УДК 539.3

Б. Г. Шелестовський, Г. В. Габрусєв

НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Запропоновано спосіб наближеного розв'язування некоректних задач у вигляді частинних сум узагальненого ряду Фур'є за ортогональними функціями. Застосовано методи регуляризації рівняння Фредгольма першого роду та ортогоналізації функціонального рівняння для одержання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів полінома-розв'язку. Одержано умову для вибору оптимальної кількості його членів.

При розв'язанні багатьох прикладних задач, зокрема контактних задач теорії пружності, виникає необхідність побудови наближеного розв'язку рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_a^b y(t)\mathcal{K}(t,r)\,dt = f(r), \qquad a \le r \le b\,. \tag{1}$$

Як відомо [5], така задача є некоректною внаслідок порушення умови 2 означення за Адамаром. Тобто навіть малі відхилення правої частини $f(r)$, ядра $\mathcal{K}(t,r)$ чи методу розв'язування можуть призводити до настільки великих похибок у розв'язку, що він не матиме нічого спільного із шуканою функцією. Тому тривалий час вважалося, що некоректні задачі не мають практичного значення, а їх постановка є недоцільною. І лише з появою публікацій А. М. Тихонова [5, 6], М. О. Лаврентьєва [3], А. А. Самарського, В. Я. Арсеніна, В. А. Морозова та ін. починається розвиток методів, які дозволяють будувати стійкі розв'язки таких задач. За останні роки появилось багато публікацій, присвячених цій тематиці, зокрема, і роботи львівських математиків [2, 4].

Розглянемо спосіб побудови наближених розв'язків рівняння Фредгольма першого роду, для яких максимальні значення відносної похибки виконання рівняння (1) не перевищували би заданих.

Регуляризацією рівняння Фредгольма першого роду за методом Лаврентьєва [3] (методом «помірного псування») отримуємо рівняння Фредгольма другого роду

$$\beta y(r) + \int_a^b y(t)\mathcal{K}(t,r)\,dt = f(r), \qquad a \le r \le b, \quad \beta > 0\,. \tag{2}$$

Нестійкість розв'язку рівняння (1) зумовлена тим, що спектр власних значень оператора A ($Ax = f$) згущується до нуля, в результаті чого обернений оператор A^{-1} або необмежений, або не існує. Доданок βy, зсуваючи цей спектр на величину β, «покращує» обернений оператор, підвищуючи стійкість розв'язку. Потрібно лише, щоб цей зсув був помірним.

Одним із найочевидніших підходів до побудови наближеного розв'язку рівняння (2) є метод зведення інтегрального рівняння до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для цього шукаємо $y(r)$ у вигляді узагальненого ряду Фур'є за ортогональними функціями $\varphi_n = \sqrt{r}\,L(r,\gamma_n)$, де

$$L(r,\gamma_n) = N_0(\gamma_n)J_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right) - J_0(\gamma_n)N_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right),$$

а γ_n – додатні корені рівняння $N_0(z)J_0\left(\frac{b}{a}z\right) - J_0(z)N_0\left(\frac{b}{a}z\right) = 0$, тобто

$$y(r) = \sqrt{r}\sum_{n=1}^{\infty} a_n L(r,\gamma_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(r).$$

Розв'язок задачі (1) або (2) шукатимемо в просторі L_2 із нормою $\| y(r)\|^2 = \int_a^b y^2(r)\,dr$. Наближені розв'язки подамо у вигляді полінома

$$\tilde{y}(r) = \sqrt{r}\sum_{n=1}^{N} a_n L(r,\gamma_n). \qquad (3)$$

Враховуючи (3), інтегральне рівняння (2) запишемо у вигляді

$$\beta\sqrt{r}\sum_{n=1}^{N} a_n L(r,\gamma_n) + \sum_{n=1}^{N} a_n \int_a^b \sqrt{t}\, L(t,\gamma_n)\mathcal{K}(t,r)\,dt = f(r), \quad a \le r \le b,$$

