу q і параметрів системи, а z_i – нулі полінома

$$P_{2n} = (\tau_1 z^n + \ell^2 q^2 - a_{11})(\tau_2 z^n + L^2 q^2 - a_{22}) - a_{12} a_{21}. \quad (17)$$

Умови нестійкості однорідного рівноважного стану можуть бути знайдені дослідженням асимптотичної поведінки розв'язків з оберненого перетворення Лапласа

$$\Delta \hat{n}(q, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a(q) s^{(2n-m)/m} + g(q) s^{(n-m)/m}}{\prod_{i=1}^{2n} (s^{1/m} - z_i)} e^{st} ds, \quad (18)$$

де точка c лежить поза всіма сингулярностями в комплексній площині. Інтеграл можна оцінити, розглянувши модифікований контур Бромвіча (рис. 3) з гілкою, вирізаною з точки $s = 0$, де $s = re^{i\theta+2k\pi}$, $-\pi < \theta \leq \pi$. Як і в [7], можна показати, що вклад уздовж дуг буде зникати і нестійкість буде виникати в полюсах виразу (18), тобто в нулях полінома (17). Причому основну нестійкість буде вносити дійсна частина m -ї степені коренів полінома (17), який очевидно заміною зводиться до звичайного квадратного рівняння

$$Y^2 - \text{tr } A Y + \det A = 0, \quad (19)$$

де

$$A = - \begin{vmatrix} \frac{1}{\tau_1} (\ell^2 k^2 + a_{11}) & \frac{a_{12}}{\tau_1} \\ \frac{a_{21}}{\tau_2} & \frac{1}{\tau_2} (L^2 k^2 + a_{22}) \end{vmatrix}. \quad (20)$$

У частковому випадку, коли $n = m$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, із розв'язку рівняння (19)

$$Y = \frac{\text{tr } A}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{tr}^2 A}{4} - \det A}$$

отримаємо умови нестійкості для класичної системи реакції-дифузії

$$\text{tr } A < 0, \quad \det A < 0 \quad \text{або} \quad \text{tr } A > 0, \quad \det A < 0.$$

У випадку, коли $n > m$, $\alpha \neq 1$, $\beta = 2$, ситуація змінюється якісно, що наочно можна продемонструвати для точкової системи ($\ell^2 = L^2 = 0$) вигляду (1), (2).

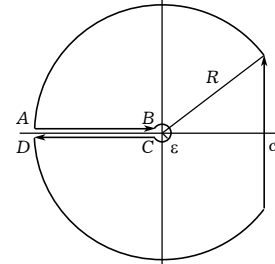


Рис. 3

Виділимо дійсну і уявну частини розв'язку

$$Y = \frac{a_{22}\tau_1 + a_{11}\tau_2}{2\tau_1\tau_2} \mp i \cdot \sqrt{-\left(\frac{a_{22}\tau_1 - a_{11}\tau_2}{2\tau_1\tau_2}\right)^2 - \frac{a_{12}a_{21}}{\tau_1\tau_2}}$$

і подамо його у тригонометричній формі

$$Y = |Y|(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

де

$$|Y| = \sqrt{\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{\tau_1\tau_2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a_{22}\tau_1 + a_{11}\tau_2}{2\sqrt{\tau_1\tau_2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}},$$

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{-(a_{22}\tau_1 - a_{11}\tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2 a_{12}a_{21}}{4\tau_1\tau_2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}.$$

Виконаємо обернену підстановку $Y = s^{n/m}$ і, застосовуючи формулу Муавра, отримаємо

$$s^{1/n} = |Y|^{1/n} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (21)$$

$$s = |Y|^{m/n} \left(\cos \frac{m(\varphi + 2k\pi)}{n} \pm i \sin \frac{m(\varphi + 2k\pi)}{n} \right), \quad (22)$$

де $k = 0, \dots, n-1$. Для того щоб виконувались умови нестійкості, необхідно, щоб задовольнялась така система:

$$\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} > 0, \quad \cos \frac{m(\varphi + 2k\pi)}{n} > 0. \quad (23)$$

Тобто у випадку $n > m$, $\alpha \neq 1$, $\beta = 2$ у формуванні нестійкості головну роль починає відігравати уявна частина коренів рівняння (19) і нестійкість може мати місце навіть і у випадку $\operatorname{Re} Y < 0$, коли $\operatorname{Re} Y^{1/n} > 0$ і $\operatorname{Re} Y^{m/n} > 0$. Отже, для довільного значення $\arg Y$ завжди можна підібрати такий порядок дробової похідної α , який приведе до зміни стійкості системи.

У роботі за рахунок введення дробових операторів розширено поняття системи реакції-дифузії. За допомогою комп'ютерного моделювання продемонстровано, що дисипативні структури, які мають місце в класичних системах ($\alpha = 1$, $\beta = 2$), існують і в більш загальних системах також для степенів α , менших від деякого критичного значення α_0 . Незважаючи на те, що форма отриманих дисипативних структур дещо відрізняється, розв'язки мають подібні нелінійні властивості. При перевищенні показником часової дробової похідної α критичного значення α_0 кінетика формування структур стає осцилюючою і може спричинити навіть зміну характеру біфуркації самої системи.