або

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \left[\beta\sqrt{r}\, L(r,\gamma_n) + \mathcal{K}_n(r)\right] = f(r), \qquad a \le r \le b, \qquad (4)$$

де

$$\mathcal{K}_n(r) = \int_a^b \sqrt{t}\, L(t,\gamma_n)\mathcal{K}(t,r)\,dt.$$

Функції $\mathcal{K}_n(r)$ та $f(r)$ у практичних застосуваннях перетворюються в нуль при $r = a$ та $r = b$ і є кусково-неперервними на проміжку $a \le r \le b$. Тому кожну з них можна подати у вигляді суми узагальненого ряду Фур'є за функціями $\varphi_j(r) = \sqrt{r}\, L(r,\gamma_j)$.

Замінивши згадані ряди N частинними сумами, будемо мати

$$\mathcal{K}_n(r) = \sqrt{r}\sum_{j=1}^{N} c_j^{(n)} L(r,\gamma_j), \qquad f(r) = \sqrt{r}\sum_{j=1}^{N} b_j L(r,\gamma_j). \qquad (5)$$

Використавши ортогональність системи функцій $\sqrt{r}\, L(r,\gamma_j)$, одержимо

$$c_q^{(n)} = \frac{1}{M_q}\int_a^b \sqrt{r}\,\mathcal{K}_n(r) L(r,\gamma_q)\,dr, \qquad b_q = \frac{1}{M_q}\int_a^b \sqrt{r}\, f(r) L(r,\gamma_q)\,dr, \qquad (6)$$

де

$$M_q = \int_a^b r L^2(r,\gamma_q)\,dr =$$

$$= \frac{a^2}{2(\gamma_q)^2}\left\{\left(\frac{b}{a}\gamma_q\left[N_0(\gamma_q)J_1\left(\frac{b}{a}\gamma_q\right) - J_0(\gamma_q)N_1\left(\frac{b}{a}\gamma_q\right)\right]\right)^2 - \frac{4}{\pi^2}\right\}.$$

Врахувавши (5), співвідношення (4) запишемо у вигляді

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \left[\beta\sqrt{r} L(r,\gamma_n) + \sqrt{r}\sum_{j=1}^{N} c_j^{(n)} L(r,\gamma_j)\right] = \sqrt{r}\sum_{j=1}^{N} b_j L(r,\gamma_j), \quad a \le r \le b.$$

Помноживши ліву та праву частину останньої рівності на $\sqrt{r}\, L(r,\gamma_q)$ і проінтегрувавши отриману рівність по r на проміжку $[a,b]$, одержимо

$$\beta a_q M_q + \sum_{n=1}^{N} a_n c_q^{(n)} M_q = b_q M_q, \qquad q = 1,\ldots,N,$$

або остаточно

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \left[c_q^{(n)} + \beta\begin{pmatrix} 1, & n = q \\ 0, & n \ne q \end{pmatrix}\right] = b_q, \qquad q = 1,\ldots,N. \qquad (7)$$

Це співвідношення і дає систему N рівнянь для визначення N невідомих a_n, $n=1,\dots,N$. Очевидно, що рівняння системи (7), а, значить, і її розв'язки a_n (отже, й функція $\tilde{y}(r)$) залежать від параметра регуляризації β.

Згідно з методом «нев'язки», запропонованим Лаврентьєвим [3], значення коефіцієнта регуляризації β потрібно вибирати з умови

$$\| A\tilde{y} - f \| = \Delta f\,, \tag{8}$$

де $\Delta f = \left\| \tilde{f}(r) - f(r) \right\| = \sqrt{\int\limits_a^b \left[\, \tilde{f}(r) - f(r)\right]^2 dr}$.