1. *Byrne J., Hindmarch D. C.* Stiff ODE solver: A review of current and coming attractions // *J. Comput. Phys.* – 1987. – **70**, No. 1. – P. 1–60.
2. *Daftardar-Gejji V., Jafari H.* Adomian decomposition: a tool for solving a system of fractional differential equations // *J. Math. Anal. Appl.* – 2005. – **301**. – P. 508–518.
3. *Gafiychuk V. V., Lubashevskii I. A.* Analysis of dissipative structures based on Gauss variational principle // *Ukr. Math. Zhurn.* – 1992. – **44**, No. 9. – P. 1085–1091.
Те саме: *Гафійчук В. В., Лубашевський І. О.* Аналіз дисипативних структур на основі варіаційного принципу Гаусса // *Укр. мат. журн.* – 1992. – **44**, № 9. – С. 1186–1192.
4. *Gafiychuk V. V., Lubashevskii I. A.* Variational principles of dissipative systems // *J. Soviet Math.* – 1993. – **67**, No. 2. – P. 2943–2949.
Те саме: *Гафійчук В. В., Лубашевський І. А.* Вариационные принципы диссипативных систем // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1992. – Вып. 35. – С. 131–137.

5. *Gafiychuk V. V., Lubashevskii I. A.* Variational representation of the projection dynamics and random motion of highly dissipative systems // *J. Math. Phys.* – 1995. – **36**, No. 10. – P. 5735–5752.
6. *Hagberg A., Meron E., Rubinstein I., Zaltzman B.* Order parameter equations for front transitions: Planar and circular fronts // *Phys. Rev. E.* – 1997. – **55**, No. 4. – P. 4450–4457.
7. *Henry B. I., Wearne S. L.* Fractional reaction-diffusion // *Physica. A.* – 2000. – **276**. – P. 448–455.
8. *Kerner B. S., Osipov V. V.* Autosolitons. – Dordrecht: Kluwer, 1994. – 496 p.
9. *Lubashevskii A., Gafiychuk V. V.* The projection dynamics of highly dissipative system // *Phys. Rev. E.* – 1994. – **50**, No. 1. – P. 171–181.
10. *Muratov C. B., Osipov V. V.* General theory of instabilities for patterns with sharp interfaces in reaction-diffusion systems // *Phys. Rev. E.* – 1996. – **53**. – P. 3101–3116.
11. *Muratov C. B., Osipov V. V.* Theory of spike spiral waves in a reaction-diffusion system // *Phys. Rev. E.* – 1999. – **60**. – P. 242–246.
12. *Nicolis G., Prigogine I.* Self-organization in non-equilibrium systems. – New York: Wiley, 1977. – 512 p.
13. *Osipov V. V.* Multifunctional variational method for description of evolution and dynamics of dissipative structures in nonequilibrium systems // *Phys. Rev. E.* – 1993. – **48**. – P. 88–100.
14. *Osipov G. V., Collins J. J.* Using weak impulses to suppress traveling waves in excitable media // *Phys. Rev. E.* – 1999. – **60**, No. 1. – P. 54–60.
15. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional integrals and derivatives: Theory and Applications. – Newark: Gordon and Breach, 1993. – 587 p.
Те саме: *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
16. *Schutz P., Bode M., Gafiychuk V. V.* Transition from stationary to traveling localized patterns in two-dimensional reaction-diffusion system // *Phys. Rev. E.* – 1995. – **52**, No. 4. – P. 4465–4473.
17. *Seki K., Wojcik M., Tachiya M.* Fractional reaction-diffusion equation // *J. Chem. Phys.* – 2003. – **119**. – P. 2165–2170.
18. *Vlad M. O., Ross J.* Systematic derivation of reaction-diffusion equations with distributed delays and relations to fractional reaction-diffusion equations and hyperbolic transport equations: Application to the theory of Neolithic transition // *Phys. Rev. E.* – 2002. – **66**. – 061908.
19. *Weitzner H., Zaslavsky G. M.* Some applications of fractional equations // *Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simulation.* – 2003. – **8**. – P. 273–281.

АНАЛИЗ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР В ДИФFUЗИОННЫХ СИСТЕМАХ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНЫХ ПОРЯДКОВ

Исследуются диссипативные структуры в уравнениях реакции-диффузии с производными дробных порядков. Для нахождения приближенного аналитического выражения для диссипативных структур в моделях с кубическими нелинейностями используется разработанный ранее вариационный метод. Полученные результаты подтверждают, что нелинейность играет определяющую роль при формировании структур, а пространственные производные дробных порядков существенно не изменяют вид диссипативных структур. В то же время изменение порядка временной дробной производной существенно влияет на формирование и вид диссипативных структур.

ANALYSIS OF DISSIPATIVE STRUCTURES IN DIFFUSION SYSTEMS WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

We investigate the dissipative structures in a fractional reaction-diffusion system. We use the model with cubic non-linearity to obtain the solutions in the form of dissipative structures. Further we use the developed earlier variational principle to find an approximate analytic form of such dissipative structures. Here we have discovered that non-linearity plays the main role in structure formation, and space fractional derivatives do not destroy the form of dissipative structures.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
17.10.05