Оскільки при числових розрахунках рівність (8) може не виконуватись точно, доцільно мінімізувати функціонал

$$\Psi(\tilde{y}) = \left| \sqrt{\int\limits_a^b \left[\int\limits_a^b \mathcal{K}(r,t)\tilde{y}(t)\,dt - f(r)\right]^2 dr} - \Delta f \right|$$

або

$$\Psi(\tilde{y}) = \left| \beta \sqrt{\int\limits_a^b \tilde{y}^2\,dr} - \Delta f \right|.$$

Врахувавши, що

$$\tilde{y}(r) = \sqrt{r}\sum_{n=1}^{N} a_n L(r,\gamma_n)\,,$$

одержимо

$$\tilde{y}^2(r) = r\left(\sum_{n=1}^{N} a_n L(r,\gamma_n)\right)\left(\sum_{j=1}^{N} a_j L(r,\gamma_j)\right) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_n a_j r\, L(r,\gamma_n) L(r,\gamma_j)\,.$$

Отже,

$$\Psi(\tilde{y}) = \left| \beta \sqrt{\int\limits_a^b r \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_n a_j r L(r,\gamma_n) L(r,\gamma_j)\,dr} - \Delta f \right| = \left| \beta \sqrt{\sum_{n=1}^{N} a_n^2 M_n} - \Delta f \right|.$$

Величину N – степінь полінома (3), а, значить, і кількість рівнянь в системі (7), вибираємо з умови, щоб відносна похибка виконання рівності (1) $\varepsilon(N,\beta)$ не перевищувала заданої ε_0:

$$\varepsilon(N,\beta) = \max_{r\in[a,b]} \frac{1}{f(r)}\left(\int\limits_a^b \tilde{y}(t)\mathcal{K}(t,r)\,dt - f(r)\right)\cdot 100 < \varepsilon_0$$

або, враховуючи (3), в розгорнутому вигляді:

$$\varepsilon(N,\beta) = \max_{r\in[a,b]} \frac{1}{f(r)}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n \int\limits_a^b \sqrt{t}\, L(t,\gamma_n)\mathcal{K}(t,r)\,dt - f(r)\right)\cdot 100 < \varepsilon_0\,. \tag{9}$$

Розглянемо інший підхід до побудови наближеного розв'язку рівняння Фредгольма першого роду (1).

Враховуючи (3), співвідношення (1) подамо у такому вигляді:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \int\limits_a^b \sqrt{t}\, L(t,\gamma_n)\mathcal{K}(t,r)\,dt = f(r), \qquad a \le r \le b\,,$$

або

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \mathcal{K}_n(r) = f(r), \qquad a \le r \le b\,.$$

На основі (5) останнє співвідношення перепишемо так:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \left(\sqrt{r}\sum_{j=1}^{N} c_j^{(n)} L(r,\gamma_j)\right) = \sqrt{r}\sum_{j=1}^{N} b_j L(r,\gamma_j)\,.$$

Звідси з огляду на ортогональність системи функцій $\varphi_n(r) = \sqrt{r}\, L(r, \gamma_n)$ матимемо

$$\sum_{n=1}^{N} a_n c_q^{(n)} = b_q, \qquad q = 1, \ldots, N. \tag{10}$$

Зрозуміло, що числова реалізація системи (7) (метод Лаврентьєва) із попереднім визначенням параметра регуляризації β є значно складнішою, ніж реалізація системи (10). Тому з метою вибору кращого (стосовно точності) підходу до побудови розв'язків задачі (1), доцільно провести порівняння максимальних відносних похибок виконання цієї рівності при $a \le r \le b$ для запропонованих вище методів.

Таке порівняння проведемо для побудови функції розподілу контактних напружень при взаємодії жорсткого кільцевого штампа з трансверсально ізотропним шаром (рис. 1).

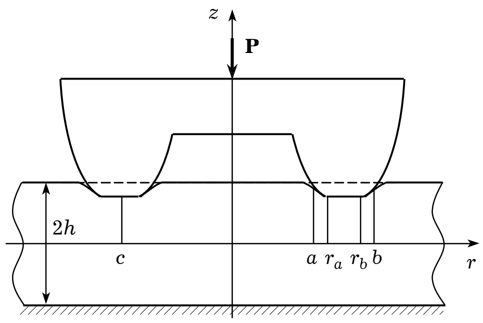

Рис. 1

У роботі [1] ця задача зводиться до розв'язання рівняння Фредгольма першого роду (1), де $y(r) = \sqrt{r} \cdot x(r)$ − шукана функція, $x(r)$ − функція, через яку описується розподіл контактних напружень під штампом, а також

$$\mathcal{K}(t, r) = \sqrt{t} \int_0^\infty F(\alpha) \begin{Bmatrix} J_0(r\alpha) - J_0(a\alpha), & a \le r < c \\ J_0(r\alpha) - J_0(b\alpha), & c \le r \le b \end{Bmatrix} J_0(t\alpha)\, d\alpha,$$

$$F(\alpha) = \frac{\left(1 - e^{-4\mu_1 h\alpha}\right)\left(1 - e^{-4\mu_3 h\alpha}\right)}{\varphi^*(2\mu_3, 2\mu_1, \alpha)},$$

$$\varphi^*(2\mu_3, 2\mu_1, \alpha) = 2\mu_3\left(1 - e^{-4\mu_3\alpha}\right)\left(1 + e^{-4\mu_1\alpha}\right) - 2\mu_1\left(1 - e^{-4\mu_1\alpha}\right)\left(1 + e^{-4\mu_3\alpha}\right),$$

$$f(r) = B^{(1)}(r) = \begin{cases} (a - r_a)^2 - (r - r_a)^2, & a \le r \le r_a, \\ (a - r_a)^2, & r_a \le r < c, \\ 0, & c \le r \le b, \end{cases}$$

або

$$f(r) = B^{(2)}(r) = \begin{cases} 0, & a \le r < c, \\ (b - r_b)^2, & c \le r < r_b, \\ (b - r_b)^2 - (r - r_b)^2, & r_b \le r \le b. \end{cases}$$

Реалізуючи метод регуляризації Лаврентьєва, отримуємо дві системи вигляду (7) для визначення $a_n^{(1)}$ та $a_n^{(2)}$, $n = 1, \ldots, N$, де $c_q^{(n)}$, b_q та M_q обчислюються за співвідношеннями (6). У цих рівностях для обчислення $a_n^{(1)}$ і $a_n^{(2)}$ використовуємо відповідно $f(r) = B^{(1)}(r)$ і $f(r) = B^{(2)}(r)$. Розв'язавши ці системи, одержимо наближення шуканої функції $x(r)$:

$$\tilde{x}(r) = \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^{(1)} z_1 + a_n^{(2)} z_2\right) L(r, \gamma_n),$$

через яку виражається функція контактних напружень:

$$\sigma_{zz}(r) = \frac{P}{2\pi a^2}\, \tilde{x}(r).$$

Задамо $\varepsilon_0 = 4\,\%$ і перевіримо для $N_1 = 11$ та $N_2 = 21$ виконання умови (9) для знайдених значень $a_n = a_n^{(1)} z_1 + a_n^{(2)} z_2$ при

$$f^*(r) = z_1 B^{(1)}(r) + z_2 B^{(2)}(r), \qquad z_i = \frac{1}{R_i}, \qquad i = 1, 2,$$

де R_i – радіуси кривини парабол, обертанням яких утворено штамп.

Числові розрахунки виконано для таких випадків геометричних параметрів штампа:

$$\textbf{\textit{1}})\quad a = 0.4, \qquad b = 1.0, \qquad r_a = r_b = 0.7;$$

$$\textbf{\textit{2}})\quad a = 0.4, \qquad b = 1.0, \qquad r_a = 0.55, \qquad r_b = 0.85. \tag{11}$$

Для $N = 11$ і $N = 21$ отримано відповідно такі значення відносних похибок:

$$\varepsilon_1(N = 11) = 6.9\%, \qquad \varepsilon_1(N = 21) = 1.9\%,$$

$$\varepsilon_2(N = 11) = 9.6\%, \qquad \varepsilon_2(N = 21) = 0.9\%.$$

Отже, для побудови наближення функцій розподілу контактних напружень з використанням методу Лаврентьєва (формула (7)), щоб задовольнялась умова (9), достатньо вибрати $N = 21$.

Графіки функції $\tilde{x}(r)$ для випадків ***1*** і ***2*** значень геометричних параметрів штампа (11) зображено на рис. 2 і 3 відповідно при $N = 11$ і $N = 21$.

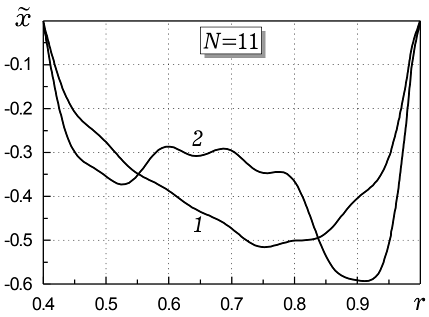

Рис. 2

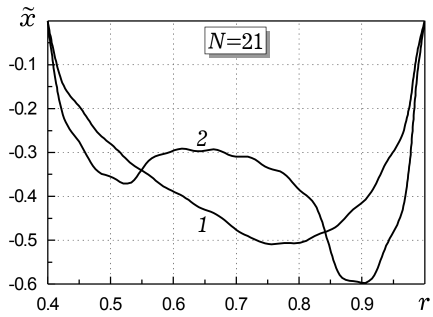

Рис. 3

З метою порівняння виконано розрахунки за методикою зведення рівняння Фредгольма першого роду (1) до системи алгебраїчних рівнянь вигляду (10).

Вибираючи $N = 11$ та $N = 21$, для розглянутих вище випадків ***1*** і ***2*** значень геометричних параметрів штампа (11) відповідно одержимо такі значення відносних похибок:

$$\varepsilon_1(N = 11) = 7.1\%, \qquad \varepsilon_1(N = 21) = 2.1\%,$$

$$\varepsilon_2(N = 11) = 10.1\%, \qquad \varepsilon_2(N = 21) = 2.7\%.$$

Отже, запропоновані підходи до побудови наближеного розв'язку задачі (1) при $N = 21$ цілком задовольняють практичні потреби. Зауважимо, що застосування методу Лаврентьєва дає більш точне наближення розв'язку, ніж у випадку побудови розв'язку системи алгебраїчних рівнянь вигляду (10), яка є простішою з точки зору реалізації.

1. *Габрусєв Г. В.* Осесиметрична контактна задача термопружності про тиск кільцевого штампу на трансверсально-ізотропний шар // Вісн. Тернопіль. держ. техн. ун-ту. – 2005. – **10**, № 1. – С. 30–37.
2. *Герасимчук О. Б., Рибицька О. М.* Нормальний розв'язок інтегрального рівняння першого роду зі слабкою особливістю // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 2. – С. 43–52.

3. *Лаврентьев М. А.* О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
4. *Сявавко М. С.*, *Пасечник Т. В.*, *Рыбыцька О. М.* Псевдообратный оператор и рациональные алгоритмы нормального решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Электрон. моделирование. – 1995. – **17**, № 1. – С. 10–16.
5. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленнях задач // Докл. АН СССР. – 1963. – **153**, № 1. – С. 49–52.
6. *Тихонов А. Н.*, *Гончарский А. В.*, *Степанов В. В.*, *Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1990. – 231 с.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Предложен способ приближенного решения некорректных задач в виде частичных сумм обобщенного ряда Фурье по ортогональным функциям. Применены методы регуляризации уравнения Фредгольма первого рода и ортогонализации функционального уравнения для получения системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов полинома-решения. Найдено условие для выбора оптимального количества его членов.

APPROXIMATE SOLUTION OF SOME ILL-POSED PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY

A way of approximation of solution of ill-posed problem in the form of partial sums of Fourier series by orthogonal functions is proposed. The methods of regularization of the first-kind Fredholm-type equation and orthogonalization of the functional equation for finding a linear algebraic equations system relative to the polynomial's coefficients are applied. The condition for choice of optimum quantity of its terms is obtained.

Тернопіль. держ. техн.
ун-т ім. Івана Пулюя, Тернопіль

Одержано
10.03.06